

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ КРИВОЙ АВТОМОБИЛЬНОГО ПУТИ С УЧЕТОМ МАЛОЙ СТЕПЕНИ ЕЕ ПОЛОГОСТИ

*Анципорович Владислав Витальевич, Ахалли Илья Саидович,
студенты 1-го курса*

*кафедры «Математические методы в строительстве»
(Научный руководитель – Акимов В.А., канд. техн. наук, доцент)*

Введение. Переходная кривая в дорожном строительстве служит для плавного соединения участков дорог разной кривизны. Под плавным соединением подразумевается такой переход, при котором (когда машина будет проезжать этот участок) она не почувствует толчка [1].

Предположим, что в соответствии с (Рис. 1), кривизна переходной кривой равномерно изменяется от нуля до $\frac{1}{R}$. Следовательно $\frac{1}{r} = ks$, где r - текущий радиус кривизны переходной кривой; k - коэффициент пропорциональности; s - длина дуги от начала переходной кривой $O(0;0)$ до текущей точки $M(x; y)$.

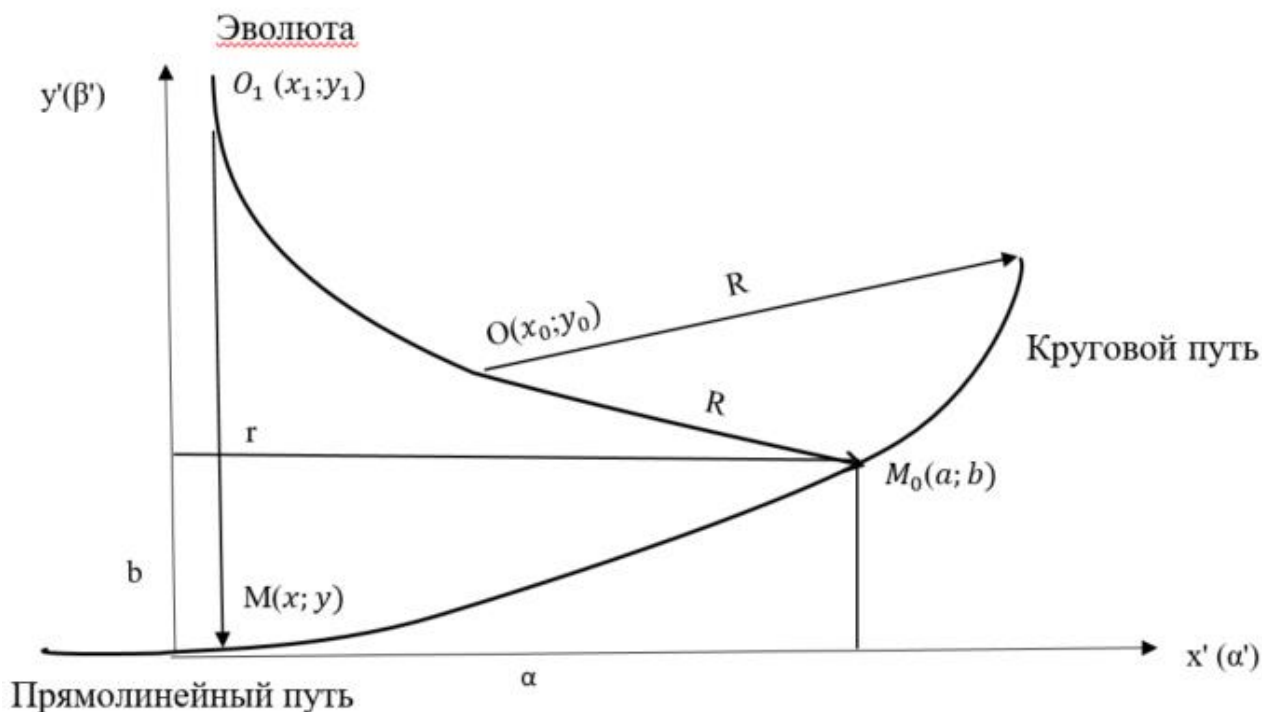


Рисунок 1 – кривизна переходной кривой

Коэффициент пропорциональности k определяется из условия $\frac{1}{r} = \frac{1}{R}$ при $s = l$. При этом точка центров кривизны переходной линии двигаясь по эволюте попадает в точку O и далее там будет находиться все время, так как далее точка будет двигаться по окружности, у которой радиус кривизны и центр кривизны – постоянны.

Тогда получим:
$$\frac{1}{r} = \frac{s}{Rl} \quad (1)$$

Введем коэффициент пологости (выпуклости) данной кривой соотношением вида: $l = \mu a$, где a - абсцисса конца переходной кривой и начала кругового пути. Будем считать величину μ близкой к единице (мы вскоре уточним ее значение). Тогда угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ будет мал, и поэтому в дифференциальной формуле кривизны

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \quad (2)$$

величиной $(y')^2$ можно пренебречь. Таким образом, полагаем:

$$s = \mu x \quad \text{и} \quad \frac{1}{r} = y'' \quad (3)$$

На основании формул (1) и (3) дифференциальное уравнение переходной кривой примет вид:

$$y'' = \frac{\mu x}{Rl} \quad (4)$$

Общее решение этого уравнения:
$$y = \frac{\mu x^3}{6Rl} + c_1 x + c_2$$

Начальные условия: $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$, откуда $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Подставляя эти значения в общее решение, находим искомое уравнение переходной кривой

$$y = \frac{\mu x^3}{6Rl} \quad (5)$$

На основании полученной формулы (5) определим значение коэффициента пологости μ .

В нашем случае $y' = \frac{\mu x^2}{2Rl}$. Тогда выражение для длины дуги принимает вид:

$$l = \int_0^a \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{\mu^2 x^4}{4R^2 l^2}} dx \leq \int_0^a \sqrt{1 + \frac{l^2}{4R^2 \mu^2}} dx = \sqrt{1 + \frac{l^2}{4R^2 \mu^2}} a$$

С учетом $\frac{l}{a} = \mu > 1$ неравенство вида: $1 + \frac{b^2}{\mu^2} \geq \mu^2$ где обозначено $b = \frac{l}{2R}$.

В результате получим:

$$\mu \geq \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4b^2}}{2}}$$

Если, например, положить $R = 2l$, то получим $\mu \geq \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{2} = 1.03$

Даже если заложить крутой поворот $R = l$, что подчас характерно для автомобильных дорог, то получим $\mu > 1.1$, т.е. эта гипотеза достаточно хорошо работает. Поэтому в дальнейшем, при данном подходе будем полагать:

$$y = \frac{x^3}{6Rl} \quad (6)$$

Теперь в качестве параметра возьмем переменную x и запишем уравнение эволюты в параметрической форме для случая $R = 2l$. Тогда $(y')^2 = 0.0625$, что существенно меньше единицы и мы будем пренебрегать ею.

$$\alpha = x - y' \frac{1 + (y')^2}{y''} \approx \frac{x}{2} \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} \approx \frac{2l^2}{x}$$

Исключая параметр x , получим параболу (рис. 1) вида: $\beta = \frac{l^2}{\alpha}$ (7)

Таким образом в соответствии с полученной формулой нетрудно установить, что асимптотой эволюты является ось Oy , а сама эволюта является частью гиперболы, идущей вдоль Oy оси из ∞ в точку $o(x_0; y_0)$. Теперь исследуем как между собой связаны между собой только что определенная точка $o(x_0; y_0)$ и точка $M_0(a; b)$, являющаяся концом переходной кривой и началом окружности кругового пути. А также нам предстоит определить условия сопряжения переходной кривой и окружности в этой точке.

Из рисунка видно, что $(a - x_0)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$ (8)

Это соотношение можно получить из теоремы Пифагора или из уравнения окружности. Теперь запишем уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ и по правилу нахождения производной неявно заданной функции, запишем

$$2(x - x_0) + 2(y - y_0) \cdot y' = 0 \quad (9)$$

Откуда находим: $y'_{M_0} = \frac{a - x_0}{y_0 - b}$ (10)

Если подставить полученное выражение (10) в уравнение нормали, восстановленной к окружности в точке M_0

$$(y - y_0)|_{y=b} = -\frac{1}{y'}(x - x_0)|_{x=a},$$

то получим тождество что еще раз доказывает правильность выведенной формулы (10).

Если выражение (8) продифференцировать по x еще раз, то получим:

$$1 + (y'_{M_0})^2 + (y - y_0)|_{y=b} \cdot y''_{M_0} = 0$$

И тогда определяем

$$y''_{M_0} = \frac{1 + (y'_{M_0})^2}{y_0 - b} .$$

Подставляя в эту формулу соотношение (10), и используя формулу (8), окончательно получим:

$$y''_{M_0} = \frac{R^2}{(y_0 - b)^2} \quad (11)$$

Отметим тот факт, что формулу (11) можно также вывести из формулы кривизны (2) с использованием уравнения (8), что в очередной раз подтверждает правильность выведенных выше формул.

А теперь вычислим первую и вторую производные в точке M_0 , используя переходную кривую. Для этого случая определяем:

$$y'_{M_0} = \frac{a^2}{2Rl} \quad \text{и} \quad y''_{M_0} = \frac{x_0}{Rl} \quad (12)$$

Вывод. Очевидно, что посчитываемые по формулам (10), (11), (12) значения первых и вторых производных не совпадают и поэтому в той точке сопряжение в точке M_0 , не является плавным, а значит по законам механике в ней из-за появления инерционных сил будет наблюдаться толчок. Считая эту работу своего рода заданием, мы планируем продолжить изучать эту проблему [2], и в следующей работе хотим предложить свой метод плавного сопряжения в точке M_0 .

Литература:

1. Бабков В.Ф., Андреев О.В. Проектирование автомобильных дорог. Транспорт, Москва, 1987. Ч.1-368 стр.; ч2-415 стр.
2. ЭУМК по учебной дисциплине «Изыскания и проектирование автомобильных дорог». Для специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги». Составители Гатальский Р.К., Зеленко Л.В., Адашкевич В.И. Минск, БНТУ, 2021. 125 стр.