

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Мармыш Д. Е.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. При исследовании многокомпонентных систем, в которых возникает сложное напряженно-деформированное состояние вследствие взаимовлияния различных условий нагружения, концепция тела с опасным объемом представляет собой удобный и эффективный инструмент исследователя. Анализ повреждаемости многокомпонентной системы позволяет проводить оптимизацию условий нагружения. Как показывают экспериментальные исследования на циклическую усталость, комбинация внешних действующих нагрузок позволяет снизить показатели повреждаемости и, тем самым, увеличить срок службы как отдельных элементов, так и всей системы [1, 2]. Теоретическое обоснование данного явления можно найти в работе [3]. Изучению и обоснованию концепции твердого тела с опасным объемом посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в статьях [4, 5].

Повреждаемость и ее определение. Рассмотрим твердое деформируемое тело (систему тел). В пространственном случае распределение полей напряжений описывается функциями $\sigma_{ij} = f_{ij}(x, y, z)$, где $i, j = 1, 2, 3$, $x, y, z \in R$. Выбрав некоторое предельное напряжение σ_{lim} , можно записать неравенство для определения повреждаемой области твердого тела:

$$f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}. \quad (1)$$

Следует отметить, что предельные нормальные σ_{lim}^n и касательные напряжения σ_{lim}^t в работе [6] рекомендуется брать как 0,3 и 0,03 от максимального значения контактного давления p_0 соответственно, т. е.

$$\sigma_{lim}^n = 0,3p_0, \quad \sigma_{lim}^t = 0,03p_0.$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенству (1), определяет повреждаемую область или опасный объем твердого тела. В теории повреждаемости можно выделить 2 ключевых количественных показателя [3]:

– опасный объем, который определяется по формуле

$$V = \int_{\Omega} dV, \quad (2)$$

где

$$dV = \begin{cases} dx dy dz, & f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}, \\ 0, & f_{ij}(x, y, z) < \sigma_{lim}, \end{cases} \quad (3)$$

где dx, dy, dz – стороны элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности исследуемой точки;

– интегральная повреждаемость

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi dV, \quad (4)$$

где локальная повреждаемость в точке φ находится как отношение действующего напряжения σ_{ij} к предельному σ_{lim} , т. е. $\varphi = \sigma_{ij} / \sigma_{lim}$.

При вычислении количественных значений показателей повреждаемости исследователь сталкивается с двумя сложностями. Во-первых, необходимо провести оценку

напряженно-деформированного состояния системы взаимодействующих твердых тел, что зачастую в аналитическом случае невозможно и приходится применять численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). Во-вторых, даже если функции $f_{ij}(x, y, z)$ получены в аналитическом виде, то непосредственное их интегрирование по формулам (2) и (4) затруднено. Получить конечные формулы для вычисления опасного объема и интегральной повреждаемости можно лишь в простейших случаях геометрии деформируемого твердого тела и условий нагружения, например для толстой трубы подверженной кручению и/или температурному воздействию [7]. Для более сложных случаев могут быть применены методики основанные на численном анализе.

Подход основанный на построении расчетной сетки. После определения полей напряжений можно предложить следующий алгоритм:

- 1) определение границ области D , в которой содержится опасный объем Ω ;
- 2) построение по области D ортогональной расчетной сетки с шагами dx , dy , dz соответственно вдоль каждой из трех координатных осей;
- 3) расчет напряжений $\sigma_{ij}(A_k)$ в каждой точке A_k расчетной сетки, являющейся центром параллелепипеда со сторонами d_x , d_y , d_z ;
- 4) определение количества точек N , в которых действующие напряжения превышают предельные;
- 5) опасный объем V и интегральная повреждаемость Ψ определяются по формулам

$$V = N \frac{d_x \cdot d_y \cdot d_z}{V_D}, \quad \Psi = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{ij}(A_k)}{\sigma_{lim}} d_x \cdot d_y \cdot d_z,$$

где V_D – объем области D .

В работе (8) показана сходимость предложенного подхода для нескольких частных случаев нагружения упругого полупространства в комбинации с применением метода аналитического граничного элемента при численном расчете напряженно-деформированного состояния. Преимуществом данного подхода является достаточная простота алгоритмизации вычислений и легкое управление погрешностью оценки показателей повреждаемости. Однако, у подхода, основанного на построении расчетной сетки имеется существенный недостаток – длительное машинное время затрачиваемое на вычисление напряжений в каждом расчетном узле.

Аналогичный подход используется при вычислении повреждаемости методом конечных элементов, только в этом случае суммируются не объемы параллелепипедов со сторонами d_x , d_y , d_z , а объемы каждого конечного элемента, напряжения в которых превышают предельные. При конечно-элементном моделировании напряжения на элементе могут сравниваться с предельным по каждому узлу либо могут браться усредненные по всем узлам принадлежащим одному конечному элементу. В работе [9] применен выше-описанный подход для конечно-элементного моделирования контактной пары колесо/рельс и определения повреждаемости системы.

Подход основанный на методе Монте-Карло. При использовании данного подхода множество расчетных точек генерируется случайным образом из области D , в которой содержится опасный объем. Алгоритм можно представить как последовательность следующих шагов:

- 1) определение границ области D , в которой содержится опасный объем Ω ;
- 2) генерация случайным образом точек $A_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, N$) из области D . Для генерации могут использоваться различные распределения (равномерное, нормальное, распределение Пуассона и др.);
- 3) определение количества точек K , в которых действующие напряжения σ_{ij} превышают предельные σ_{lim} ($K < N$);

4) вычисление показателей повреждаемости по формулам

$$V = K \cdot dV, \quad \Psi = dV \cdot \sum_{i=1}^K \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{\text{lim}}}, \quad dV = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \cdot (z_2 - z_1)}{N}, \quad (5)$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – нижняя и верхняя, соответственно, границы области D вдоль каждой из трех координатных осей.

Методы Монте-Карло обеспечивают точность порядка C/\sqrt{N} , где N – число расчетных узлов и, согласно закону больших чисел, численные значения интегралов (2) и (4), полученные методом Монте-Карло, сходятся к точному значению при увеличении числа N [10].

На рис. 1 и 2 представлены графики опасного объема и интегральной повреждаемости полупространства от равномерно распределенной по квадрату со стороной $2a$ нагрузки интенсивности p_0 и направленной перпендикулярно ограничивающей плоскости полупространства вдоль оси Oz . Повреждаемость вычислялась по нормальным напряжениям σ_{zz} и эквивалентным (по Мизесу) напряжениям σ_{eqv} , соответственно. В качестве предельного значения для нормальных напряжений бралась величина $\sigma_{\text{lim}}^m = 0,3p_0$, а для эквивалентных – $\sigma_{\text{lim}}^{\text{eqv}} = 0,27p_0$ ($P = p_0a^2$) [8].

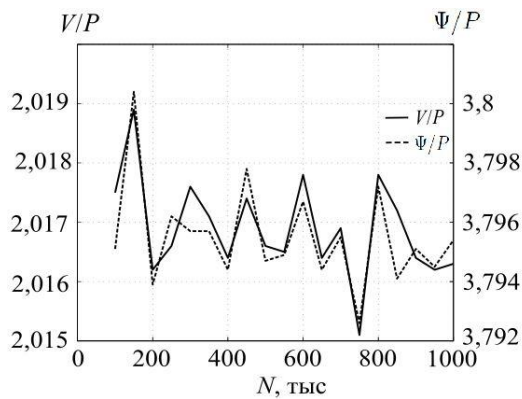


Рис. 1. Опасный объем и повреждаемость для нормальных напряжений

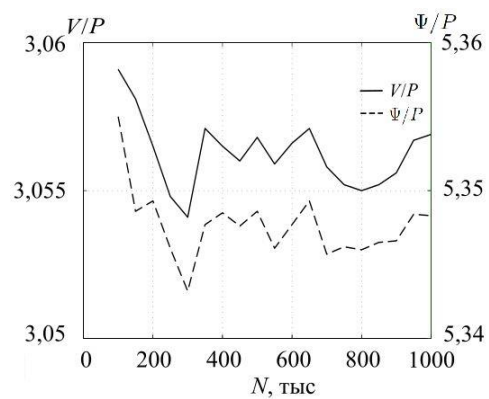


Рис. 2. Опасный объем и повреждаемость для эквивалентных (по Мизесу) напряжений

Как видно из представленных рисунков, при увеличении количества расчетных узлов (точек интегрирования) разброс значений уменьшается, а численная величина сходится к точной.

При использовании метода со случайной генерацией точек интегрирования, нет необходимости в дополнительном построении расчетной сетки и контроле, чтобы эта сетка полностью покрывала повреждаемую область твердого тела или системы твердых тел. К преимуществу данного метода также можно отнести простоту алгоритмизации вычислений. Недостатком метода Монте-Карло является длительное машинное время, необходимое на вычисление напряженного состояния в каждой точке интегрирования.

Здесь также стоит отметить, что, как и при построении расчетной сетки по деформируемой среде, так и при случайной генерации узлов интегрирования, напряжения в двух разных точках рассчитывается независимо, поэтому при оценке напряженно-деформированного состояния есть возможность применения технологий параллелизации вычислений для ускорения и снижения затрат машинного времени. В работе [11] показано, что использование технологии CUDA при гранично-элементном моделировании напряженного состояния тела, коэффициент ускорения вычислений может достигать до 25.

Подход, основанный на модели логистической регрессии. Численные подходы оценки повреждаемости среды по формулам (2) и (4) основываются на предварительном

вычислении напряженного состояния в выбранном узле. В случае, если действующее напряжение превышает предельное, то кумулятивная величина опасного объема увеличивается на значение dV , где dV – конечный объем области, выделенной в окрестности расчетного узла. В случае же, если действующее напряжение меньше предельного, то переходим к следующей точке интегрирования. Таким образом, напряженное состояние рассчитывается в каждой точке, но в расчет повреждаемости входят только те, напряжение в которых удовлетворяет условию $f_{ij}(x, y, z) \geq \sigma_{lim}$.

Алгоритмический подход, использующий модель логистической регрессии, основывается на аппроксимации бинарной функции

$$\delta(A) = \begin{cases} 0, & A \in \Omega, \\ 1, & A \notin \Omega, \end{cases} \quad (6)$$

логит-функцией

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\right)}, \quad (7)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ – вектор значений; $\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ – вектор коэффициентов.

Функция (7) определяет вероятность попадания расчетной точки в повреждаемую область. Пороговым значением для бинарного определения принадлежности области является значение $P(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0,5$. Применение логит-модели к вычислению показателей повреждаемости твердого тела можно представить в виде следующего алгоритма действий:

1) определение границ области D , такой что повреждаемая область Ω должна содержаться в D , т. е. $\Omega \subset D$;

2) генерация множества размера n расчетных точек из области D . Множество может формироваться случайным образом, так и быть упорядоченным по какому-либо признаку.

3) Для множества расчетных точек провести бинарную классификацию на принадлежность к повреждаемой области;

4) формирование обучающей выборки (\mathbf{x}_i, δ_i) , $i = 1, \dots, N$ и оценка коэффициентов логит-модели. Оценку вектора коэффициентов \mathbf{a} можно проводить одним из известных методов, однако, наиболее часто используется метод максимального правдоподобия [12];

5) оценка качества построенной логит-модели. Для оценки качества бинарных классификаторов, как правило, применяют ROC-анализ [13];

6) в случае удовлетворительно качества, генерация множества \bar{N} ($\bar{N} \ll N$) и применение логит-модели для количественной оценки повреждаемости твердого тела.

Непосредственное применение логит-модели предполагает линейную разделимость данных, к которым она применяется. Геометрия опасного объема имеет нелинейную форму, например для системы ролик/вал повреждаемая область имеет вид, представленный на рис. 3 [14]. В случае линейной неразделимости, к исходным данным применяется классифицирующая функция. На практике наиболее часто применяются следующие классифицирующие функции [12]:

– полиномиальная функция степени d : $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)^d$, $c = \text{const}$;

– радиальная базисная функция: $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-\gamma \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2)$, $\gamma > 0$;

– сигмоидальная функция: $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \tanh(k \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)$, $k > 0$, $c < 0$.

Модель логистической регрессии была применена к нахождению повреждаемой области полупространства при действии на него нормально распределенной нагрузки вида

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2},$$

где p_0 – максимальное давление в центре распределения; a и b – значения полуосей эллиптической площадки распределения.

На рис. 4 показана точность классификации точек интегрирования по принадлежности к повреждаемой области полупространства. В каждом из случаев генерировалось случайным образом 10 наборов расчетных точек. Как видно из рис. 4, при увеличении количества точек, разброс в точности бинарной классификации снижается и для обучающей выборки равной 5000 точек, точность находится в пределах от 95,5 % до 96,5 %. Исходя из экспертной шкалы, принятой в научной литературе [13], качество построенной модели логистической регрессии можно отнести к «очень хорошему».

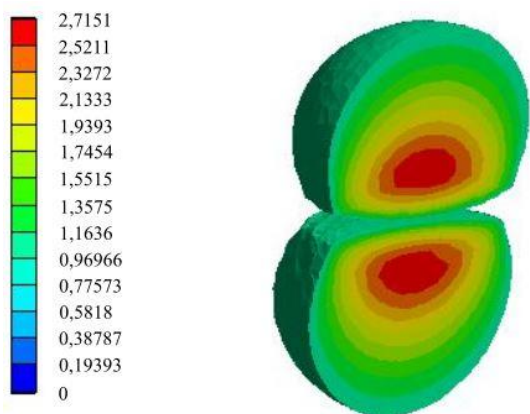


Рис. 3. Геометрия опасного объема в системе ролик/вал

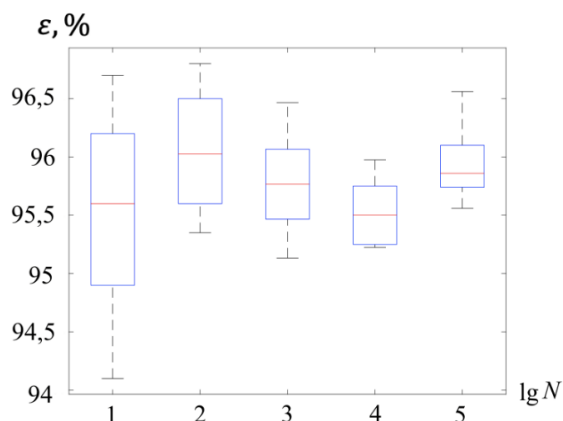


Рис. 4. Точность логит-модели по определению принадлежности к опасному объему

Для получения линейно разделимого множества точек, была применена полиномиальная функция степени 0,5 с постоянной c равной 0.

Недостатком применения метода логистической регрессии является относительная сложность алгоритмизации вычислительных процедур и оценка их эффективности. Преимуществом же данного метода является возможность значительного ускорения вычислений, т. к. для каждой точки интегрирования по простой формуле (7) определяется вероятность принадлежности ее к опасному объему и нет необходимости в определении точного значения напряжения в этой точке.

Выводы. Вычисление количественных показателей повреждаемости твердого деформируемого тела (системы тел) в аналитическом виде возможно только для простейших случаев геометрии и нагружения тела (системы тел). При конечно-элементном моделировании напряженно-деформированного состояния опасный объем определяется как сумма объемов каждого конечного элемента, в узлах которого действующие напряжения превышают предельные. При аналитическом или численно-аналитическом определении напряженного состояния, например методом граничных интегральных уравнений или методом граничных элементов, для количественной оценки величин опасного объема и интегральной повреждаемости может быть применен один из вышеописанных алгоритмов либо их комбинация. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки по затратам машинного времени и точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л. А. Экспериментальное построение полной кривой контактной усталости пары «высокопрочный чугун ВЧТГ / сталь 18ХГТ» и ее анализ / Л. А. Сосновский, В. В. Комиссаров, Е. С. Таранова, С. А. Тюрин // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 1(26). – С. 32–39.

2. Таранова, Е. С. Некоторые результаты натуральных испытаний эпициклических шестерен МК-23.М03.661 / Е. С. Таранова, В. О. Замятин, В. В. Комиссаров // Материалы. Технологии. Инструмент. – 2013. – Т. 18. – № 1. – С. 86–91.
3. Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
4. Sosnovskiy, L. A. Methods and main results of Tribo-Fatigue tests / A. Sosnovskiy [et al.] // International Journal of Fatigue. – 2014. – Vol. 66. – P. 207–219.
5. Щербаков, С. С. Механотермодинамика: основные результаты и перспективы / С. С. Щербаков // Актуальные вопросы машиноведения. – Вып. 9. – Мн.: ОИМ, 2020. – С. 13–17.
6. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
7. Мармыш, Д. Е. Повреждаемость толстостенного цилиндра для различных типов граничных условий / Д. Е. Мармыш // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. – 2020. – С. 64–69.
8. Мармыш Д. Е. Сходимость метода аналитического граничного элемента при анализе напряженного состояния и состояния повреждаемости среды / Д. Е. Мармыш // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика». – Вып. 35. – Мн.: БНТУ, 2020. – С. 92–98.
9. Щербаков С. С. Напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость в окрестности контактного взаимодействия в трибофатической системе колесо / рельс с учетом неконтактного деформирования рельса / С. С. Щербаков, О. А. Насань // Вестник БелГУТа: Наука и транспорт. – 2016. – № 1(32). – С. 234–247
10. Rubinstein, R. Y. Simulation and the Monte-Carlo method / R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese. – 3rd edition. – Wiley: NY, 2016. – 372 p.
11. Щербаков, С. С. Ускорение гранично-элементных расчетов с помощью графического акселератора для элементов с нелинейными функциями формы / С. С. Щербаков, М. М. Полещук // Механика машин, механизмов и материалов. – 2019. – № 4(49). – С. 89–94.
12. Hosmer, D. W. Applied logistic regression / D. W. Hosmer, S. Lemeshow. – 2nd edition. – Wiley: NY, 2000. – 375 p.
13. Kumari, R. Machine learning: a review on binary classification / R. Kumari, S. K. Srivastava // Int. J. of Computer Applications. – 2017. – Vol. 160, iss. 7. – P. 11–15.
14. Мармыш, Д. Е. Пространственное напряженно-деформированное состояние и объемная повреждаемость системы «ролик-вал» / Д. Е. Мармыш // Актуальные вопросы машиноведения. – 2015. – № 4. – С. 248–251.

Поступила: 30.01.2021