УДК 621.762.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Дудяк А. И., Дикан Ж. Г., Мелеховец П. А., Миношин В. В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Изучение деформаций при поперечном изгибе стержней – это определение прогибов и углов поворота сечений. При поперечном изгибе стержней из однородных материалов силовая плоскость проходит через одну из главных центральных осей, а вторая ось совпадает с нейтральным слоем. Главными центральными осями называются оси проходящие через центр тяжести сечения и относительно которых центробежный момент инерции равен нолю.

Уравнение для определения углов поворота сечений θ представляет вид:

$$\theta = \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} dz + C. \tag{1}$$

Интегрируя еще раз уравнение (1) получают формулу для определения прогибов:

$$\mathrm{y} = \int dz \int \frac{M_{(z)}}{EJ_{(x)}} dz + cz + d. \tag{2}$$

Произвольные постоянные C и d определяют из условий закрепления стержней. Произведение $E \cdot J$ называют жесткостью сечения стержня при изгибе.

При осевом растяжении размеры стержня меняются в осевом направлении и зависят от величины прикладываемой нагрузки F и от жесткости сечения стержня. Абсолютное удлинение стержня длиной l определяют из выражения $|1 \div 3|$.

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}. \tag{3}$$

Произведение $\mathrm{E} \cdot \mathrm{A}$ называют жесткостью сечения стержня при осевом растяжении или сжатии. Для сечения из однородного материала статические моменты жесткости относительно осей x и y будут равны:

$$E\mathcal{s}_x = E \cdot A \cdot \mathrm{y_c}\,; \quad \mathrm{E}\mathcal{s}_\mathrm{y} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{x_c}, \tag{4}$$

где $\mathrm{x_c}$ и $\mathrm{y_c}$ – координаты центра тяжести сечения относительно осей x и y;

$\mathcal{s}_\mathrm{x} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{y_c}$ и $\mathcal{s}_\mathrm{y} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{x_c}$ – статические моменты площади сечения относительно координатных осей x и y.

Очевидно, если стержень состоит из ряда стержней из разнородных материалов прочно соединенных между собой по длине, то жесткость сечения при осевом растяжении-сжатии и изгибе следует определять иным способом.

Рассмотрим поперечное сечение стержня, состоящее из двух разнородных материалов прочно соединенных между собой и отличающихся друг от друга модулями продольной упругости E_1 и E_2 (рис. 1).

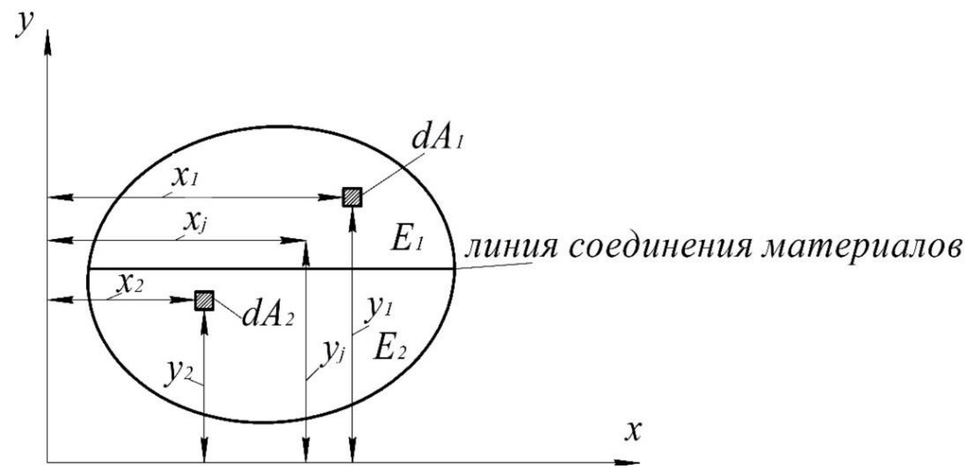

Рис. 1. Поперечное сечение стержня, составленное из двух разнородных материалов

В сечении выделим элементы бесконечно малых площадей $\mathrm{d}A_1$ и $\mathrm{d}A_2$ с координатами x_1 и y_1, x_2 и y_2. Для данного сечения статические моменты жесткости будут равны:

$$(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{x}})_{\mathrm{c}} = E_1 \int\limits_{A_1} \mathrm{y}_1 \cdot dA_1 + E_2 \int\limits_{A_2} \mathrm{y}_2\, dA_2; \tag{5}$$

$$(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{y}})_{\mathrm{c}} = E_1 \int\limits_{A_1} \mathrm{x}_1 \cdot dA_1 + E_2 \int\limits_{A_2} \mathrm{x}_2\, dA_2. \tag{6}$$

Интегралы представляют статические моменты площадей отдельных частей поперечного сечения $\mathscr{s}_{\mathrm{x}}$ и $\mathscr{s}_{\mathrm{y}}$. Если известны координаты центров тяжести отдельных частей сечения $\mathrm{x}_{\mathrm{c}1}, \mathrm{y}_{\mathrm{c}1}$ и $\mathrm{x}_{\mathrm{c}2}, \mathrm{y}_{\mathrm{c}2}$, то формулы (5) и (6) можно представить в виде:

$$(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{x}})_{\mathrm{c}} = \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{y}_{\mathrm{c}1} + \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{y}_{\mathrm{c}2}; \tag{7}$$

$$(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{y}})_{\mathrm{c}} = \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{x}_{\mathrm{c}1} + \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{x}_{\mathrm{c}2}. \tag{8}$$

В зависимости от знаков координат $\mathrm{x}_{\mathrm{c}1}, \mathrm{y}_{\mathrm{c}1}$ и $\mathrm{x}_{\mathrm{c}2}, \mathrm{y}_{\mathrm{c}2}$ суммарная жесткость сечения может быть больше или меньше поля, а значит для любого сечения можно определить также координаты x_j и y_j относительно которых суммарные моменты жесткости будут равны нулю. Начало таких координат будет называться центром жесткости сечения. Допустим, что известны координаты центра жесткости сечения x_j и y_j относительно первоначальных осей x и y. в этом случае выражения (7) и (8) можно представить в виде:

$$(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{x}})_{\mathrm{c}} = (\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{A}_1 + \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{A}_2)\mathrm{y}_j; \tag{9}$$

$$\big(\mathrm{E}\mathscr{s}_{\mathrm{y}})_{\mathrm{c}} = \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{A}_1 + \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{A}_2\big)\mathrm{x}_j, \tag{10}$$

где $(E_1A_1 + E_2A_2) = (E_iA_i)_c$ – суммарная жесткость сечения при осевом растяжении–сжатии.

Координаты центра жесткости сечения относительно произвольных осей x и y будут равны:

$$\mathrm{x}_j = \frac{(E_i\mathscr{s}_{xi})_c}{(E_iA_i)_c}; \quad \mathrm{y}_j = \frac{(E_i\mathscr{s}_{yi})_c}{(E_iA_i)_c}. \tag{11}$$

Следует заметить, если материал стержня однороден, то есть $E_1 = E_2 = E$, то полученные выражения (11) будут соответствовать известным формулам из курса сопротивления материалов для определения координат центра тяжести сечения.

Рассмотрим методы определения суммарных жесткостей сечения при изгибе $E{\cdot}J$ (рис. 1). Для данного сечения осевые суммарные жесткости $(E{\cdot}J_x)_c$ и $(E{\cdot}J_y)_c$ относительно осей x и y можно представить в виде формул:

$$(\mathrm{E}J_{\mathrm{x}})_{\mathrm{c}} = E_1 \int_{A_1} \mathrm{y}_1^2 \cdot dA_1 + E_2 \int_{A_2} \mathrm{y}_2^2\, dA_2. \tag{12}$$

$$(\mathrm{E}J_{\mathrm{y}})_{\mathrm{c}} = E_1 \int\limits_{A_1} \mathrm{x}_1^2 \cdot dA_1 + E_2 \int\limits_{A_2} \mathrm{x}_2^2\, dA_2. \qquad (13)$$

Суммарная центробежная жесткость сечения $(E{\cdot}J_{xy})_c$ может иметь вид:

$$(\mathrm{E}J_{\mathrm{xy}})_{\mathrm{c}} = E_1 \int\limits_{A_1} \mathrm{x}_1\mathrm{y}_1 \cdot dA_1 + E_2 \int\limits_{A_2} \mathrm{x}_2\mathrm{y}_2\, dA_2. \qquad (14)$$

Интегралы в формулах (12) и (13) представляют собой осевые моменты инерции частей сечения, а в формуле (14) – центробежные моменты инерции. Поэтому формулы (12)–(14) можно представить в виде:

$$(\mathrm{E}J_x)_c = E_1 \cdot J_{x1} + E_2 J_{x2}; \qquad (15)$$

$$(\mathrm{E}J_{\mathrm{y}})_c = E_1 \cdot J_{\mathrm{y}1} + E_2 J_{\mathrm{y}2}; \qquad (16)$$

$$(\mathrm{E}J_{x\mathrm{y}})_c = E_1 \cdot J_{x1\mathrm{y}1} + E_2 J_{x2\mathrm{y}2}. \qquad (17)$$

Если стержень собран из n стержней из различных материалов, то формулы (15)–(17) можно представить в виде:

$$(\mathrm{E}J_x)_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xi}; \quad (EJ_{\mathrm{y}})_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{\mathrm{y}i}; \quad (EJ_{x\mathrm{y}})_c = \sum_{i=1}^{n} E_i J_{xi\mathrm{y}i}\ . \qquad (18)$$

Выводы. Суммарные осевые жесткости сечений всегда будут положительны, а центробежная суммарная жесткость может быть положительной, отрицательной и иметь нулевое значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – Москва: Наука, 1972. – 541 с.

2. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев: Техника, 1967. – 783 с.

3. Татур, Г. К. Общий курс сопротивления материалов / Г. К. Татур. – Минск: «Вышэйшая школа», 1974. – 462 с.

Поступила: 31.01.2021