УДК 534.121.1

ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Маркова М. В., Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Применение трехслойных конструкций в различных областях строительства и промышленности обусловлено их оптимальными механическими, теплотехническими и эксплуатационными свойствами. При работе трехслойной конструкции, содержащей жесткие и прочные внешние несущие слои и легкий срединный заполнитель, отмечаются хорошие прочностные и жесткостные показатели всей системы в целом при минимуме ее весовых характеристик. Ввиду этого становится очевидной необходимость разработки эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния данного вида конструкций.

Статическое и динамическое деформирование круговых трехслойных пластин уже было исследовано в работах многочисленных авторов. Так, к примеру, статическое деформирование подробно рассматривалось в работах [1–6], поперечные колебания – в работах [7–10]. Однако, все перечисленные исследования посвящены круговым трехслойным пластинам, имеющим постоянную толщину. Исследование работы трехслойной круговой пластины переменной толщины проводилось лишь для статического деформирования [11], в данной статье будут рассмотрены динамические аспекты.

Гипотезы. Рассмотрим вывод системы уравнений, описывающей вынужденные поперечные колебания круговой трехслойной пластины, состоящей из несимметричных тонких несущих слоев переменной толщины (слои 1 и 2) и толстого легкого заполнителя постоянной толщины (слой 3). Общий вид рассматриваемой пластины приведен на рисунке 1, *а*.

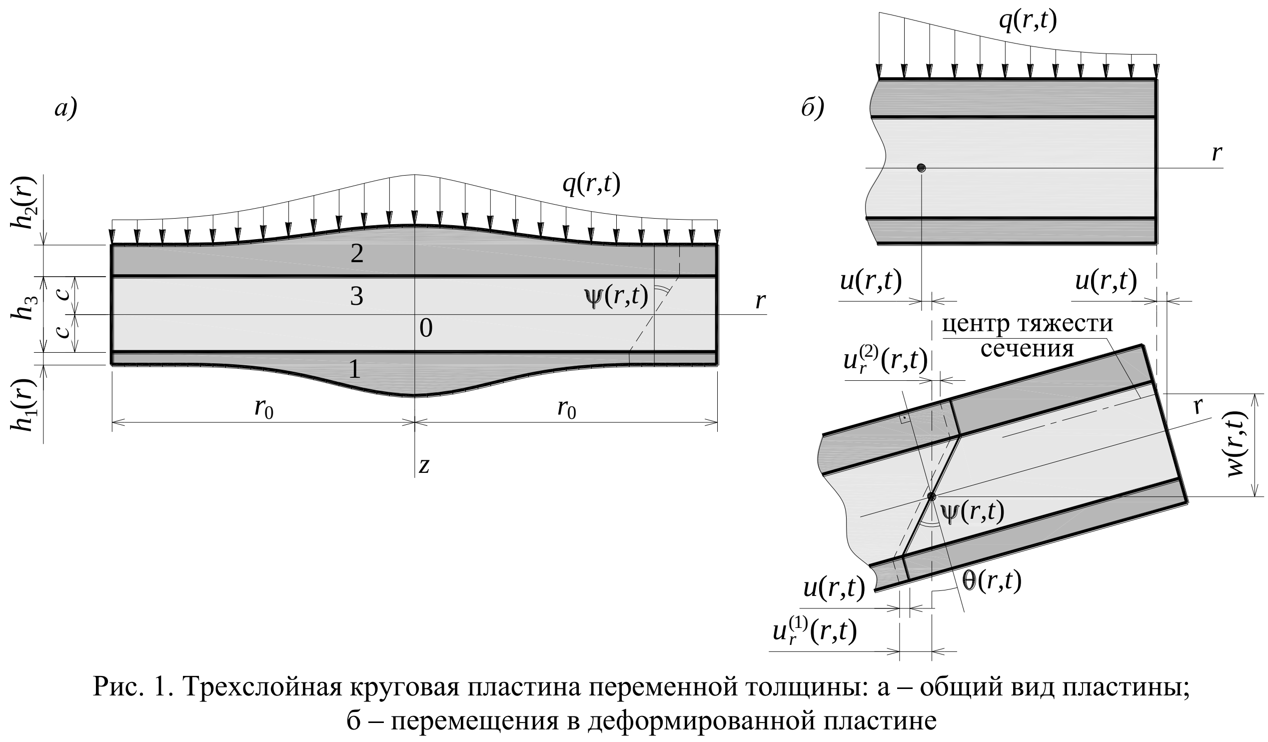

Рис. 1. Трехслойная круговая пластина переменной толщины: а – общий вид пластины; б – перемещения в деформированной пластине

Задачу рассматриваем в цилиндрической системе координат. Срединную плоскость заполнителя (слоя 3) принимаем за координатную ось r. Ось z поводим вниз перпендикулярно срединной плоскости заполнителя. Через h_k обозначена толщина k-го слоя, причем толщины несущих слоев переменны вдоль радиуса пластины ($h_1 = h_1(r)$ и $h_2 = h_2(r)$), а толщина заполнителя постоянна ($h_3 = 2c = \text{const}$). В дальнейшем для краткости толщину слоев переменной толщины будем обозначать как h_1 и h_2.

Для описания кинематики всего пакета из трех слоев будем использовать гипотезу «ломаной» нормали. В тонких изотропных несущий слоях 1 и 2 будет справедлива гипотеза «прямой» нормали, то есть нормаль к срединной поверхности при изгибе пластины повернется на некоторый угол θ, но останется прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной плоскости. В толстом легком заполнителе 3 при этом нормаль также оставаясь прямолинейной и не меняет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ [12, 13] (рисунок 1, *б*).

На внешний слой 2 пластины действует произвольная осесимметричная вертикальная распределенная нагрузка, не зависящая от координаты φ, то есть $q = q(r,t)$. В этом случае прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u также не будут зависеть от координаты φ, то есть $w = w(r,t)$, $\psi = \psi(r,t)$, $u = u(r,t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Тангенциальные перемещения в слоях в силу симметрии задачи будут отсутствовать, то есть $u_\varphi = 0$. Все деформации пластины от действующей внешней нагрузки считаем малыми. Работой легкого заполнителя в тангенциальном направлении пренебрегаем [13].

На границе контакта слоев пластины будем использовать условие непрерывности перемещений, то есть считаем, что пластина не имеет расслоений и работает без проскальзывания между слоями. На контуре пластины предполагаем наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев, то есть на контуре пластины $\psi = 0$.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя и соотношения Коши получаем

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\left(u_r^{(3)},_z + w,_r\right), \tag{1}$$

здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

После интегрирования выражения (1) по толщине всего пакета получаем выражения для определения радиальных перемещений в слоях пластины через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw,_r \quad (\text{при } c < z \le c + h_1); \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw,_r \quad (\text{при } -c \le z \le c); \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw,_r \quad (\text{при } -c - h_2 \le z < -c), \end{aligned} \tag{2}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; $u \pm c\psi$ – величина смещения внешних слоев 1 и 2 за счет деформации заполнителя 3.

Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в слоях пластины:

$$T_\alpha = \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \quad M_\alpha = \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right). \tag{3}$$

Вывод уравнений движения. Уравнения движения получим из вариационного принципа Гамильтона [14], согласно которому переход системы из одного возможного состояния в другое за любой промежуток времени происходит таким образом, что функционал действия по Гамильтону δS принимает стационарное значение, то есть

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(K-W+A\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta K-\delta W+\delta A\right)dt=0, \tag{4}$$

где δK – вариация кинетической энергии всей системы; δW – вариация потенциальной энергии деформации всей системы; $\delta A=\delta A_1+\delta A_2$ – суммарная вариация работ всех, действующих на систему, внешних сил и контурных усилий:

$$\delta A=\iint\limits_{r\ \varphi}\left(q\delta w\right)rdrd\varphi+r\int_0^{2\pi}\left(T_r^0\delta u+H_r^0\delta\psi+M_r^0\delta w,_r+Q_r^0\delta w\right)d\varphi.$$

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta W=\iint\limits_{r\ \varphi}\left[\sum_{k=1}^{3}\int_{h_k}\left(\sigma_r^{(k)}\delta\varepsilon_r^{(k)}+\sigma_\varphi^{(k)}\delta\varepsilon_\varphi^{(k)}\right)dz\right]rdrd\varphi. \tag{5}$$

Вариация кинетической энергии

$$\delta K=\sum_{k=1}^{3}\delta K^{(k)}=\iint\limits_{r\ \varphi}\left[\sum_{k=1}^{3}\frac{\rho_k}{2}\int_{h_k}\delta\left(\left(\dot u_r^{(k)}\right)^2+\dot w^2\right)dz\right]rdrd\varphi, \tag{6}$$

здесь ρ_k – плотность материала k-го слоя.

Использовав перемещения (2) и соотношения Коши [14], выразим интегралы в (5) через внутренние усилия (3)

$$\begin{gathered}\delta W=\int_\varphi\left[rT_r\delta u+rH_r\delta\psi-rM_r\delta w,_r+\left(\left(rM_r\right),_r-M_\varphi\right)\delta w\right]d\varphi-\\ -\iint\limits_{r\ \varphi}\left[\left(\left(rT_r\right),_r-T_\varphi\right)\delta u+\left(\left(rH_r\right),_r-H_\varphi\right)\delta\psi+\left(\left(rM_r\right),_{rr}-M_\varphi,_r\right)\delta w\right]drd\varphi.\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим по слоям суммарный интеграл, входящий в выражение (6).

$$\begin{gathered}\frac{\rho_1}{2}\int_c^{c+h_1}\delta\left(\left(\dot u_r^{(1)}\right)^2+\dot w^2\right)dz=\frac{\rho_1}{2}\int_c^{c+h_1}\left(2\dot u_r^{(1)}\delta\dot u_r^{(1)}+2\dot w\delta\dot w\right)dz=\\ =h_1\rho_1\left[\dot u+c\dot\psi-\left(c+\frac{h_1}{2}\right)\dot w,_r\right]\delta\dot u+h_1\rho_1\left[\dot u+c\dot\psi-\left(c+\frac{h_1}{2}\right)\dot w,_r\right]c\delta\dot\psi-\\ -h_1\rho_1\left[\left(c+\frac{h_1}{2}\right)\dot u+\left(c+\frac{h_1}{2}\right)c\dot\psi-\left(c^2+h_1c+\frac{h_1^{\,2}}{3}\right)\dot w,_r\right]\delta\dot w,_r+h_1\rho_1\dot w\delta\dot w\,;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_2}{2}\int_{-c-h_2}^{-c}\delta\left(\left(\dot u_r^{(2)}\right)^2+\dot w^2\right)dz=h_2\rho_2\left[\dot u-c\dot\psi+\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\dot w,_r\right]\delta\dot u-h_2\rho_2\left[\dot u-c\dot\psi+\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\dot w,_r\right]c\delta\dot\psi+\\ +h_2\rho_2\left[\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\dot u-\left(c+\frac{h_2}{2}\right)c\dot\psi+\left(c^2+h_2c+\frac{h_2^{\,2}}{3}\right)\dot w,_r\right]\delta\dot w,_r+h_2\rho_2\dot w\delta\dot w\,;\end{gathered}$$

$$\frac{\rho_3}{2}\int_{-c}^{c}\delta\left(\left(\dot u_r^{(3)}\right)^2+\dot w^2\right)dz=2c\rho_3\dot u\delta\dot u+2c\rho_3\left[\frac{c}{3}\dot\psi-\frac{c}{3}\dot w,_r\right]c\delta\dot\psi-2c\rho_3\left[\frac{c^2}{3}\dot\psi-\frac{c^2}{3}\dot w,_r\right]\delta\dot w,_r+2c\rho_3\dot w\delta\dot w.$$

Тогда выражение для вариации кинетической энергии примет вид

$$\delta K=\iint\limits_{r\,\varphi}\Bigg(\Bigg[\big(h_1\rho_1+h_2\rho_2+2c\rho_3\big)\dot u+c\big(h_1\rho_1-h_2\rho_2\big)\dot\psi-\left(h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)-h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right)\dot w,_r\Bigg]r\delta\dot u+$$

$$+\Big[c\big(h_1\rho_1-h_2\rho_2\big)\dot u+c^2\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+\frac{1}{3}2c\rho_3\right)\dot\psi-c\left(h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)+h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{c}{3}2c\rho_3\right)\dot w,_r\Big]r\delta\dot\psi-\left[\left(h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)-h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right)\dot u+c\left(h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)+h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{c}{3}2c\rho_3\right)\dot\psi-\left(h_1\rho_1\left(c^2+h_1c+\frac{h_1^{\,2}}{3}\right)+h_2\rho_2\left(c^2+h_2c+\frac{h_2^{\,2}}{3}\right)+\frac{c^2}{3}2c\rho_3\right)\dot w,_r\right]r\delta\dot w,_r+$$

$$+\big(h_1\rho_1+h_2\rho_2+2c\rho_3\big)\dot w r\delta\dot w\Bigg)drd\varphi.$$

Для удобства дальнейших преобразований примем следующие обозначения:

$$M_1=h_1\rho_1+h_2\rho_2+2c\rho_3=\sum_{k=1}^{3}h_k\rho_k;\quad M_2=c\big(h_1\rho_1-h_2\rho_2\big);$$

$$M_3=h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)-h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right);$$

$$M_4=c^2\left(h_1\rho_1+h_2\rho_2+\frac{1}{3}2c\rho_3\right);\quad M_5=c\left(h_1\rho_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)+h_2\rho_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)+\frac{c}{3}2c\rho_3\right);$$

$$M_6=h_1\rho_1\left(c^2+h_1c+\frac{h_1^{\,2}}{3}\right)+h_2\rho_2\left(c^2+h_2c+\frac{h_2^{\,2}}{3}\right)+\frac{c^2}{3}2c\rho_3.$$

В этом случае, после математических преобразований, выражение для вариации кинетической энергии примет вид

$$\begin{gathered}\delta K=\iint\limits_{r\,\varphi}\Big[\big(M_1\dot u+M_2\dot\psi-M_3\dot w,_r\big)r\delta\dot u+\big(M_2\dot u+M_4\dot\psi-M_5\dot w,_r\big)r\delta\dot\psi+\\+\Big(\big(M_3,_r r+M_3\big)\dot u+\big(M_5,_r r+M_5\big)\dot\psi-\\-\big(M_6,_r r+M_6\big)\dot w,_r+M_3r\dot u,_r+M_5r\dot\psi,_r-M_6r\dot w,_{rr}+M_1r\dot w\Big)\delta\dot w\Big]drd\varphi-\\-\int\limits_{\varphi}\big(M_3\dot u+M_5\dot\psi-M_6\dot w,_r\big)r\delta\dot w d\varphi.\end{gathered}\tag{8}$$

С учетом выражений (7) и (8) функционал действия по Гамильтону (4) примет вид:

$$\begin{gathered}\delta S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\varphi}\Big[rT_r^0\delta u+rH_r^0\delta\psi+rM_r^0\delta w,_r+rQ_r^0\delta w-\big(M_3\dot u+M_5\dot\psi-M_6\dot w,_r\big)r\delta\dot w-rT_r\delta u-\\-rH_r\delta\psi+rM_r\delta w,_r-\big(\big(rM_r\big),_r-M_\varphi\big)\delta w\Big]d\varphi dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\iint\limits_{r\,\varphi}\Big[rq\delta w+\big(M_1\dot u+M_2\dot\psi-M_3\dot w,_r\big)r\delta\dot u+\\+\big(M_2\dot u+M_4\dot\psi-M_5\dot w,_r\big)r\delta\dot\psi+\Big(\big(M_3,_r r+M_3\big)\dot u+\big(M_5,_r r+M_5\big)\dot\psi-\big(M_6,_r r+M_6\big)\dot w,_r+\\+M_3r\dot u,_r+M_5r\dot\psi,_r-M_6r\dot w,_{rr}+M_1r\dot w\Big)\delta\dot w+\big(\big(rT_r\big),_r-T_\varphi\big)\delta u+\big(\big(rH_r\big),_r-H_\varphi\big)\delta\psi+\\+\big(\big(rM_r\big),_{rr}-M_\varphi,_r\big)\delta w\Big]drd\varphi dt.\end{gathered}\tag{9}$$

Рассмотрим интегрирование по частям выражений, содержащих вариацию дифференциала по времени.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\dot u\delta\dot u dt=\dot u\delta u\Big|_{t_1}^{t_2}-\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta u du=\dot u\delta u\Big|_{t_1}^{t_2}-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ddot u\delta u dt=-\int\limits_{t_1}^{t_2}\ddot u\delta u dt.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как равна нулю вариация δu рассматриваемой функции $\delta u(t_1)=\delta u(t_2)=0$, что в свою очередь обусловлено тем, что значения функции на границе заданы. После аналогичных преобразований для всех, дифференцируемых по времени, вариаций угловых и линейных перемещений, выражение (9) примет следующий вид

$$\begin{gathered}
\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\varphi}\Big[rT_r^0\delta u+rH_r^0\delta\psi+rM_r^0\delta w,_r+rQ_r^0\delta w+\left(M_3\ddot{u}+M_5\ddot{\psi}-M_6\ddot{w},_r\right)r\delta w-rT_r\delta u-\\
-rH_r\delta\psi+rM_r\delta w,_r-\left(\left(rM_r\right),_r-M_\varphi\right)\delta w\Big]d\varphi dt+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{r\ \varphi}\left[rq\delta w-\left(M_1\ddot{u}+M_2\ddot{\psi}-M_3\ddot{w},_r\right)r\delta u-\right.\\
-\left(M_2\ddot{u}+M_4\ddot{\psi}-M_5\ddot{w},_r\right)r\delta\psi-\left(\left(M_3,_r r+M_3\right)\ddot{u}+\left(M_5,_r r+M_5\right)\ddot{\psi}-\left(M_6,_r r+M_6\right)\ddot{w},_r+\right.\\
\left.+M_5r\ddot{\psi},_r-M_6r\ddot{w},_{rr}+M_1r\ddot{w}\right)\delta w+\left(\left(rT_r\right),_r-T_\varphi\right)\delta u+\left(\left(rH_r\right),_r-H_\varphi\right)\delta\psi+\\
\left.+\left(\left(rM_r\right),_{rr}-M_\varphi,_r\right)\delta w\right]drd\varphi dt.
\end{gathered}\tag{10}$$

Выполнение равенства (10) при любых значениях варьируемых перемещений возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений движения в усилиях, описывающая колебания рассматриваемой пластины,

$$\begin{gathered}
T_r,_r+\frac{1}{r}\left(T_r-T_\varphi\right)-\left(M_1\ddot{u}+M_2\ddot{\psi}-M_3\ddot{w},_r\right)=0;\\
H_r,_r+\frac{1}{r}\left(H_r-H_\varphi\right)-\left(M_2\ddot{u}+M_4\ddot{\psi}-M_5\ddot{w},_r\right)=0;\\
M_r,_{rr}\frac{1}{r}\left(2M_r,_r-M_\varphi,_r\right)-\left(M_3,_r+\frac{M_3}{r}\right)\ddot{u}-\left(M_5,_r+\frac{M_5}{r}\right)\ddot{\psi}+\left(M_6,_r+\frac{M_6}{r}\right)\ddot{w},_r-\\
-M_3\ddot{u},_r-M_5\ddot{\psi},_r+M_6\ddot{w},_{rr}-M_1\ddot{w}=-q.
\end{gathered}\tag{11}$$

На контуре пластины $(r=r_0)$ при этом должны выполняться силовые условия

$$\begin{gathered}
T_r=T_r^0;\quad H_r=H_r^0;\quad M_r=M_r^0;\\
M_r,_r+\frac{1}{r}\left(M_r+M_\varphi\right)-M_3\ddot{u}-M_5\ddot{\psi}+M_6\ddot{w},_r=Q_r^0.
\end{gathered}\tag{12}$$

Уравнения движения в перемещениях. Предполагая, что связь напряжений и деформаций в слоях пластины описывается соотношениями линейной теории упругости, выразим внутренние усилия T_α, M_α и H_α через неизвестные искомые функции $u(r,t)$, $\psi(r,t)$ и $w(r,t)$.

$$\begin{gathered}
T_r=\sum_{k=1}^{3}K_k^+h_ku,_r+\sum_{k=1}^{3}K_k^-h_k\frac{u}{r}+c\left(K_1^+h_1-K_2^+h_2\right)\psi,_r+c\left(K_1^-h_1-K_2^-h_2\right)\frac{\psi}{r}-\\
-\left[K_1^+h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)-K_2^+h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right]w,_{rr}-\left[K_1^-h_1\left(c+\frac{h_1}{2}\right)-K_2^-h_2\left(c+\frac{h_2}{2}\right)\right]\frac{w,_r}{r}.
\end{gathered}\tag{13}$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u,_r + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} +$$
$$+ c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right] \psi,_r + c \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} K_3^- c^2 \right] \frac{\psi}{r} - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 \right] w,_{rr} - \quad (14)$$
$$- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^3 \right] \frac{w,_r}{r}.$$

$$H_r = c \left(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right) u,_r + c \left(K_1^- h_1 - K_2^- h_2 \right) \frac{u}{r} + c^2 \left(K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right) \psi,_r +$$
$$+ c^2 \left(K_1^- h_1 + K_2^- h_2 + \frac{2}{3} K_3^- c \right) \frac{\psi}{r} - - c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right) w,_{rr} - \quad (15)$$
$$- c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^- c^2 \right) \frac{w,_r}{r}.$$

В приведенных выражениях $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k$ и $K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k$.

Выражения для T_φ, M_φ и H_φ следуют из (13)–(15) при взаимной замене K_k^+ и K_k^-.

Формально данные выражения совпадают с усилиями в [13] для пластин постоянной толщины. Однако здесь величины h_1 и h_2 являются функциями от r.

Для удобства дальнейших расчетов введем следующие условные обозначения

$$a_1^\pm = \sum_{k=1}^{3} K_k^\pm h_k; \quad a_2^\pm = c \left(K_1^\pm h_1 - K_2^\pm h_2 \right); \quad a_3^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right);$$
$$a_4^\pm = c^2 \left(K_1^\pm h_1 + K_2^\pm h_2 + \frac{2}{3} K_3^\pm c \right); \quad a_5^\pm = c \left(K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^2 \right);$$
$$a_6^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} K_3^\pm c^3.$$

Тогда выражения для обобщенных внутренних усилий и моментов примут вид

$$\begin{aligned}
T_r &= a_1^+ u,_r + a_1^- \frac{u}{r} + a_2^+ \psi,_r + a_2^- \frac{\psi}{r} - a_3^+ w,_{rr} - a_3^- \frac{w,_r}{r}; \\
T_\varphi &= a_1^- u,_r + a_1^+ \frac{u}{r} + a_2^- \psi,_r + a_2^+ \frac{\psi}{r} - a_3^- w,_{rr} - a_3^+ \frac{w,_r}{r}; \\
H_r &= a_2^+ u,_r + a_2^- \frac{u}{r} + a_4^+ \psi,_r + a_4^- \frac{\psi}{r} - a_5^+ w,_{rr} - a_5^- \frac{w,_r}{r}; \\
H_\varphi &= a_2^- u,_r + a_2^+ \frac{u}{r} + a_4^- \psi,_r + a_4^+ \frac{\psi}{r} - a_5^- w,_{rr} - a_5^+ \frac{w,_r}{r}; \\
M_r &= a_3^+ u,_r + a_3^- \frac{u}{r} + a_5^+ \psi,_r + a_5^- \frac{\psi}{r} - a_6^+ w,_{rr} - a_6^- \frac{w,_r}{r}; \\
M_\varphi &= a_3^- u,_r + a_3^+ \frac{u}{r} + a_5^- \psi,_r + a_5^+ \frac{\psi}{r} - a_6^- w,_{rr} - a_6^+ \frac{w,_r}{r}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Подставив полученные выражения (16) в (11) получим систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания трехслойной пластины переменной толщины через перемещения

$$a_1^+L_2(u)+a_2^+L_2(\psi)-a_3^+L_2(w,_r)+a_1^+,_r u,_r+a_2^+,_r \psi,_r-a_3^+,_r w,_{rr}+a_1^-,_r \frac{u}{r}+$$

$$+a_2^-,_r \frac{\psi}{r}-a_3^-,_r \frac{w,_r}{r}-M_1\ddot{u}-M_2\ddot{\psi}+M_3\ddot{w},_r=0;$$

$$a_2^+L_2(u)+a_4^+L_2(\psi)-a_5^+L_2(w,_r)+a_2^+,_r u,_r+a_4^+,_r \psi,_r-a_5^+,_r w,_{rr}+a_2^-,_r \frac{u}{r}+$$

$$+a_4^-,_r \frac{\psi}{r}-a_5^-,_r \frac{w,_r}{r}-M_2\ddot{u}-M_4\ddot{\psi}+M_5\ddot{w},_r=0;$$

$$a_3^+L_3(u)+2a_3^+,_r L_2(u)+a_5^+L_3(\psi)+2a_5^+,_r L_2(\psi)-a_6^+L_3(w,_r)-2a_6^+,_r L_2(w,_r)+$$

$$+\left(a_3^+,_{rr}+\frac{a_3^-,_r}{r}\right)u,_r+\left(a_5^+,_{rr}+\frac{a_5^-,_r}{r}\right)\psi,_r-\left(a_6^+,_{rr}+\frac{a_6^-,_r}{r}\right)w,_{rr}+\left(a_3^-,_{rr}-\frac{a_3^+,_r}{r}\right)\frac{u}{r}+$$

$$+\left(a_5^-,_{rr}-\frac{a_5^+,_r}{r}\right)\frac{\psi}{r}-\left(a_6^-,_{rr}-\frac{a_6^+,_r}{r}\right)\frac{w,_r}{r}-\left[M_3,_r+\frac{M_3}{r}\right]\ddot{u}-\left[M_5,_r+\frac{M_5}{r}\right]\ddot{\psi}+ \qquad (17)$$

$$+\left[M_6,_r+\frac{M_6}{r}\right]\ddot{w},_r-M_3\ddot{u},_r-M_5\ddot{\psi},_r+M_6\ddot{w},_{rr}-M_1\ddot{w}=-q.$$

Здесь $L_2(g)\equiv\left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r\equiv g,_{rr}+\frac{g,_r}{r}-\frac{g}{r^2};\quad L_3(g)\equiv\frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r\equiv g,_{rrr}+\frac{2g,_{rr}}{r}-\frac{g,_r}{r^2}+\frac{g}{r^3}.$

В качестве начальных $(t=0)$ примем условия

$$w(r,\ 0)=f_1(r);\quad \dot{w}(r,\ 0)=f_2(r). \qquad (18)$$

Выводы. Таким образом, полученная система дифференциальных уравнений (17) совместно с начальными (18) и граничными (12) условиями позволяет описывать поперечные колебания круговых трехслойных пластин переменной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, А. Н. Осесимметричное выпучивание трехслойных круговых пластин / А. Н. Андреев // Динамика сплошной среды. – 1984. – № 66. – С. 3–11.
2. Горшков, А. Г. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А. Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – Т. 2, № 1. – С. 16–22.
3. Захарчук, Ю. В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2018. – Вып. 33. – С. 363–369.
4. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2017. – Вып. 32. – С. 235–240.
5. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.
6. Старовойтов, Э. И. Деформирование упругопластической круговой трехслойной пластины на основании Винклера при термосиловом нагружении / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко // Проблемы прочности. – 2007. – № 5. – С. 68–80.
7. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 59–63.
8. Леоненко, Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – Т. 5, № 3. – С. 42–47.

9. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых композитных пластин на упругом основании под действием локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Механика композитных материалов. – 2016. – Т. 52, № 5. – С. 943–954.

10. Старовойтов, Э. И. Резонансные колебания круговых композитных пластин на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, Д. В. Тарлаковский // Механика композитных материалов. – 2015. – Т. 51, № 5. – С. 793–806.

11. Парфенова, В. С. Деформирование круговой трехслойной пластины со ступенчато-переменной границей / В. С. Парфенов а // Механика. Исследования и инновации : междунар. сб. науч. тр. – Гомель, 2017. – № 10. – С. 157–163.

12. Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композитных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – Москва : Машиностроение, 1984. – 264 с.

13. Старовойтов, Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости : учеб. для студентов строительных спец. вузов / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.

14. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

Поступила: 28.01.2021