

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Геотехника и строительная механика»

К. В. Юркова

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие  
для студентов, обучающихся по направлению специальности  
1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства  
(строительство)»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию  
в области экономики и организации производства*

Минск  
БНТУ  
2021

УДК 621.01:531.8 (076.5)

ББК 30.12я7

Ю75

**Р е ц е н з е н т ы:**

главный научный сотрудник РУП «БелНИИС»,  
д-р техн. наук, профессор *С. В. Босаков*;  
заведующий кафедрой «Прикладная механика»  
Брестского государственного технического университета  
канд. техн. наук, доцент *В. И. Игнатюк*

**Юркова, К. В.**

Ю75 Техническая механика: практикум : учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению специальности 1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства (строительство)» / К. В. Юркова. – Минск : БНТУ, 2021. – 100 с.  
ISBN 978-985-593-302-5.

В учебно-методическом пособии кратко изложены основные сведения из разделов по теоретической механике и сопротивлению материалов, даны начальные понятия о кинематическом анализе плоских стержневых систем. Теоретический материал сопровождается подробными решениями практических задач по расчету статически определимых систем на прочность и жесткость.

Пособие ориентировано на освоение теоретических основ и укрепление практических знаний по дисциплине «Техническая механика» студентами экономических специальностей в области строительства.

УДК 621.01:531.8 (076.5)

ББК 30.12я7

ISBN 978-985-583-302-5

© Юркова К. В., 2021

© Белорусский национальный  
технический университет, 2021

## ВВЕДЕНИЕ

В числе профессиональных компетенций инженера-экономиста, специализирующегося в строительной области, должны быть не только знания экономических наук, но и комплексное понятие об этапах расчета и проектирования сооружений. Учебная дисциплина «Техническая механика» базируется на курсе высшей математики и физики, необходима для освоения последующих курсов специальных дисциплин, связанных с проектированием и расчетом зданий и инженерных сооружений.

Цель изучения дисциплины «Техническая механика» – освоение теоретических основ и практических методов расчета стержней и стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость, что является основой для экономичного проектирования зданий и сооружений. Например, при проектировании одного и того же объекта, как правило, рассматривают несколько вариантов конструктивных решений. На основании методов и принципов технической механики подбирают такие размеры элементов расчетных схем для каждого варианта, которые обеспечивают надежность и долговечность с наименьшими материальными затратами на изготовление, возведение и эксплуатацию объекта. В качестве окончательного варианта принимают оптимальный из всех приведенных.

Общий курс состоит из трех разделов: 1) теоретическая механика, где рассматриваются условия движения, равновесия и взаимодействия материальных твердых тел; 2) сопротивление материалов, где излагаются основы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость с учетом физико-механических свойства материалов; 3) строительная механика, где изучаются принципы и методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость сложных стержневых и пластинчатых систем.

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические сведения, а также примеры решения типовых задач по первому и второму разделам технической механики. Решения задач сопровождаются всеми необходимыми комментариями и указаниями, которые должны помочь студенту при самостоятельном изучении дисциплины.

Пособие будет полезным также для студентов строительной и архитектурной специальностей, в том числе обучающихся заочно.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

## 1.1. Система сил на плоскости. Основные аксиомы статики

Теоретическую механику составляют три раздела: статика, кинематика и динамика. В пособии изложены только вопросы *статики*, т. е. рассматриваются задачи о равновесии твердых тел.

В инженерных зданиях и сооружениях различные элементы конструкции воспринимают нагрузку, взаимодействуя между собой. Мерой механического действия одного материального тела на другое является *сила*. Действующая на тело сила определяется как произведение массы тела на сообщаемое этой силой ускорение. Единица измерения силы в международной системе единиц (СИ) – Ньютон (Н). Один ньютон сообщает телу с массой 1 кг ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ , т. е.  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \times 1 \text{ м/с}^2$ . Десятичные кратные единицы силы образуют при помощи стандартных приставок СИ. Например,  $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$ .

Сила как вектор характеризуется (рис. 1.1):

- направлением (линия действия силы);
- точкой приложения;
- величиной (модуль силы).

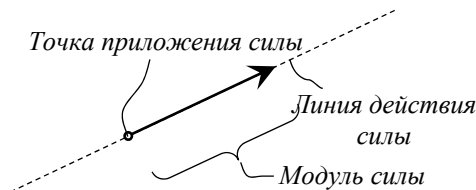


Рис. 1.1

Силы, действующие на тело, делятся на внешние и внутренние. Внешние силы могут быть активными и реактивными. Активные силы стремятся вызвать перемещение тела, а реактивные стремятся противодействовать этому перемещению. Совокупность сил, действующих на тело, называют *системой сил* (рис. 1.2).

Эквивалентными системами сил называются такие системы сил, которые могут заменить одна другую, не изменяя при этом кинематическое состояние твердого тела. Например, систему сходящихся в точке сил можно заменить *равнодействующей*, т. е. действующей так же, как и вся система.

Уравновешенной системой сил, называется такая система, под действием которой твердое тело находится в равновесии, т. е. либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

Простейший пример уравновешенной системы сил – это две силы, действующие вдоль одной линии, равные по величине, но противоположные по направлению (рис. 1.3).

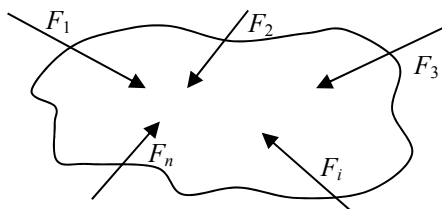


Рис. 1.2

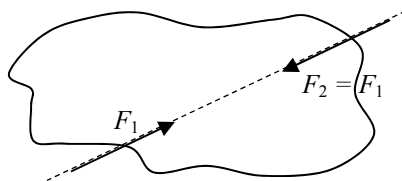


Рис. 1.3

Рассмотрим основные положения (аксиомы) статики.

*Первая аксиома:* Под действием уравновешенной системы сил абсолютно твердое тело или материальная точка находятся в равновесии или движутся равномерно или прямолинейно.

*Вторая аксиома:* Две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в разные стороны, уравновешиваются.

*Третья аксиома:* Не нарушая механического состояния тела, можно добавить или убрать уравновешенную систему сил.

*Четвертая аксиома:* равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой точке и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.4).

*Пятая аксиома:* При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное действие.

Следствие из 2-й и 3-й аксиом: Силу, действующую на твердое тело, можно перемещать вдоль линии ее действия. Например, на рис. 1.5 сила  $F$  из точки  $A$  может быть перенесена в точку  $B$ .

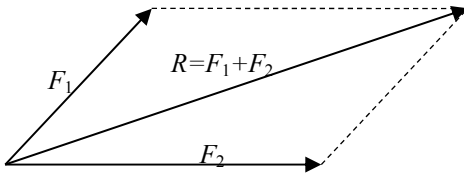


Рис. 1.4

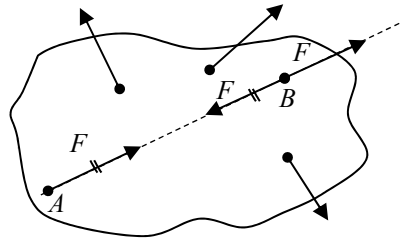


Рис. 1.5

## 1.2. Равновесие плоской системы сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *сходящейся*. По следствию из аксиом статики, все силы сходящейся системы сил можно переместить вдоль линии действия, и тогда все силы окажутся приложенными в одной точке.

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить геометрически с помощью параллелограмма или треугольника сил.

Равнодействующую любой системы сходящихся сил (рис. 1.6, а) можно получить геометрически с помощью многоугольника сил. Вектор равнодействующей соединит начало первого вектора с концом последнего (рис. 1.6, б).

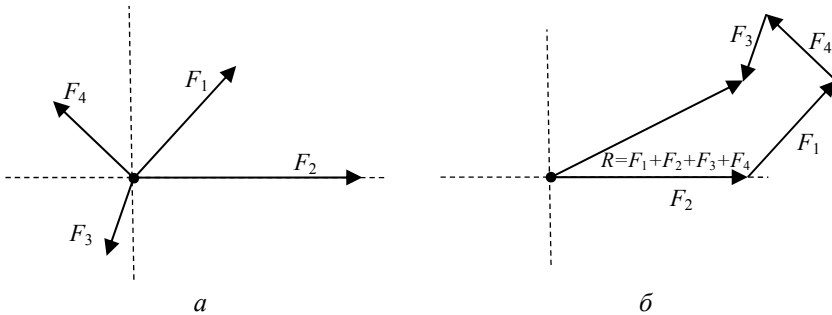


Рис. 1.6

При равновесии системы сходящихся сил равнодействующая должна быть равна нулю; геометрически это означает, что многоугольник сил этой системы должен быть замкнутым.

Геометрический способ определения равнодействующей не всегда удобен и требует точного построения, поэтому рассмотрим более удобный, аналитический способ. Для этого вспомним понятие *проекция силы на ось*.

Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора (рис. 1.7). Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Таким образом, проекция вектора имеет положительный знак, если вектор и оси направлены в одну сторону, и отрицательный – если ось и вектор направлены в разные стороны (рис. 1.8).

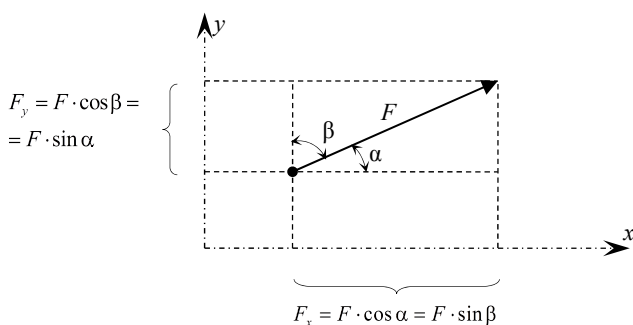


Рис. 1.7

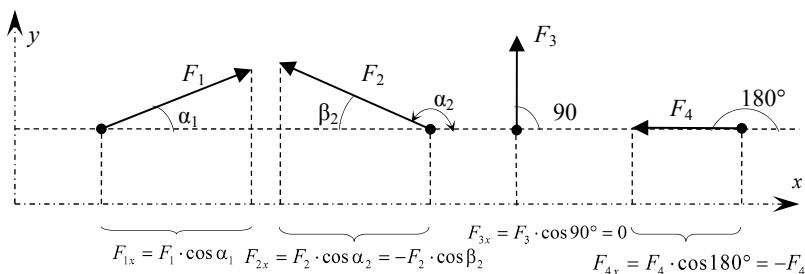
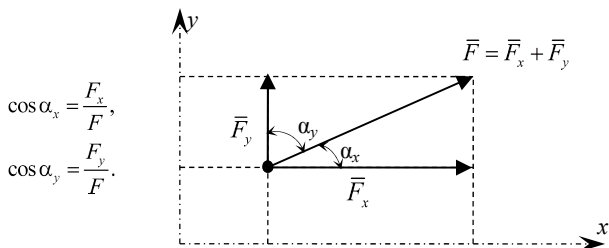


Рис. 1.8

Силу, приложенную под некоторым углом к осям координат, удобно представлять в виде суммы двух сил, направленных по двум взаимно перпендикулярным осям (рис. 1.9).



$$\cos \alpha_x = \frac{F_x}{F},$$

$$\cos \alpha_y = \frac{F_y}{F}.$$

Рис. 1.9

Тогда можно определить равнодействующую системы сходящихся сил *аналитическим* способом, т. е. через ее проекции:

$$F_{\text{равн}, x} = \sum_i F_{i,x}, \quad F_{\text{равн}, y} = \sum_i F_{i,y}.$$

Модуль и направление равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_{\text{равн}} = \sqrt{F_{\text{равн}, x}^2 + F_{\text{равн}, y}^2}, \quad \cos \alpha = \frac{F_{\text{равн}, x}}{F_{\text{равн}}}; \quad \cos \beta = \frac{F_{\text{равн}, y}}{F_{\text{равн}}}.$$

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме:

$$\begin{cases} \sum_i F_{i,x} = 0, \\ \sum_i F_{i,y} = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$

*Задача 1.1.* Найти равнодействующую системы сходящихся сил (рис. 1.10, а) геометрическим и аналитическим способом.



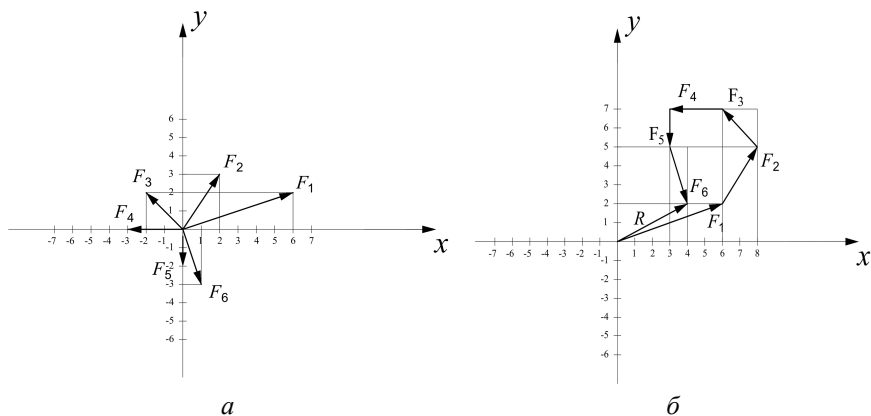


Рис. 1.10

Решение:

1. Геометрический способ определения равнодействующей  $R$  продемонстрирован на рис. 1.10, б.

2. Найдем равнодействующую  $R$  по ее проекциям на координатные оси:

$$R_x = \sum_{i=1}^6 F_{ix} = 6 + 2 - 2 - 3 + 0 + 1 = 4;$$

$$R_y = \sum_{i=1}^6 F_{iy} = 2 + 3 + 2 + 0 - 2 - 3 = 2;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 20 \approx 4,47.$$

*Задача 1.2.* Найти равнодействующую системы сходящихся сил (рис. 1.11) аналитическим способом.

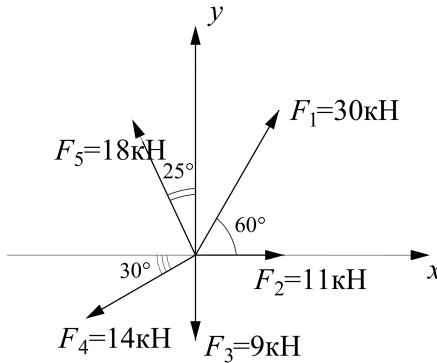


Рис. 1.11

Решение:

Найдем равнодействующую  $R$  по ее проекциям на координатные оси:

$$R_x = \sum_{i=1}^6 F_{ix} = 30 \cdot \cos 60^\circ - 18 \cdot \sin 25^\circ - 14 \cdot \cos 30^\circ + 0 + 11 = 6,27 \text{ кН};$$

$$R_y = \sum_{i=1}^6 F_{iy} = 30 \cdot \sin 60^\circ + 18 \cdot \cos 25^\circ - 14 \cdot \sin 30^\circ - 9 + 0 = 26,29 \text{ кН};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6,27^2 + 26,29^2} \approx 27,03 \text{ кН}.$$

Направляющие косинусы равнодействующей можно найти по формулам:

$$\cos \alpha_x = \frac{R_x}{R} = \frac{6,27}{27,03} = 0,232, \quad \cos \alpha_y = \frac{R_y}{R} = \frac{26,29}{27,03} = 0,973.$$

*Задача 1.3.* На плоскости находится груз массой  $m = 1$  т. Найти силу  $Q$  (рис. 1.12, а) сдвигающую груз, если коэффициент трения  $\mu = 0,1$ . Размерами груза можно пренебречь.

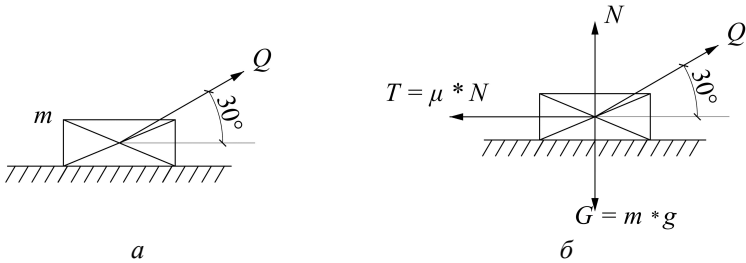


Рис. 1.12

Решение:

1. Покажем силы, действующие на груз (рис. 1.12, б). Здесь  $G$  – вес груза,  $N$  – реакция опоры,  $T$  – сила трения.

2. Составим уравнения равновесия для системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T + Q \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ N - G + Q \cdot \sin 30^\circ = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\mu N + Q \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ N - mg + Q \cdot \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Выражаем из второго уравнения  $N = mg - Q \cdot \sin 30^\circ$  и подставляем в первое:  $-\mu(mg - Q \cdot \sin 30^\circ) + Q \cdot \cos 30^\circ = 0$ .

Отсюда

$$Q = \frac{\mu mg}{\mu \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{0,1 \cdot 1000 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{0,1 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{0,1 \cdot 9,8 \text{ кН}}{0,1 \cdot 0,5 + 0,866} = 1,07 \text{ кН}.$$

**Задача 1.4.** На наклонной плоскости находится груз массой  $m = 1$  т. Найти угол наклона плоскости  $\alpha$  (рис. 1.13, а), при котором груз начнет соскальзывать вниз, если коэффициент трения  $\mu = 0,25$ . Размерам груза можно пренебречь.

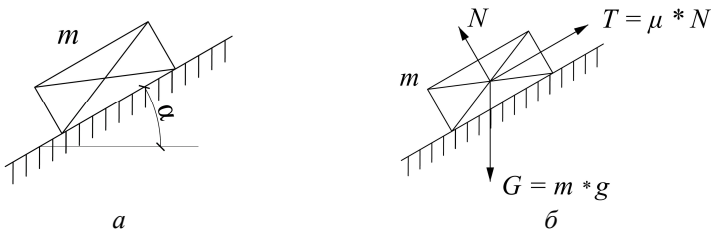


Рис. 1.13

Решение:

1. Покажем силы, действующие на груз (рис. 1.13, б). Здесь  $G$  – вес груза,  $N$  – реакция опоры,  $T$  – сила трения.

2. Составим уравнения равновесия для системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \cos \alpha - N \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0, \\ T \cdot \sin \alpha + N \cdot \sin(90^\circ - \alpha) - G = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mu N \cdot \cos \alpha - N \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = 0, \\ \mu N \cdot \sin \alpha + N \cdot \sin(90^\circ - \alpha) - G = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = 0, \\ \mu \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{G}{N} = 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений найдем при помощи программы символьных вычислений Mathematica 8.0:

$$N = \frac{G}{\sqrt{1+\mu^2}}; \quad \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right).$$

Используя исходные данные задачи, получаем:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+0.25^2}}\right) \approx 14^\circ.$$

*Задача 1.5.* Найти реакции, действующие в стержнях  $AB$  и  $BC$  кронштейна, к которому через блок подвешен груз массой  $m = 200$  кг (рис. 1.14, а).

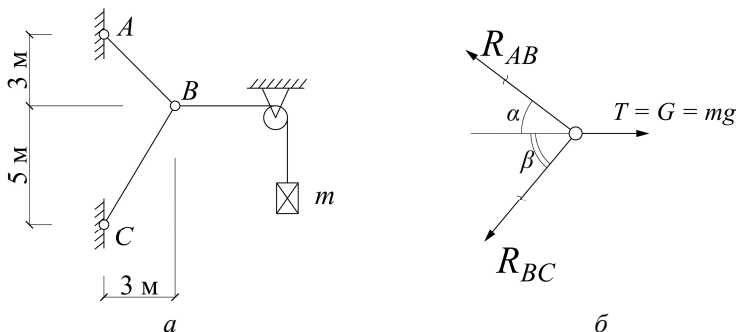


Рис. 1.14

Решение:

1. Покажем силы, действующие на узел  $B$  кронштейна (рис. 1.14, б).  
Здесь, по рис. 1.14, а:

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = 0,707;$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = 0,514; \quad \sin \beta = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = 0,857.$$

2. Составим уравнения равновесия для системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot g - R_{AB} \cdot \cos \alpha - R_{BC} \cdot \cos \beta = 0, \\ R_{AB} \cdot \sin \alpha - R_{BC} \cdot \sin \beta = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 200 \cdot 9,8 - R_{AB} \cdot 0,707 - R_{BC} \cdot 0,514 = 0, \\ R_{AB} \cdot 0,707 - R_{BC} \cdot 0,857 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение системы уравнений:

$$R_{AB} = 1732,93 \text{ Н} \approx 1,73 \text{ кН}; \quad R_{BC} = 1429,61 \text{ Н} \approx 1,43 \text{ кН}.$$

*Задача 1.6.* Найти реакции, действующие в стержнях  $AB$  и  $BC$  кронштейна, к которому через блок подвешен груз массой  $m = 4,5 \text{ т}$  (рис. 1.15, а).

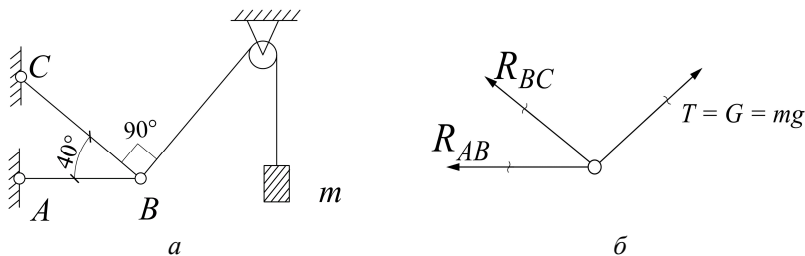


Рис. 1.15

Решение:

1. Покажем силы, действующие на узел  $B$  кронштейна (рис. 1.15, б).  
2. Составим уравнения равновесия для системы сходящихся сил:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \cdot g \cdot \cos(90^\circ - 40^\circ) - R_{AB} - R_{BC} \cdot \cos 40^\circ = 0, \\ m \cdot g \cdot \sin(90^\circ - 40^\circ) + R_{BC} \cdot \sin 40^\circ = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4,5 \cdot 9,8 \cdot 0,643 - R_{AB} - R_{BC} \cdot 0,766 = 0, \\ 4,5 \cdot 9,8 \cdot 0,766 + R_{BC} \cdot 0,643 = 0. \end{cases}$$

Получаем решение системы уравнений:

$$R_{AB} = 68,60 \text{ кН}; \quad R_{BC} = -52,54 \text{ кН}.$$

Знак минус перед реакцией  $R_{BC}$  говорит о том, что ее направление на рис. 1.15, б выбрано неверно, т. е. стержень ВС будет не растянут, а сжат.

### 1.3. Пара сил и ее момент. Момент силы относительно точки

*Парой сил* называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны (рис. 1.16). Пара сил вызывает вращение тела, и ее действие на тело оценивается *моментом*. Действие пары сил не может быть заменено одной равнодействующей силой.

*Момент пары сил* – численно равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние между линиями действия сил (плечо пары)  $M_i = F_i \cdot h_i$ . Момент пары сил считается положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке.

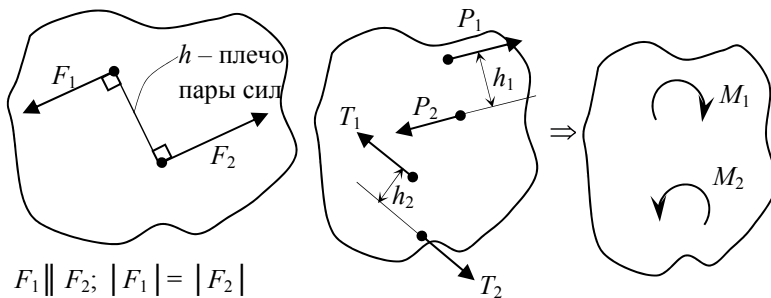


Рис. 1.16

Свойства пары сил:

1) пару сил можно перемещать в плоскости ее действия;

2) две пары, моменты которых равны, эквивалентны;

3) систему пар сил можно заменить равнодействующей парой с моментом  $M_{\text{равн}} = \sum_i M_i = \sum_i F_i \cdot h_i$ .

Вместо понятия «пара сил», при решении задач будем чаще всего иметь дело с понятием момента силы относительно точки (рис. 1.17).

Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно этой точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.

Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы  $M_i = F_i \cdot h_i$ .

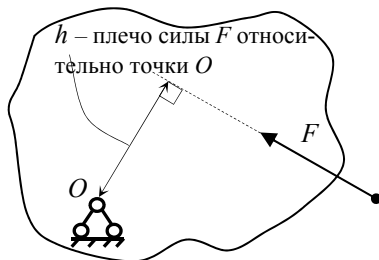


Рис. 1.17

Плечом силы называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

Единица измерения момента в системе СИ – Н·м. Момент считается положительным, если разворачивает тело по часовой стрелке.

#### 1.4. Равновесие плоской системы произвольно расположенных сил

Система произвольно расположенных сил на плоскости может быть заменена одной силой – главным вектором системы, и одной парой сил – главным моментом системы (рис. 1.18).

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной системы плоских сил (рис. 1.18), а его проекции:

$$\begin{cases} F_{\text{гл},x} = \sum_i F_{i,x}, \\ F_{\text{гл},y} = \sum_i F_{i,y}. \end{cases}$$

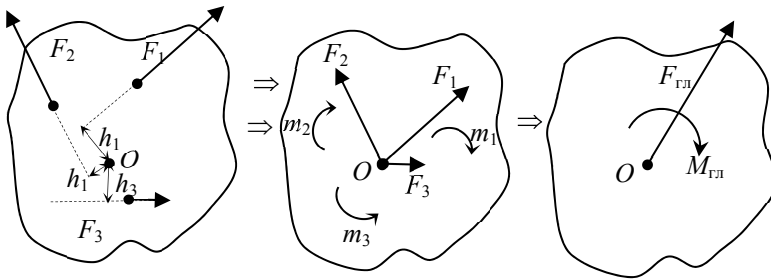


Рис. 1.18

Главный момент системы равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения (рис. 1.18):

$$M_{\text{гл}} = \sum_i M_i.$$

Условия равновесия системы произвольно расположенных сил на плоскости могут быть записаны в следующих трех формах:

$$1) \begin{cases} \sum_i F_{i,x} = 0, \\ \sum_i F_{i,y} = 0, \\ \sum_i M_i = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \\ \sum M_i = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_i = 0, \\ \sum M_j = 0. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \sum M_i = 0, \\ \sum M_j = 0, \\ \sum M_k = 0. \end{cases}$$

**Задача 1.7.** Найти такую величину силы  $R$  (рис. 1.19), при которой опирающаяся одним концом шарнирно балка, изображенная на рис. 1.19, будет находиться в равновесии.

**Решение.** Помимо действующих на балку внешних активных сил на нее будут действовать также внешние реактивные силы со стороны шарнирной опоры  $A$ .

Для того, чтобы не определять эти реакции, воспользуемся уравнением моментов всех сил системы относительно опоры  $A$ :

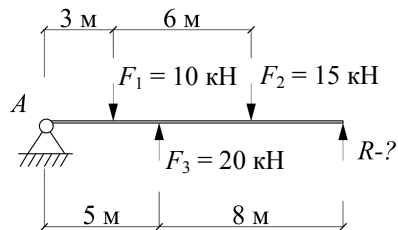


Рис. 1.19



$$\sum M_A = 0.$$

$$10 \cdot 3 - 20 \cdot 5 + 15 \cdot (3 + 6) - R \cdot (5 + 8) = 0.$$

Откуда

$$R = \frac{10 \cdot 3 - 20 \cdot 5 + 15 \cdot (3 + 6)}{(5 + 8)} = 5 \text{ кН}.$$

*Задача 1.8.* Записать выражение для момента, который создают силы, показанные на рис. 1.20, относительно опоры.

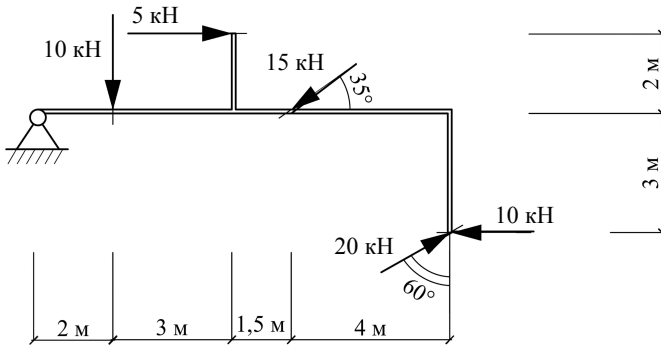


Рис. 1.20

Решение. Для удобства будем силы, приложенные под углом, раскладывать по координатным осям на две взаимно перпендикулярные составляющие. Тогда выражение для момента сил относительно опоры будет:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0. \Rightarrow & 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot \sin 35^\circ \cdot (2 + 3 + 1,5) + 10 \cdot 3 - \\ & - 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot (2 + 3 + 1,5 + 4) - 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3. \end{aligned}$$

*Задача 1.9.* Найти расстояние  $x$  от опоры до силы 160 кН, при котором балка, изображенная на рис. 1.21, будет находиться в равновесии.

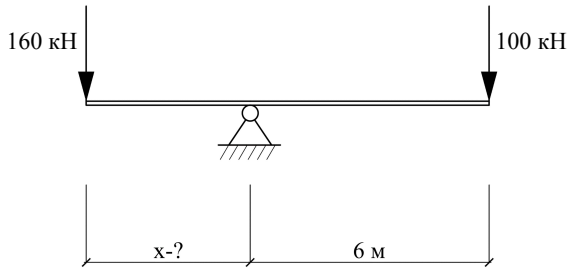


Рис. 1.21

Решение. Запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0. \Rightarrow 100 \cdot 6 - 160 \cdot x = 0.$$

Откуда  $x = \frac{100 \cdot 6}{160} = 3,75 \text{ м.}$

## 2. РАСЧЕТНЫЕ СХЕМЫ СООРУЖЕНИЙ, ИХ ОБРАЗОВАНИЕ И АНАЛИЗ

### 2.1. Расчетная схема сооружения

Расчет конструкции с использованием строгого описания геометрической формы, с учетом всех свойств конструкционных материалов и точного задания внешних воздействий, как правило, практически невозможен из-за чрезмерной сложности. Поэтому при расчете инженерных сооружений переходят к рассмотрению его расчетной схемы, которая является совокупностью схематизированных описаний геометрии, материала и внешних воздействий на реальную конструкцию.

*Расчетная схема* – упрощенное, идеализированное изображение сооружения, отражающее наиболее важные его свойства. Составляющие расчетной схемы отображены на рис. 2.1.

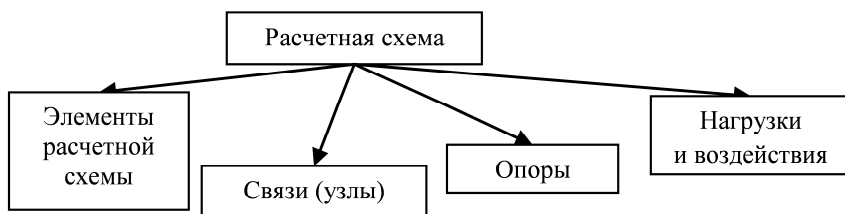


Рис. 2.1

В зависимости от соотношения геометрических размеров различают следующие основные виды элементов сооружения (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Основные элементы расчетных схем сооружений

Стержни	Пластины и оболочки	Массивы

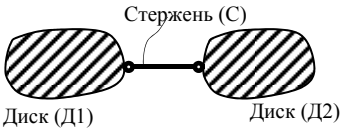
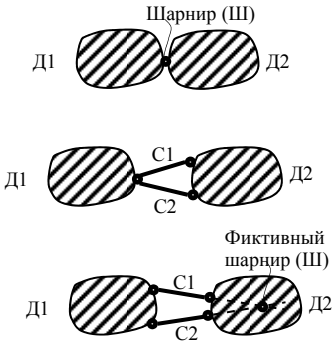
## 2.2. Виды связей в расчетной схеме

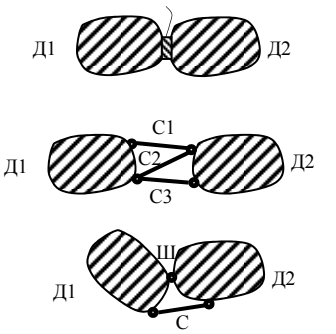
Названные элементы (стержни) в стержневой системе соединяются по определенным правилам при помощи связей. *Связью* называется всякое устройство, препятствующее изменению взаимного положения элементов системы.

Каждая связь имеет две характеристики: статическую (реакции, которые возникают в связи) и кинематическую (перемещения, которые ограничивает связь). Условно различают связи между элементами системы и связи опорные. Основные виды связей между элементами плоских систем показаны в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Связи плоской стержневой системы

Название и характеристики связи	Изображение связи
<p>Простая линейная связь (связь 1-го рода). Кинематическая характеристика: связь препятствует поступательному перемещению одного элемента относительно другого по направлению оси связи. Статическая характеристика: в связи возникает усилие (реакция) по направлению этой связи</p>	
<p>Цилиндрический шарнир (связь 2-го рода) эквивалентен двум простым линейным связям. Кинематическая характеристика: связь препятствует поступательным перемещениям одного элемента относительно другого. Статическая характеристика: в связи возникает усилия (реакции) по двум направлениям</p>	

Название и характеристики связи	Изображение связи
<p>Жесткое соединение (связь 3-го рода). Эквивалентно трем простым линейным связям (не пересекающимся в одной точке и не параллельным), либо шарниру и одной линейной связи (не находящимся на одной прямой).</p> <p>Кинематическая характеристика: связь не допускает ни поступательного перемещения, ни вращения одного диска относительно другого.</p> <p>Статическая характеристика: в связи возникают усилия (реакции) по 3-м направлениям</p>	<p>Жесткое соединение</p> 

Замечания: а) шарнир, соединяющий 2 стержня, называют простым, причем он может быть сквозным или примыкающим (рис. 2.2, а); б) сквозные и примыкающие шарниры могут быть кратными (рис. 2.2, б).

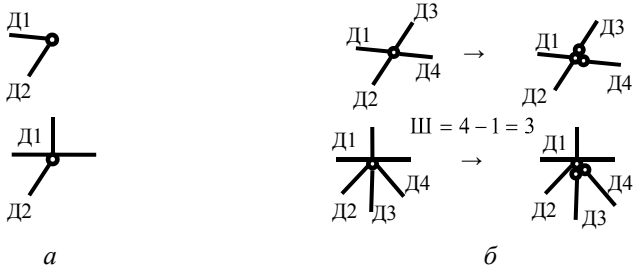


Рис. 2.2

Для присоединения каждого последующего стержня необходим один простой шарнир, поэтому в каждом кратном шарнире число простых шарниров будет на единицу меньше числа соединяемых в узле стержней  $\Pi = Д - 1$ .

## 2.3. Опорные связи плоских расчетных схем

Прикрепление системы к основанию (земле) производится при помощи опорных связей или опор (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Основные виды опорных связей

	Шарнирно-подвижная опора	Шарнирно-неподвижная опора	Жесткое защемление (заделка)	Подвижное защемление	
Конструктивная схема					
Расчетная схема					
Опорные реакции					

## 2.4. Нагрузки и воздействия

Классификация нагрузок и воздействий на сооружение отражена в виде схемы на рис. 2.3.

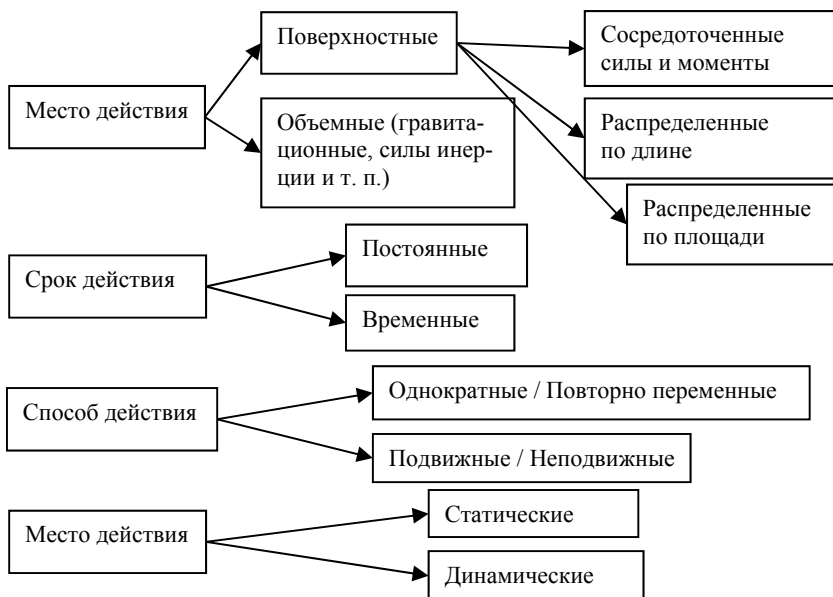


Рис. 2.3

Воздействия бывают: кинематические (осадка опор, ползучесть и пластичность материалов во времени); температурные; химическая агрессия, коррозия; и др.

Пример перехода от конструктивной схемы к расчетной показан на рис. 2.4.

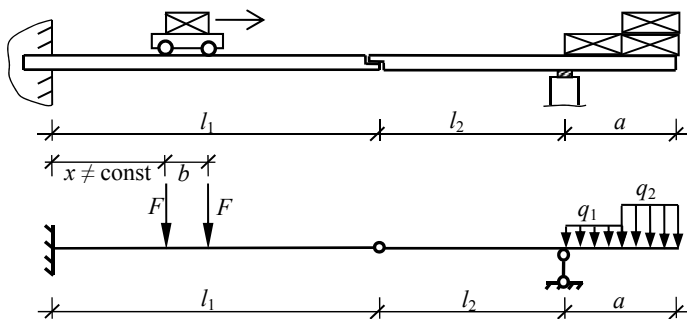


Рис. 2.4

## 2.5. Классификация расчетных схем. Цель и порядок проведения кинематического анализа

Классифицировать расчетные схемы можно по различным признакам. На рис. 2.5 показана принципиальная схема такой классификации.

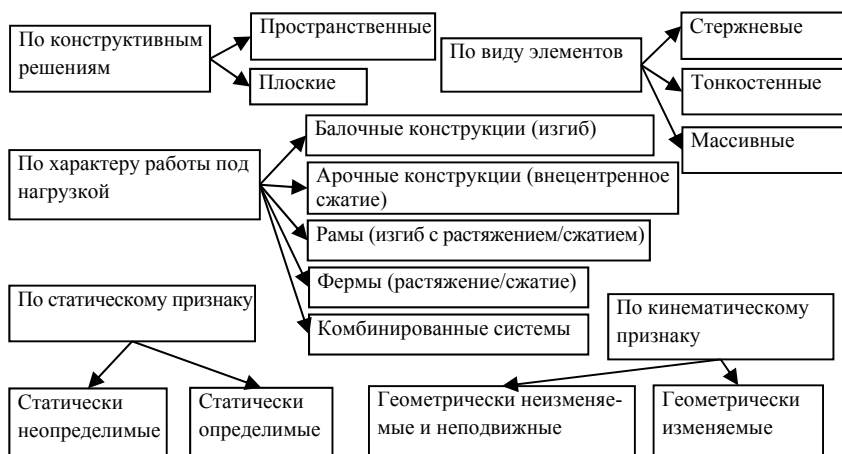


Рис. 2.5

Цель кинематического анализа системы – определить, к какому виду относится система по статическому и кинематическому признакам. Это позволит выбрать метод расчета и решить, годится ли система к расчету или она нуждается в исправлении.

## 2.6. Степень свободы плоской расчетной схемы

*Числом степеней свободы ( $W$ )* какого-либо тела или системы тел называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела или системы тел, которые происходят без деформаций материала.

Например, узел на плоскости обладает двумя степенями свободы  $W = 2$ , так как его положение на плоскости можно задать при помощи двух координат (рис. 2.6).



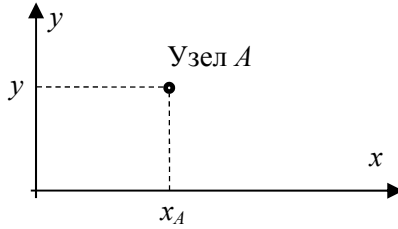


Рис. 2.6

В механике используется такое понятие как *диск* – абсолютно твердое тело либо заведомо геометрически неизменяемая часть системы. Примерами дисков служат различные конструктивные элементы, например, прямолинейный или криволинейный стержни, а также любая геометрически неизменяемая часть конструкции, например, шарнирно стержневой треугольник. Будем обозначать диск символом Д.

*Диск* на плоскости обладает тремя степенями свободы  $W = 3$ . Его положение при движении может описываться двумя координатами некоторой произвольной точки  $A$  и углом поворота  $\alpha$  любой прямой, проходящей через точку  $A$  (рис. 2.7).

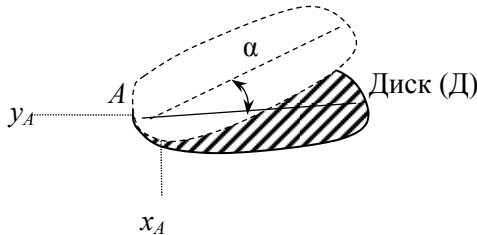


Рис. 2.7

Особое место среди дисков занимает основание, к которому крепится рассматриваемая система тел. Поскольку для реальных конструкций таким основанием является земная поверхность и при их расчетах не учитывается движение нашей планеты, то основание считается условно неподвижным диском. Число степеней свободы

такого диска принимается  $W = 0$ , и в дальнейшем для краткости он будет называться «земля» или «основание».

Связи между дисками (элементами системы) ограничивают их степень свободы на плоскости: стержень (связь 1-го рода) уничтожает одну степень свободы (см. табл. 2.2); цилиндрический шарнир уничтожает две степени свободы (см. табл. 2.2). Жесткое соединение дисков полностью предотвращает движение одного диска относительно другого, следовательно, диски соединенные жестко можно считать одним неизменяемым диском. Опорные связи уничтожают соответствующее каждой связи количество степеней свободы.

Подсчет числа степеней свободы для плоских стержневых систем можно осуществлять по формуле:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0,$$

где  $Д$  – число дисков (стержней соединенных жестко);

$Ш$  – число шарниров с учетом кратности;

$C_0$  – число простых опорных стержней.

Для плоских ферм подсчет степеней свободы удобнее производить по формуле:

$$W = 2У - C - C_0,$$

где  $У$  – число узлов фермы (шарниров);

$C$  – число стержней фермы;

$C_0$  – число простых опорных стержней.

После расчета по этим формулам возможны три случая:

1)  $W > 0$  – такая система геометрически изменяема и является механизмом;

2)  $W = 0$  – в системе имеется достаточное число связей; если они введены правильно, то система неизменяема и статически определима;

3)  $W < 0$  – в системе есть избыточные связи. Если эти связи введены правильно, то система неизменяема и статически неопределима.

Отсюда следует, что расчетная схема сооружения должна удовлетворять необходимому условию геометрической неизменяемости  $W \leq 0$ . Это условие, однако, является необходимым, но не достаточным.

Покажем это на примерах. На рис. 2.8, *a* показаны две балки, обладающие количественно одинаковыми характеристиками, однако неправильное расположение опор для одной из балок обращает ее в геометрически изменяемую систему (механизм). На рис. 2.8, *б* изображены две формально статически определимые фермы. В одной из ферм наклонный стержень (раскос) отсутствует, однако имеется дополнительный опорный стержень. Такое расположение элементов в расчетной схеме также обращает ее в механизм.

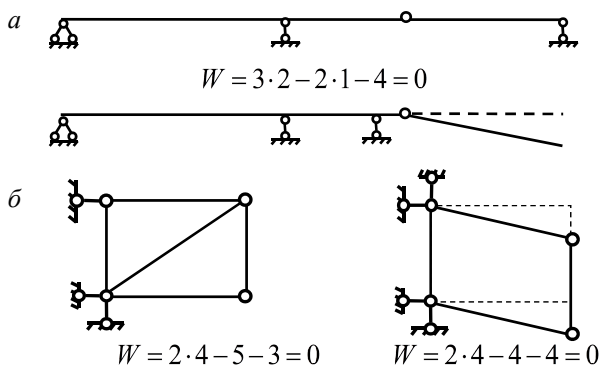


Рис. 2.8

Из примеров следует, что подсчет числа степеней свободы расчетной схемы необходимо дополнить анализом ее геометрической структуры.

## 2.7. Принципы образования геометрически неизменяемых плоских расчетных схем

Соединения элементов между собой и с землей (неподвижным основанием) должно осуществляться по определенным правилам. Рассмотрим простейшие способы образования геометрически неизменяемых систем.

1. Новый узел *У* к диску присоединяется по способу диады – двумя непараллельными стержнями или двумя дисками (рис. 2.9, *a*).

2. Два диска объединяются в неизменяемую систему при помощи, как минимум, трех простых связей:

– тремя непараллельными и непересекающимися в одной точке связями (рис. 2.9, б);

– одним шарниром и одной связью (стержнем) (рис. 2.9, в);

– жестким соединением (полное защемление) (рис. 2.9, г).

3. Три диска объединяются в неизменяемую систему при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рис. 2.9, д). Шарниры могут быть фиктивными (рис. 2.9, е).

Общие выводы. Расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой. С целью проверки геометрической неизменяемости системы проводится ее кинематический анализ, состоящий из двух этапов:

1) количественный анализ – проводится по основной формуле кинематического анализа; должно выполняться условие  $W \leq 0$ ;

2) качественный анализ – проводится с использованием способов образования геометрически неизменяемых систем.

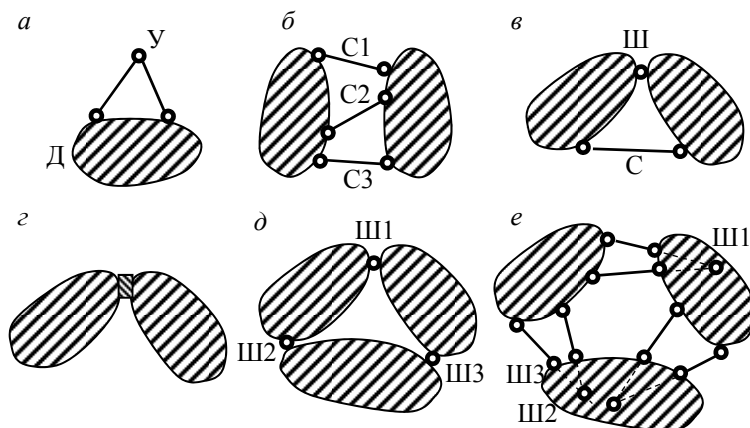


Рис. 2.9

## 2.8. Примеры проведения кинематического анализа

*Задача 2.1:* Провести кинематический анализ для расчетной схемы балки, изображенной на рис. 2.10, а.

Решение:

1. Система содержит два неизменяемых диска, один простой шарнир и опорные закрепления (жесткая заделка и шарнирно-под-

вижная опора), эквивалентные трем и одной простым связям, соответственно.  $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - (1 + 3) = 0$ .

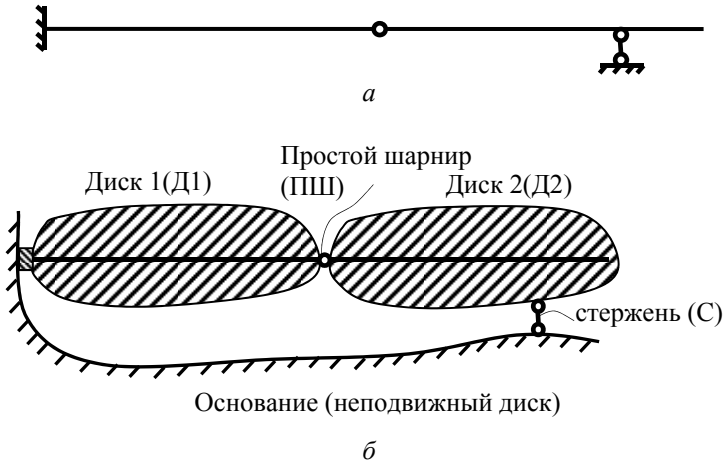


Рис. 2.10

2. Диск 1 (Д1) крепится к основанию жестко, при помощи полного защемления (см. рис. 2.9, з). Диск 1 и основание, таким образом, образуют новый диск, к которому присоединяется Диск 2 (Д2), при помощи Простого Шарнира (ПШ) и опорного стержня (С) (см. рис. 2.9, в). Причем линия стержня С не пересекает шарнир ПШ (рис. 2.10, б).

Вывод. Рассматриваемая балка является геометрически неизменяемой и статически определимой.

*Задача 2.2.* Провести кинематический анализ для расчетной схемы трехшарнирной арки с затяжкой, изображенной на рис. 2.11, а.

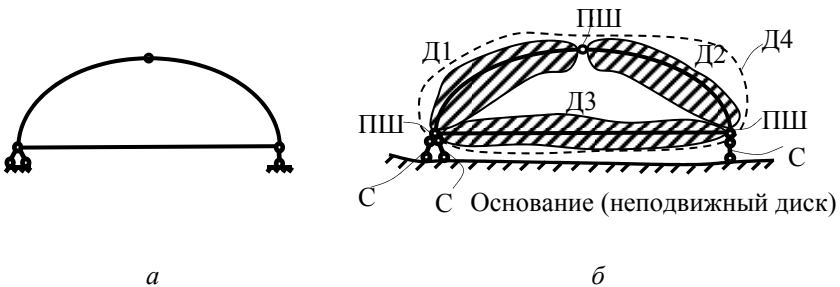


Рис. 2.11

Решение:

1. Система содержит три неизменяемых диска, три простых шарнира и две опоры (шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную), эквивалентные двум и одной простым связям соответственно.  $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - (2 + 1) = 0$ .

2. Диски 1, 2 и 3 (Д1, Д2, Д3) соединены при помощи трех простых шарниров, не лежащих на одной прямой (см. рис. 2.9, д), и образуют новый неизменяемый диск Д4. Диск 4 и основание соединяются при помощи трех опорных стержней (С) (см. рис. 2.9, б), не пересекающихся в одной точке и не параллельных (рис. 2.11, б).

Вывод. Рассматриваемая арка является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Задача 2.3. Провести кинематический анализ для расчетной схемы составной рамы, изображенной на рис. 2.12, а.

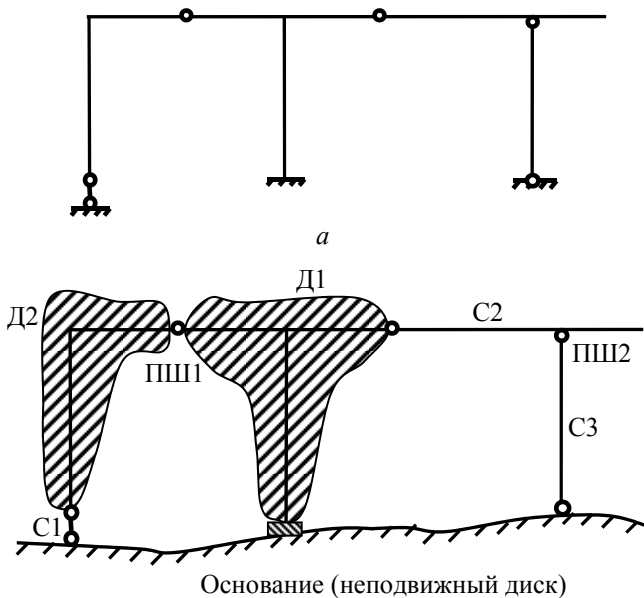


Рис. 2.12

Решение:

1. Система содержит четыре неизменяемых диска, три простых шарнира и три опоры (жесткое защемление, шарнирно-неподвиж-

ную и шарнирно-подвижную опоры), эквивалентные трем, двум и одной простым связям, соответственно.  $W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - (3 + 2 + 1) = 0$ .

2. Диск 1 (Д1) крепится к основанию жестко, при помощи полного заземления (см. рис. 2.9, з). К получившемуся неизменяемому диску присоединяется Диск 2 (Д2), при помощи простого шарнира (ПШ1) и опорного стержня (С1) (см. рис. 2.9, в), который не проходит через шарнир ПШ1.

Шарнир ПШ2 присоединяется к этой неизменяемой части системы по способу диад, при помощи стержней С2 и С3 (рис. 2.12, б).

Вывод. Рассматриваемая рама является геометрически неизменяемой и статически определимой.

*Задача 2.4.* Провести кинематический анализ для расчетной схемы фермы, изображенной на рис. 2.13, а.

Решение:

1. Заданная ферма как шарнирно-стержневая система состоит из 14 стержней, соединенных в девяти узлах шарнирно, к основанию крепится при помощи двух шарнирно-неподвижных опор. Пояснение: шарнирно-неподвижная опора, находящаяся на расчетной схеме справа, присоединяет вертикальный стержень фермы к основанию и изображается в виде простого шарнира (табл. 2.3). Степень свободы:  $W = 2У - С - C_0 = 2 \cdot 9 - 14 - (2 + 2) = 0$ .

2. Вариант 1: Диски 1 и 2 (Д1, Д2) можно считать образованными по способу треугольника, т. е. как три стержня, соединенных при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (см. рис. 2.9, д). Эти два диска (Д1 и Д2) объединяются в неизменяемую систему при помощи трех стержней С1, С2 и С3, не параллельных и не пересекающихся в одной точке (см. рис. 2.9, б). Аналогично и диск Д3 крепится к диску Д2 при помощи связей С4, С5 и С6.

Получившийся неизменяемый Диск Д и основание соединяются при помощи трех опорных стержней С7, С8 и С9, не пересекающихся в одной точке и не параллельных (рис. 2.13, б).

Вариант 2. К Диску 1 (Д1), образованному по способу треугольника, при помощи двух не параллельных стержней С1 и С2 (способ диад, см. рис. 2.9, а) прикрепляется узел фермы (ПШ1). К получившемуся неизменяемому Диску 2 (Д2) по способу диад прикрепляется следующий узел (ПШ2) при помощи двух стержней С3 и С4.

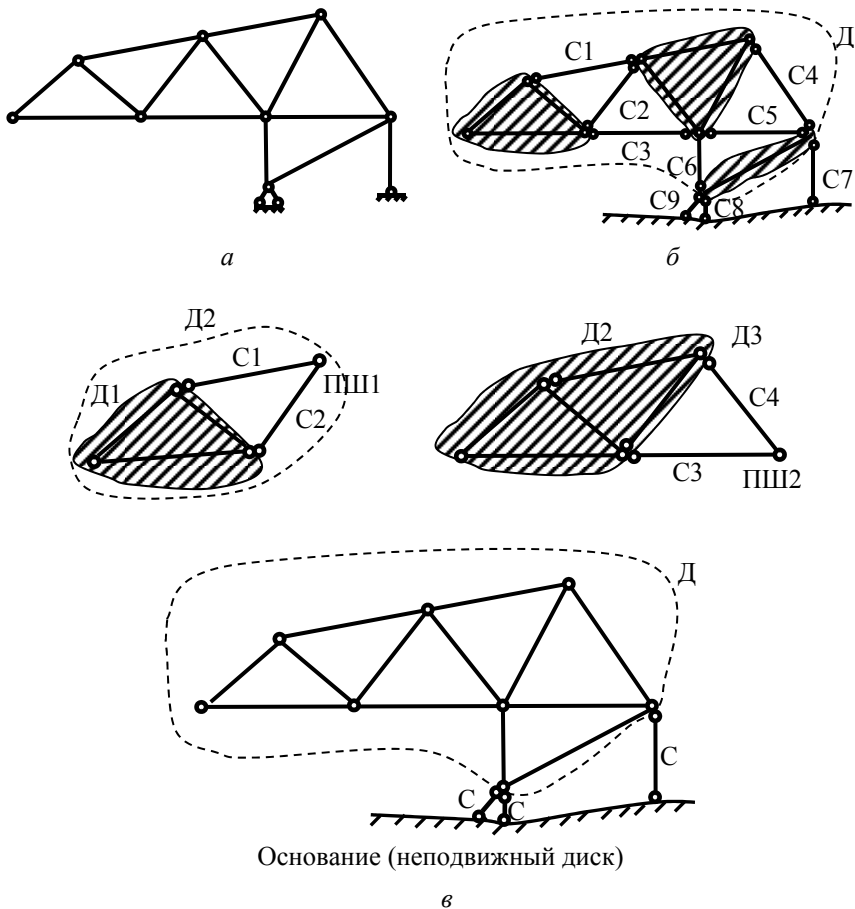


Рис. 2.13

Используя способ диад еще раз, получаем неизменяемый диск  $D$ , который крепится к основанию при помощи трех опорных стержней ( $C$ ), не пересекающихся в одной точке и не параллельных (рис. 2.13, в).

Вывод. Рассматриваемая ферма является геометрически неизменяемой и статически определимой.

*Задача 2.5.* Провести кинематический анализ для расчетной схемы шпренгельной балки, изображенной на рис. 2.14, а.



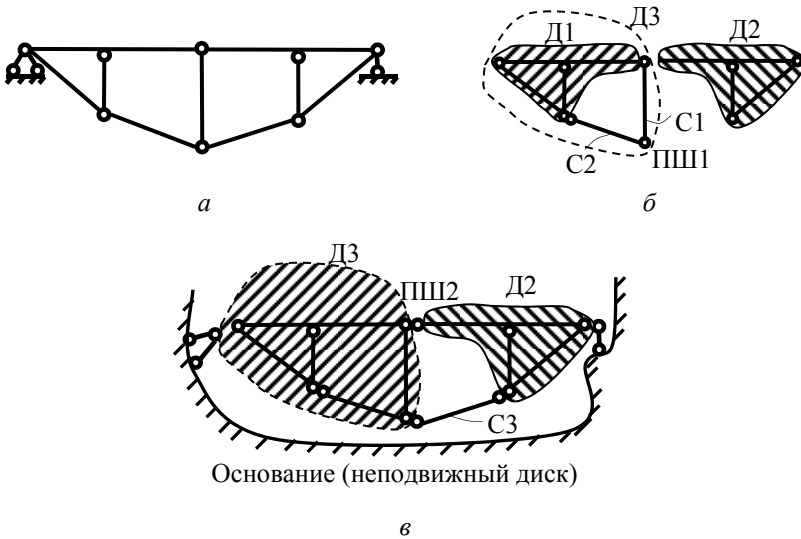


Рис. 2.14

Решение:

1. Комбинированная система содержит девять стержней (дисков), четыре простых шарнира и четыре двукратных шарниров, две опоры (шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную), эквивалентные двум и одной простым связям соответственно.  $W = 3Д - 2Ш - С_0 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot (4 + 4 \cdot 2) - (2 + 1) = 0$ .

2. Диски 1 и 2 (Д1, Д2) можно считать образованными по способу треугольника, т. е. как три стержня, соединенных при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (см. рис. 2.9, д). К диску 1 присоединяется узел ПШ1, при помощи стержней С1 и С2 (способ диад, см. рис. 2.9, а), образуя диск 3 (Д3) (рис. 2.14, б). Эти два диска (Д3 и Д2) объединяются в неизменяемую систему при помощи шарнира ПШ2 и стержня С3, не пересекающего этот шарнир.

Получившийся неизменяемый диск и основание соединяются при помощи трех опорных стержней, не пересекающихся в одной точке и не параллельных (рис. 2.14, в).

Вывод. Рассматриваемая шпренгельная балка является геометрически неизменяемой и статически определимой.

### 3. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ

#### 3.1. Внешние и внутренние силы. Суть метода сечений для определения внутренних сил

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее на опоры, в которых возникают опорные реакции (рис. 3.1, *а*).

При определении опорных реакций используется принцип освобождения от связей: всякое тело можно освободить от связей, заменив их воздействие реакциями (рис. 3.1, *б*). После этого из уравнений равновесия можно определить величины опорных реакций.

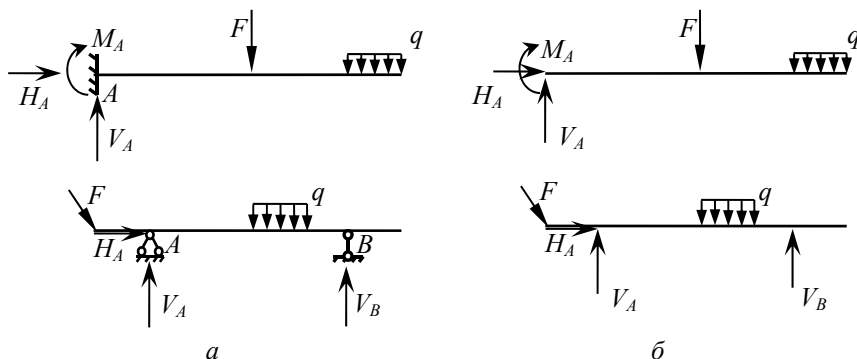


Рис. 3.1

Спротивление тел, оказываемое действующими на них нагрузками, обуславливается наличием в этих телах внутренних сил, природа которых объясняется молекулярным строением материи. Внутренние силы существуют всегда, и именно они являются причиной существования тела как материального объекта. При действии на тело внешних сил внутренние силы изменяются – появляются дополнительные внутренние силы, которые в дальнейшем будем называть внутренними усилиями.

Рассмотрим метод сечений для определения внутренних усилий в плоских стержневых системах. Суть метода заключается в следующем:

1. Тело, на которое действует какая-либо внешняя нагрузка, в интересующем нас месте мысленно рассекается на две части (рис. 3.2, а).
2. Отбрасывается условно одна из частей (например, часть II).

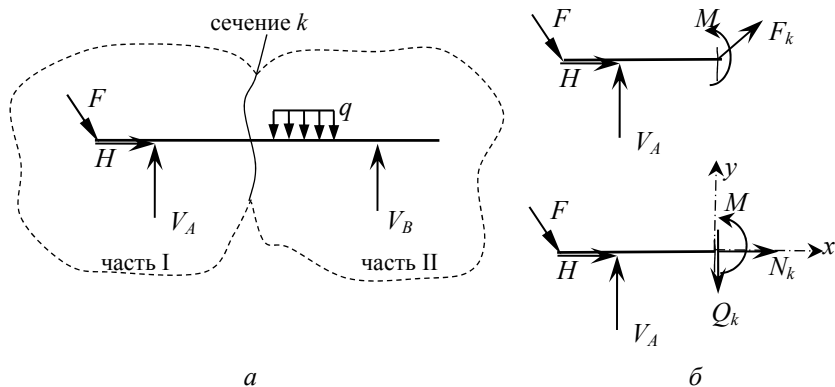


Рис. 3.2

3. Действие отброшенной части II на оставшуюся часть I заменяется внутренними усилиями.

4. Для определения внутренних усилий в рассматриваемом сечении используются уравнения статики твердого тела.

Систему сил, действующих со стороны отброшенной части на оставшуюся часть, можно привести к одной силе  $F_k$  (главному вектору) и к одной паре сил  $M_k$  (главному моменту) (рис. 3.2, б).

Главный вектор и главный момент можно разложить на составляющие по указанным осям. Эти составляющие имеют следующие обозначения и названия:  $N_k$  – продольная сила;  $Q_k$  – поперечная сила в плоскости  $xu$ ;  $M_k$  – изгибающий момент в плоскости  $xu$ .

В элементах пространственной стержневой системы возникают шесть компонент внутренних усилий: продольная сила  $N$ , поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$  (направленные вдоль осей  $y$  и  $z$ ), изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  (относительно осей  $y$  и  $z$ ), крутящий момент  $M_x$ . Этим видам внутренних сил соответствуют следующие виды деформации:

- 1) растяжение или сжатие – при появлении в поперечных сечениях только продольных усилий  $N$ ;

2) сдвиг – при появлении в поперечных сечениях только поперечных усилий  $Q_y$ , или  $Q_z$ ;

3) кручение – в поперечных сечениях возникает только крутящий момент  $M_x$ ;

4) чистый изгиб – в сечении действует только изгибающий момент  $M_y$  или  $M_z$ .

Появление в поперечных сечениях сразу нескольких внутренних усилий приводит к сложным видам деформации (сложному сопротивлению).

### 3.2. Понятие о напряжениях

Внутренние усилия, которые были найдены выше из уравнений статики, являются равнодействующими действительных внутренних усилий, возникающих в каждой точке сечения.

В сечении части I выделим элементарную площадку  $dA$  (рис. 3.3, а). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их будет проходить через центр тяжести площади элемента  $dA$ . Проекции этой равнодействующей на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 3.3, а) представляют собой элементарную продольную силу  $dN$  и элементарные поперечные силы  $dQ_y$  и  $dQ_z$ .

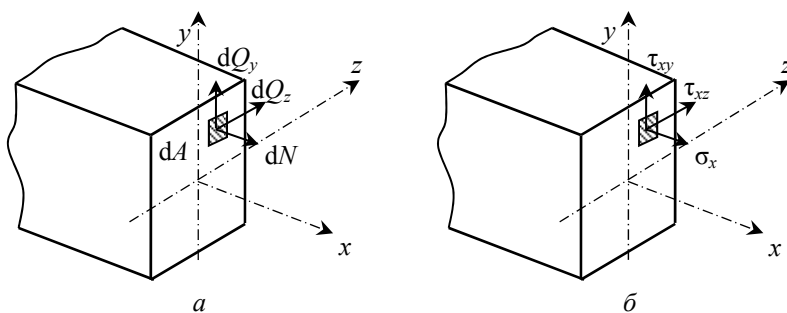


Рис. 3.3

Разделив эти усилия на площадь  $dA$ , получим величины внутренних сил, приходящихся на единицу площади:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}; \quad \tau_{xy} = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_{xz} = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (3.1)$$

Эти величины называют напряжениями в точке поперечного сечения тела (с координатами  $y, z$ ), причем  $\sigma$  обозначает нормальное напряжение; а  $\tau$  – касательное.

Нормальные и касательные напряжения представляют собой интенсивность распределения соответственно нормальных и поперечных сил, действующих по элементарной площадке в рассматриваемой точке. Обозначения нормальных напряжений снабжены индексами, указывающими, какой координатной оси параллельно данное напряжение. Растягивающее нормальное напряжение принято считать положительным, а сжимающее нормальное напряжение – отрицательным.

Обозначения касательных напряжений снабжены двумя индексами:

- первый индекс указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке действия данного напряжения;
- второй индекс указывает, какой оси параллельно само напряжение.

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет физический смысл. Нормальное напряжение возникает, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или наоборот сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц материала по плоскости рассматриваемого сечения.

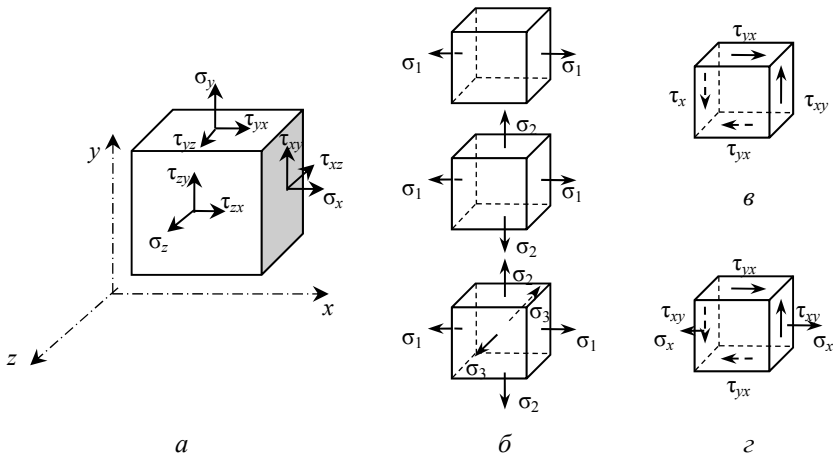


Рис. 3.4

Напряжения в опасных точках конструкции необходимо устанавливать с целью проверки на прочность. Для характеристики напряженного состояния в точке достаточно знать значения нормальных и касательных напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках.

Для исследования напряжений обычно выделяют элемент в виде параллелепипеда с бесконечно малыми гранями (рис. 3.4, *а*). Помимо такого общего напряженного состояния в точке могут существовать и частные случаи напряженных состояний: одноосное растяжение/сжатие, двухосное растяжение/сжатие, трехосное растяжение/сжатие (рис. 3.4, *б*, соответственно), чистый сдвиг (рис. 3.4, *в*) и их комбинации. Например, напряженное состояние одноосного растяжения/сжатия встречается при растяжении/сжатии стержня, а сочетание такого напряженного состояния с чистым сдвигом (рис. 3.4, *г*) – соответствует изгибу стержня.

### **3.3. Внутренние усилия, напряжения и деформации при одноосном растяжении/сжатии**

Рассмотрим случай осевого (центрального) растяжения или сжатия, когда внешние силы действуют по оси стержня.

Для определения внутренних усилий (продольных сил) применим метод сечений. Проведем какое-нибудь сечение, например I–I (рис. 3.5), и рассмотрим равновесие верхней отсеченной части. Воздействие нижней отброшенной части на верхнюю заменим продольной силой  $N_I$  и предварительно направим ее от сечения, то есть предположим, что сила является растягивающей.

Составим уравнение равновесия. Проектируя все силы, действующие на нижнюю часть, на направление, параллельное оси стержня, и приравнявая сумму проекций нулю, получаем:

$$N_I + F = 0, \text{ откуда: } N_I = -F.$$

Знак «минус» показывает, что продольная сила будет в данном случае не растягивающей, как мы предположили, а сжимающей.

Аналогично найдем продольную силу в сечении II–II:

$$N_{II} = P - F \text{ (растяжение).}$$

Наглядное представление о законе изменения продольных сил по длине стержня дает график (эпюра продольных сил), ось абсцисс

которого проводится параллельно оси стержня, а ось ординат ей перпендикулярна. По оси ординат в выбранном масштабе откладывают значения продольных сил (с учетом знаков) в поперечных сечениях стержня.

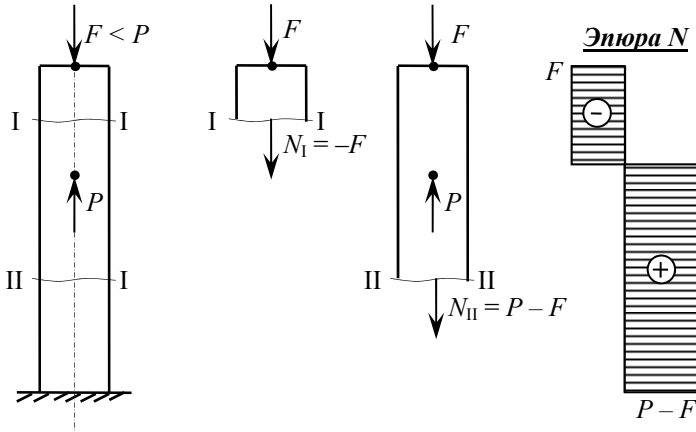


Рис. 3.5

Рассмотрим напряжения, возникающие в растянутом/сжатом стержне (рис. 3.6).

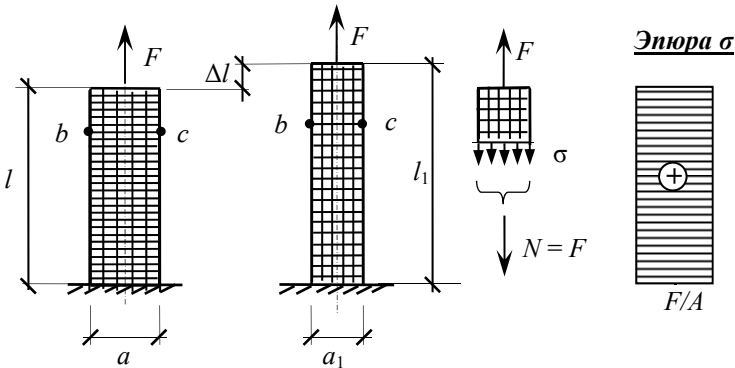


Рис. 3.6

В поперечных сечениях центрально сжатого/растянутого стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3.2)$$

Эта формула справедлива и для сжатия, с той только разницей, что сжимающие напряжения считаются отрицательными.

Стержень под действием двух равных по величине и противоположно направленных по его продольной оси сил  $F$  и  $N$  претерпевает деформацию растяжения, которая проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня. Его первоначальная длина  $l$  увеличивается на величину  $\Delta l$ , называемую *абсолютным удлинением*, и становится равной  $l_1$ .

Абсолютное удлинение стержня при заданном значении деформирующей силы возрастает с увеличением его первоначальной длины. Поэтому деформация при растяжении более полно характеризуется относительной величиной

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3.3)$$

которую называют *относительным удлинением*. При направлении внешних сил, противоположном указанному на рисунке, стержень испытывает деформацию сжатия. В этом случае параметр  $\Delta l$  называют *абсолютным укорочением*.

Абсолютное удлинение (укорочение) стержня при растяжении (сжатии) прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе, первоначальной длине стержня и обратно пропорционально модулю упругости  $E$  и площади поперечного сечения  $A$ :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{EA}. \quad (3.4)$$

Одновременно с продольной деформацией стержень претерпевает поперечную деформацию. При растяжении поперечные размеры



уменьшаются, при сжатии – увеличиваются. Относительная поперечная деформация:

$$\varepsilon' = \frac{b - b_1}{b}. \quad (3.5)$$

### 3.4. Механические характеристики и свойства материалов

Работоспособность конструкционных материалов при различных видах нагружения определяется величинами, которые называются механическими характеристиками.

Величины механических характеристик могут быть получены в лабораторных условиях доведением образцов до разрушения или чрезмерной деформации. Наиболее распространены испытания на растяжение и сжатие, так как они относительно просты, дают результаты, позволяющие с достаточной достоверностью судить о поведении материалов и при других видах деформации.

Количественная оценка физических свойств материала может быть сделана при помощи диаграммы растяжения в системе координат  $(\sigma, \varepsilon)$ . Условная диаграмма растяжения образца из пластичного материала (рис. 3.7, а) характеризуется следующими четырьмя участками.

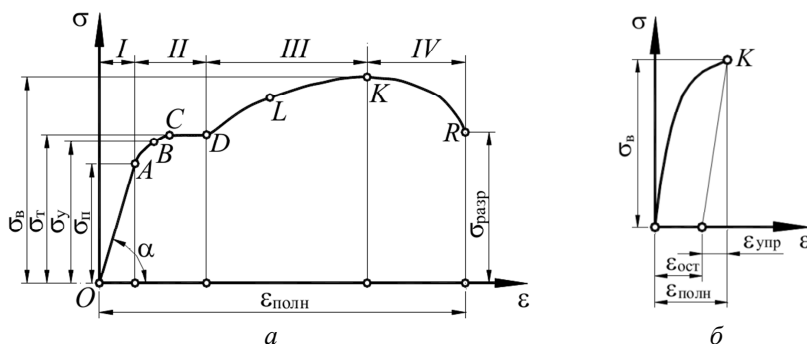


Рис. 3.7

Участок I соответствует упругим деформациям материала образца. На этом участке имеет место прямая пропорциональная зависи-

мость между напряжениями и деформациями, называемая законом Гука (прямая  $OA$ ):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (3.6)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем продольной упругости. Он имеет размерность напряжений (МПа) и характеризует способность материала сопротивляться упругой деформации при растяжении и сжатии. Величину модуля продольной упругости для различных материалов определяют экспериментально и приводят в справочниках.

Участок II начинается после точки  $A$ , когда диаграмма становится криволинейной. Однако до точки  $B$  деформации остаются упругими, то есть при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры. При дальнейшем увеличении нагрузки за точкой  $B$  появляются неупругие деформации. В точке  $C$  начинается процесс деформации детали без увеличения внешней нагрузки. Этот процесс называется процессом текучести материала.

Участок III ( $DK$ ) характеризуется увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. Этот участок называется зоной упрочнения. Заканчивается участок при достижении максимальной нагрузки, воспринимаемой образцом.

Участок IV начинается в точке  $K$  и заканчивается разрушением образца в точке  $R$ . Этот участок называется зоной разрушения образца.

Диаграмма растяжения *хрупких материалов* показана на рис. 3.7, б, где отклонение от закона Гука начинается при малых значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации.

В соответствии с диаграммой растяжения вводят следующие основные характеристики прочности пластичного материала:

1.  $\sigma_{\Pi}$  – *предел пропорциональности* – наибольшее напряжение, при котором сохраняет силу закон Гука.
2.  $\sigma_y$  – *предел упругости* – соответствует наибольшему напряжению, при котором материал еще сохраняет свои упругие свойства.
3.  $\sigma_T$  – *предел текучести* – такое напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки. Для ряда мате-

риалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие условного предела текучести, под которым подразумевают напряжение, вызывающее остаточную деформацию, равную 0,2 %.

4.  $\sigma_b$  – *предел прочности* (временное сопротивление) – максимальное напряжение, возникающее в образце до его разрушения.

Диаграммой растяжения можно воспользоваться для определения модуля упругости  $E$ . Исходя из соотношения, выражающего закон Гука, получим:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (3.7)$$

Следовательно, модуль упругости материала численно равен тангенсу угла наклона к горизонтали прямолинейного участка  $OA$  диаграммы растяжения.

За характеристику прочности хрупких материалов, как и в случае растяжения, принимается временное сопротивление.

### **3.5. Условия прочности и жесткости при растяжении/сжатии**

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически возникающие напряжения растяжения и сжатия не превышали некоторого безопасного или допускаемого напряжения, обозначаемого  $\sigma_p$ . То есть допускаемое напряжение является таким максимально возможным напряжением, при котором обеспечивается достаточная прочность и необходимая долговечность детали. Для того чтобы деталь обладала необходимой надежностью, нужно создать требуемый запас прочности по отношению к экспериментально определенным величинам предельных напряжений, при которых происходит разрушение детали или возникают недопустимые деформации.

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{пр}}{S_p}, \quad (3.8)$$

где  $\sigma_p$  – допускаемое напряжение;

$S_p$  – регламентированный нормами проектирования коэффициент запаса прочности или коэффициент безопасности;

$\sigma_{пр}$  – предельное напряжение материала.

В качестве исходной величины для определения предельных напряжений выбирают одну из механических характеристик материала:

– для пластичных материалов – предел текучести  $\sigma_T$ ;

– для хрупких материалов – временное сопротивление  $\sigma_B$ .

Таким образом, для оценки прочности стержня необходимо сопоставить действующее напряжение с допускаемым:

$$\sigma_{p(c)} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{p(c)p}. \quad (3.9)$$

где  $\sigma_{p(c)}$  – фактическое напряжение на растяжение или сжатие;

$\sigma_{p(c)p}$  – допускаемое напряжение на растяжение или сжатие.

Это неравенство называется условием прочности.

С помощью условия прочности обычно решают задачи двух типов.

1. Расчет на прочность существующей конструкции с определенными размерами. При этом определяют напряжения в деталях конструкции и величину их сравнивают с допустимым напряжением. Такой расчет носит название *проверочный расчет*.

2. Определение площади поперечного сечения стержня по заданной продольной силе и допускаемому напряжению:

$$A_{тр} \geq \frac{N}{\sigma_p}. \quad (3.10)$$

Такие расчеты называют расчетами на прочность.

В некоторых случаях работоспособность конструкции определяют не величиной предельной нагрузки или предельного напряжения, а величиной предельной деформации  $\Delta l_p$ . В этом случае находят фактическую деформацию и сопоставляют ее с предельной деформацией:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_p. \quad (3.11)$$

Неравенство называют условием жесткости, а расчеты, проводимые по этому неравенству, – расчетами на жесткость.

**Задача 3.1.** Составной брус с заданными геометрическими характеристиками находится под действием внешних сил (рис. 3.8). Требуется построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений по длине бруса. Осуществить поверочный расчет прочности и жесткости бруса, если  $\sigma_{пр} = 7 \text{ МПа}$ ,  $S_{p(c)} = 1,1$ . Допускаемое перемещение сечений бруса  $[w] = 3 \text{ мм}$ . Материал бруса считать упругим с  $E = 10^4 \text{ МПа}$ .

Решение:

1. Определим опорные реакции в заделке. Так как составной брус находится в состоянии осевого сжатия-растяжения, опорная реакция  $R$  (рис. 3.9) может быть определена при помощи уравнения проекций всех сил на вертикальную ось (положительное направление оси примем вверх):

$$\sum X = 0, \quad R + 50 - 80 - 70 = 0,$$

$$R = 100 \text{ кН.}$$

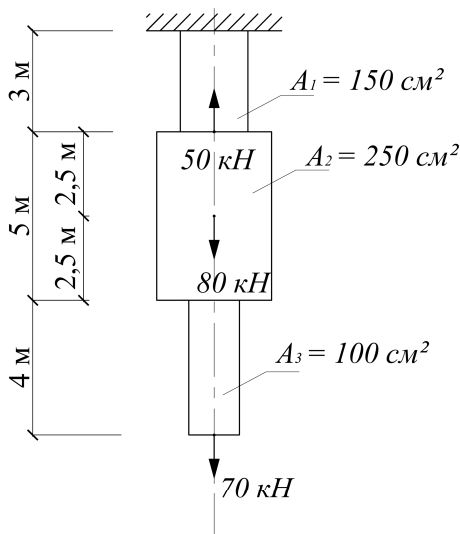


Рис. 3.8

2. Для построения требуемых эпюр покажем характерные сечения, в которых будем определять напряжения и перемещения. Рас-

положение характерных сечений зависит от расположения внешних сил, изменения геометрии сечения. Для рассматриваемого бруса сечения нумеруются, начиная от опоры (рис. 3.9).

3. Определение продольных сил в сечениях бруса будем вести по методу сечений. Удобно будет рассматривать ту часть бруса, относительно сечения, на которую приходится меньшее количество внешних сил.

В сечениях 8, 7, 6 и 5 продольная сила со стороны свободного конца бруса не меняется, имеет значение 70 кН и положительный знак, т. к. внешняя нагрузка направлена от сечения.

$$N_8 = N_7 = N_6 = N_5 = +70 \text{ кН.}$$

В сечениях 4 и 3 продольная сила увеличивается на 80 кН:

$$N_4 = N_3 = +70 + 80 = +150 \text{ кН.}$$

В сечениях 2 и 1 продольная сила со стороны защемленного конца бруса имеет значение 100 кН и положительный знак, т. к. опорная реакция направлена от сечения.

$$N_2 = N_1 = +100 \text{ кН.}$$

Полученные значения продольных сил отображены в виде эпюры  $N$  на рис. 3.9.

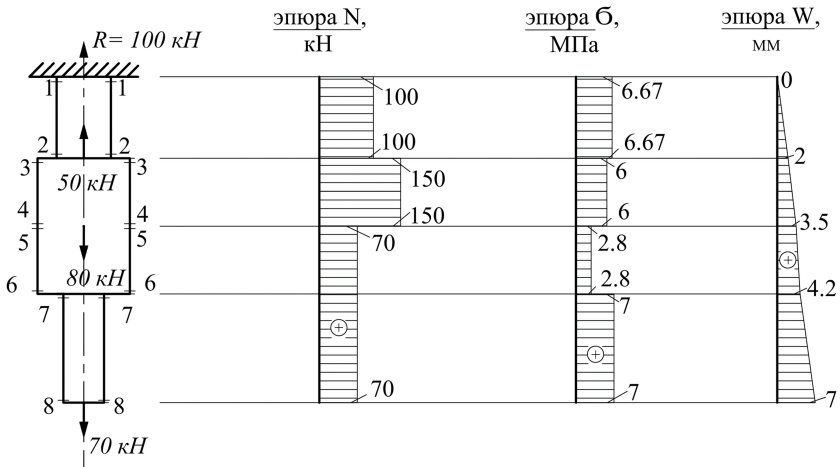


Рис. 3.9

4. Нормальные напряжения в сечениях бруса определяем по формуле (3.2).

$$\sigma_8 = \sigma_7 = \frac{N_8}{A_3} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ Н}}{100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 7 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = \sigma_5 = \frac{N_6}{A_2} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ Н}}{250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 2,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \sigma_3 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{150 \cdot 10^3 \text{ Н}}{250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ Н}}{150 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 6,67 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 6,67 \text{ МПа}.$$

По этим значениям построена эпюра  $\sigma$  на рис. 3.9.

5. Проверим прочность бруса на растяжение-сжатие на каждом участке по формуле (3.9), где  $\sigma_{p(c)} = \frac{\sigma_{np}}{S_{p(c)}} = \frac{7 \text{ МПа}}{1,1} = 6,364 \text{ МПа}$ .

Видно, что на участках 1–2 и 7–8 прочность бруса не обеспечена, так как

$$\sigma_8 = \sigma_7 = 7 \text{ МПа} \leq \sigma_{p(c)p} = 6,364 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 = 6,67 \text{ МПа} \leq \sigma_{p(c)p} = 6,364 \text{ МПа}.$$

На этих участках необходимо увеличить площадь сечения бруса.

6. Найдем абсолютные деформации участков бруса, имеющих постоянную площадь сечения и неизменное продольное усилие, по формуле (3.4):

$$\Delta l_{1-2} = \frac{N_1 \cdot l_{1-2}}{E \cdot A_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 3 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 150 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{3-4} = \frac{N_3 \cdot l_{3-4}}{E \cdot A_2} = \frac{150 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2,5 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,5 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{5-6} = \frac{N_5 \cdot l_{5-6}}{E \cdot A_2} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2,5 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{7-8} = \frac{N_7 \cdot l_{7-8}}{E \cdot A_3} = \frac{70 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 4 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,8 \text{ мм}.$$

7. Найдем перемещения характерных сечений. За точку отсчета примем сечение 1, так как в этом сечении брус защемлен, перемещение в этом сечении отсутствует:

$$w_1 = 0 \text{ мм}, \quad w_2 = w_1 + \Delta l_{1-2} = 0 + 2 = 2 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_2, \quad w_4 = w_3 + \Delta l_{3-4} = 2 + 1,5 = 3,5 \text{ мм};$$

$$w_5 = w_4, \quad w_6 = w_5 + \Delta l_{5-6} = 3,5 + 0,7 = 4,2 \text{ мм};$$

$$w_7 = w_6, \quad w_8 = w_7 + \Delta l_{7-8} = 4,2 + 2,8 = 7 \text{ мм}.$$

Вычисленные перемещения отражены на эпюре  $w$  (рис. 3.9).

Проверим, выполняется ли условие жесткости:

$$w_{\max} = 7 \text{ мм} > [w] = 3 \text{ мм}.$$

Следовательно, жесткость составного бруса не обеспечена. Требуется либо увеличить размеры поперечного сечения, либо выбрать материал с более высоким модулем упругости.

Продемонстрируем подбор сечения из условий прочности на следующем примере.

**Задача 3.2.** Для составного бруса с предварительно заданными геометрическими характеристиками (рис. 3.10) требуется построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осуществить расчет на прочность. Известно, что сечение бруса прямоугольное, с размерами  $b \times h$ , причем  $h = 2b$ .  $\sigma_{\text{пр}} = 6,6 \text{ МПа}$ ,  $S_p = 1,1$ .

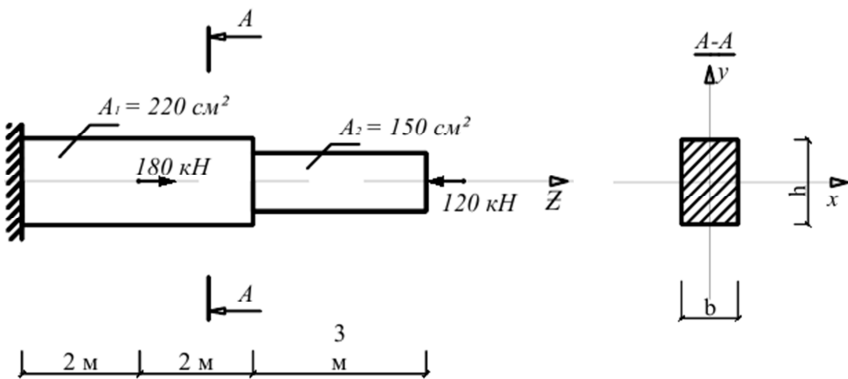


Рис. 3.10



Решение:

1. Опорные реакции в консольно-защемленном брус определять не будем. При построении эпюр продольных сил учитывать будем только силы, расположенные от свободного конца до исследуемого сечения.

2. Характерные сечения, в которых будем определять напряжения и перемещения, показаны на рис. 3.11.

3. Продольные силы в сечениях бруса определяем по методу сечений. В сечениях 6, 5, 4 и 3 продольная сила со стороны свободного конца бруса не меняется, имеет значение 120 кН и отрицательный знак, т. к. внешняя нагрузка направлена к сечению (сжимает брус):  $N_6 = N_5 = N_4 = N_3 = -120$  кН.

В сечениях 2 и 1 продольная сила увеличивается на 180 кН:

$$N_2 = N_1 = -120 + 180 = +60 \text{ кН.}$$

Строим эпюру  $N$  (рис. 3.11), откладывая вычисленные значения перпендикулярно оси стержня в соответствующих сечениях.

4. Нормальные напряжения в сечениях бруса:

$$\sigma_6 = \sigma_5 = \frac{N_6}{A_2} = \frac{-120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{150 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -8 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = -8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \sigma_3 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{-120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -5,45 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = -5,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,72 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 2,72 \text{ МПа.}$$

По этим значениям построена эпюра  $\sigma$  на рис. 3.11.

5. Видно, что на участке 5–6 брус испытывает перенапряжение, так как  $\sigma_5 = \sigma_6 = 7 \text{ МПа} > \sigma_{p(c)p} = 6 \text{ МПа}$ ,

$$\text{где } \sigma_{p(c)} = \frac{\sigma_{np}}{S_{p(c)}} = \frac{6,6 \text{ МПа}}{1,1} = 6 \text{ МПа.}$$

На участке 1–2 испытывает недонапряжение, так как

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2,72 \text{ МПа} < \sigma_{p(c)p} = 6 \text{ МПа.}$$

На этих участках необходимо изменить площадь сечения бруса.

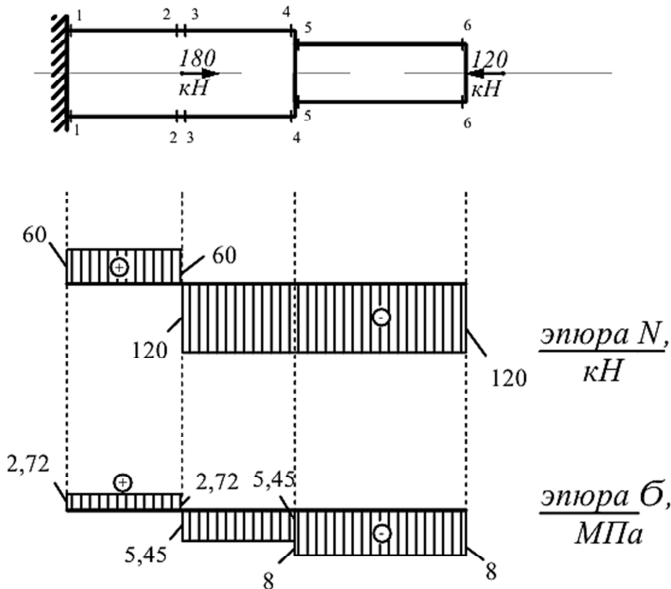


Рис. 3.11

6. Подбор сечений бруса осуществляем на каждом участке по формуле (3.10):

$$A_{тр,1} \geq \frac{N_1}{\sigma_p} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ Н}}{6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2;$$

$$A_{тр,2} = 220 \text{ см}^2;$$

$$A_{тр,3} \geq \frac{N_5}{\sigma_p} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 200 \text{ см}^2.$$

Тогда брус примет вид, изображенный на рис. 3.12.

7. Подберем размеры прямоугольного поперечного сечения:

Для первой ступени:  $A_{тр,1} \geq 100 \text{ см}^2$ , при этом  $A_{тр,1} = b \cdot h = b \cdot 2b = 2b^2$ . Тогда  $2b^2 \geq 100 \text{ см}^2 \Rightarrow b \geq 7,071$ . Примем  $b = 7,5 \text{ см}$ . Тогда  $h = 15 \text{ см}$ .

Аналогично, получим: для второй ступени –  $b \times h = 12,5 \times 25$  см; для третьей ступени –  $b \times h = 10 \times 20$  см.

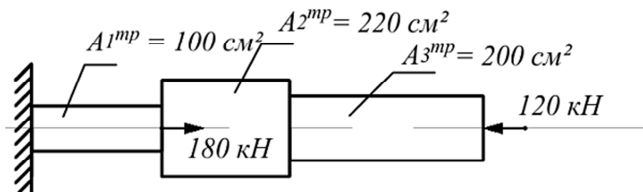


Рис. 3.12

### 3.6. Понятие о сдвиговых деформациях и касательных напряжениях. Закон Гука при сдвиге

Сдвигом называют деформацию, представляющую собой искажение первоначально прямого угла малого элемента бруса (рис. 3.13) под действием касательных напряжений  $\tau$ . Развитие этой деформации приводит к разрушению, называемому срезом или, применительно к древесине, скалыванием. Примером сдвига является резка полосы ножницами. На сдвиг работают жесткие соединения конструкций – сварные, заклепочные и так далее.

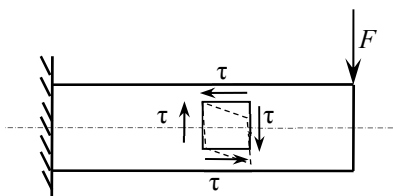


Рис. 3.13

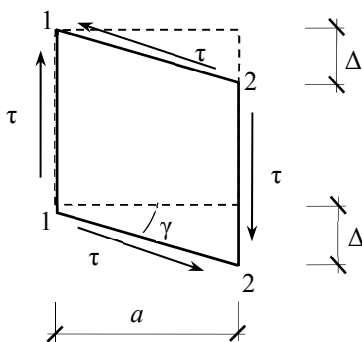


Рис. 3.14

Напряженное состояние, при котором на гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения  $\tau$ , называется чистым сдвигом.

Деформация сдвига оценивается взаимным смещением  $\Delta$  граней 1–1 и 2–2 малого элемента (рис. 3.14), называемым абсолютным сдвигом и относительным сдвигом (углом сдвига)  $\gamma$ :

$$\frac{\Delta}{a} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma, \quad (3.12)$$

являющимся безразмерной величиной.

В предположении равномерного распределения касательных напряжений по сечению площадью  $A$ , они определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (3.13)$$

где  $Q$  – поперечная сила в данном сечении.

Условие прочности записывается по минимальной площади среза  $A_{\min}$ , отражающей минимальное число соединяющих элементов (заклепок, болтов, штифтов и т. д.) или минимальную длину сварного шва:

$$\tau = \frac{Q}{A_{\min}} \leq [\tau]. \quad (3.14)$$

Величина допускаемых напряжений  $[\tau]$  зависит от свойств материала и устанавливается в пределах  $[\tau] = 0,45 \dots 0,55 \cdot [\sigma]$ .

В пределах упругого деформирования касательное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу, т. е. считается справедливым закон Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma. \quad (3.15)$$

где  $G$  – модуль сдвига, характеризующий жесткость материала при сдвиге,  $\text{Н/м}^2$ .

### 3.7. Практические расчеты на сдвиг (срез) и смятие

На практике целый ряд деталей и элементов конструкций работает в таких условиях, что внешние силы стремятся их разрушить

именно путем сдвига. Простейшими примерами подобных деталей являются болтовые, заклепочные и сварные соединения.

При расчете болтовых или заклепочных соединений учитывается также смятие контактирующих поверхностей:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (3.16)$$

где  $A_{\text{см}}$  – площадь проекции поверхности контакта на диаметрально-плоскую плоскость,  $\text{см}^2$ .

При выполнении проектного расчета, то есть при определении нужного диаметра заклепки, болта или при определении их количества необходимо использовать условие прочности на срез и на смятие. Из двух значений принимается большее число с округлением его до ближайшего целого в большую сторону.

*Примечания.* 1. Так как болты и заклепки ослабляют соединяемые листы, последние проверяют на разрыв в ослабленных сечениях:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{осл}}} \leq [\sigma_p], \quad (3.17)$$

2. При расчетах сварных швов считается, что в разрезе угловой шов имеет форму прямоугольного равнобедренного треугольника и разрушение шва происходит по его минимальному сечению, высота которого  $t = \delta \cos 45^\circ \approx 0,7\delta$ , где  $\delta$  – минимальная толщина соединяемых листов.

*Задача 3.3.* Два стальных листа толщиной  $\delta_1 = 10$  мм и  $\delta_2 = 8$  мм, соответственно, соединяются при помощи одного ряда заклепок диаметром  $d = 16$  мм (рис. 3.15, а).

Передаваемое от одного листа к другому усилие составляет  $F = 120$  кН. Необходимо определить число заклепок из условий прочности соединения на срез и смятие, проверить прочность соединяемых листов на растяжение по ослабленному сечению. Допускаемые напряжения:  $[\sigma_p] = 160$  МПа – на растяжение для стального листа;  $[\sigma_{\text{см}}] = 300$  МПа – на смятие заклепки;  $[\tau_c] = 100$  МПа – на срез заклепки.

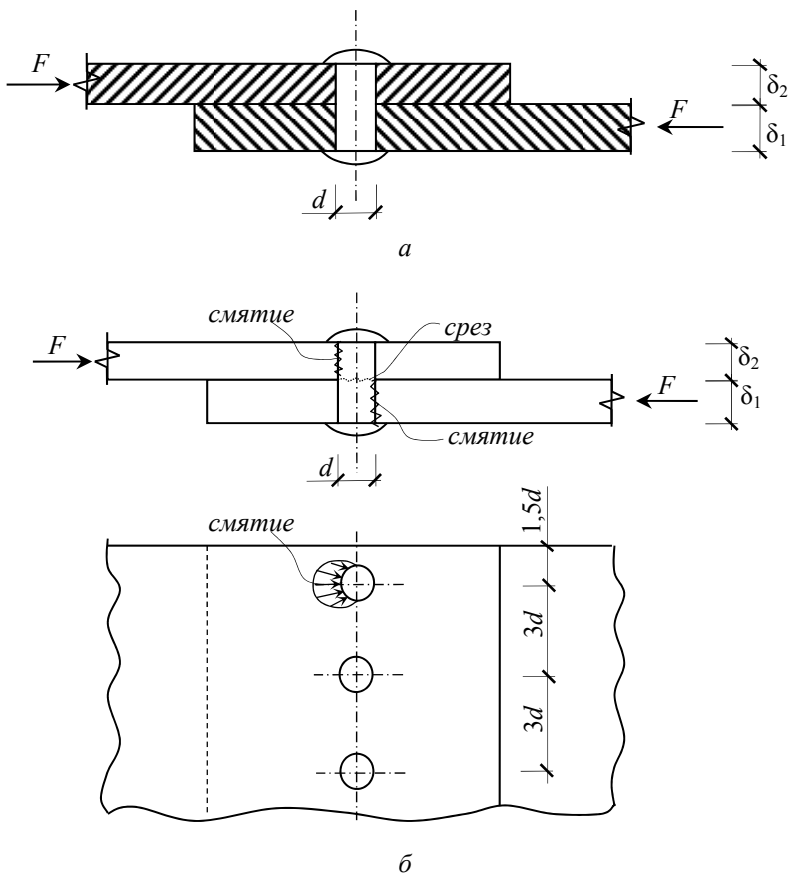


Рис. 3.15

Решение:

1. Определим количество заклепок из условия прочности на срез (формула (3.14)). Необходимая площадь заклепок (площадь среза всех заклепок в соединении, см. рис. 3.15, б), тогда:

$$\begin{aligned}
 A_{\min} &\geq \frac{Q}{[\tau]} = \frac{F}{[\tau_c]} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{100 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{100 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = \\
 &= 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 12 \text{ см}^2.
 \end{aligned}$$

Площадь одной заклепки составит

$$A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,6^2}{4} = 2,0096 \text{ см}^2.$$

Если обозначить  $z$  – количество заклепок, то  $z \cdot A_3 = A_{\min} \geq 12 \text{ см}^2$ .

$$\text{Следовательно, } z = \frac{A_{\min}}{A_3} \geq \frac{12 \text{ см}^2}{2,0096} = 5,97.$$

Принимаем  $z = 6$ , т. е. шести заклепок будет достаточно, чтобы прочность соединения на срез была обеспечена.

2. Из условия прочности на смятие заклепки (формула (3.16)):

$$A_{\text{см}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{см}}]},$$

где  $A_{\text{см}}$  – площадь смятия.

Смятие заклепок происходит неравномерно по боковой поверхности заклепки (рис. 3.15, б). В практических расчетах за площадь смятия одной заклепки принимается  $d \cdot \delta_{\min}$ , т. е. площадь сечения, проходящего по диаметру заклепки. Здесь  $\delta_{\min}$  – минимальная из толщин соединяемых листов. Тогда  $A_{\text{см}} = z \cdot d \cdot \delta_{\min}$ . Следовательно:

$$z \cdot d \cdot \delta_{\min} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{см}}]} \Rightarrow z \geq \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{300 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}} = 3,125.$$

Четырех заклепок будет достаточно, чтобы прочность соединения на смятие была обеспечена. Однако расчет на срез предполагает постановку 6-ти заклепок.

3. Прочность соединяемых листов на растяжение проверяется по ослабленному заклепками сечению для наиболее тонкого из соединяемых листов.

Для того чтобы определить площадь поперечного сечения листа, ослабленного отверстиями под заклепки, необходимо предварительно расставить заклепки в соответствии с конструктивными требованиями и высчитать требуемую ширину листа. Расстояние между центрами заклепок должно быть не менее трех диаметров заклепок,

расстояние от центра крайней заклепки до края листа – не менее  $1,5d$  (рис. 3.15, б).

$$b \geq 5 \cdot 3 \cdot d + 2 \cdot 1,5 \cdot d = 18 \cdot d = 18 \cdot 16 \text{ мм} = 288 \text{ мм.}$$

Принимаем  $b = 300 \text{ мм}$ .

Тогда:

$$A_{\text{осл}} = (b - 6d) \cdot \delta_{\text{мин}} = (300 \text{ мм} - 6 \cdot 16 \text{ мм}) \cdot 8 \text{ мм} = 1632 \text{ мм}^2.$$

Прочность проверяем по формуле (3.17):

$$\sigma_p = \frac{N}{A_{\text{осл}}} = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Н}}{1632 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 73,5 \text{ МПа} \leq [\sigma_p] = 160 \text{ МПа.}$$

Прочность листа на растяжение обеспечена.

*Задача 3.4.* Проверить прочность болта (рис. 3.16, а) на выдергивание. Допускаемое напряжение на срез болта –  $[\tau_c] = 65 \text{ МПа}$ , на смятие –  $[\sigma_{\text{см}}] = 175 \text{ МПа}$ .

Решение:

1. Срез при выдергивании болта происходит в шляпке болта по поверхности, являющейся продолжением поверхности ножки болта (рис. 3.16, б). Площадь среза тогда можно найти, как  $A_c = \pi \cdot d \cdot h = 3,14 \cdot 12 \text{ мм} \cdot 7,5 \text{ мм} = 282,6 \text{ мм}^2$ .

Прочность проверяется по формуле (3.14):

$$\tau = \frac{F}{A_c} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Н}}{282,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 70,77 \text{ МПа} > [\tau] = 65 \text{ МПа.}$$

Следовательно, подбираем болт с большим диаметром резьбы:  $d = 14 \text{ мм}$ ,  $D = 21 \text{ мм}$ ,  $h = 8,8 \text{ мм}$ .

$$A_c = \pi \cdot d \cdot h = 3,14 \cdot 14 \text{ мм} \cdot 8,8 \text{ мм} = 386,85 \text{ мм}^2;$$

$$\tau = \frac{F}{A_c} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Н}}{386,85 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 51,7 \text{ МПа} < [\tau] = 65 \text{ МПа.}$$

Прочность болта на срез при выдергивании обеспечена.



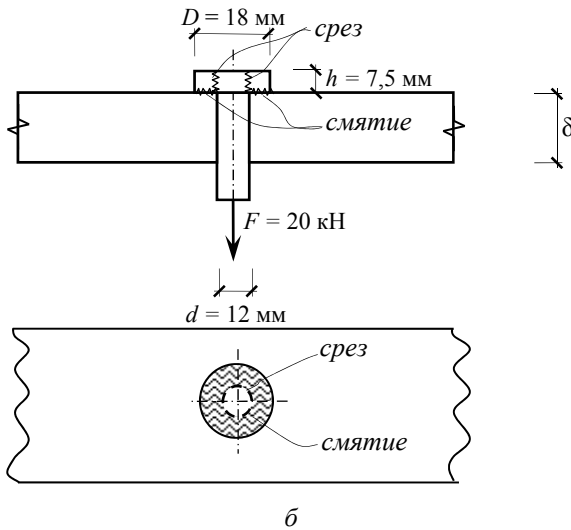
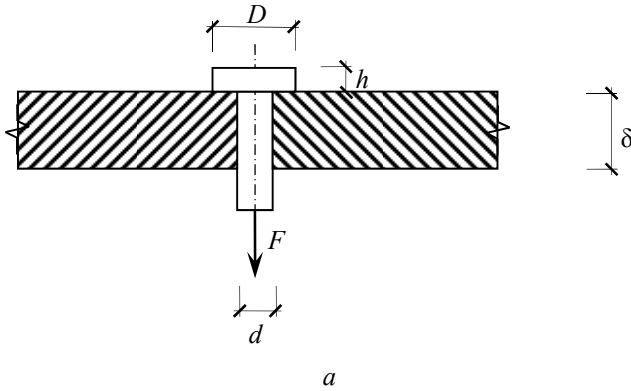


Рис. 3.16

2. Смятие при выдергивании болта происходит под шляпкой болта (рис. 3.16, б). Площадь смятия можно найти, как

$$A_{\text{см}} = \frac{\pi \cdot (D - d)^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (21 - 14)^2}{4} = 38,46 \text{ мм}^2.$$

Прочность проверяется по формуле (3.16):

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Н}}{38,46 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 520 \text{ МПа} > [\sigma_{\text{см}}] = 175 \text{ МПа}.$$

Подбираем требуемый диаметр болта из условия прочности на смятие:

$$A_{\text{см}} \geq \frac{F}{[\sigma_{\text{см}}]} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Н}}{175 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 114,29 \text{ мм}^2 \Rightarrow$$

$$A_{\text{см}} = \frac{\pi \cdot (D-d)^2}{4} \geq 114,29 \text{ мм}^2 \Rightarrow D-d \geq 12,066 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d = 27 \text{ мм}$ ,  $D = 41 \text{ мм}$ ,  $h = 17 \text{ мм}$ .

*Задача 3.5.* Два листа толщиной 10 мм соединяются при помощи двух накладок толщиной 6 мм, при помощи углового шва (рис. 3.17, а). Передаваемая через соединение нагрузка – 60 кН, ширина соединяемых листов – 120 мм. Проверить прочность сварного соединения, если допускаемое напряжение для металла сварки составляет  $[\tau_c] = 80 \text{ МПа}$ .

Решение: Срез сварного шва происходит по наименьшей площади шва (рис. 3.17, б):  $A_c = 0,7 \cdot K \cdot b = 0,7 \cdot 6 \cdot 120 = 504 \text{ мм}^2$ .

Прочность проверяется по формуле (3.14):

$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{мин}}} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ Н}}{504 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2} = 59,52 \text{ МПа} \leq [\tau] = 80 \text{ МПа},$$

где  $Q$  – усилие, приходящееся на один сварной шов:

$$Q = \frac{F}{2} = \frac{60 \text{ кН}}{2} = 30 \text{ кН}.$$

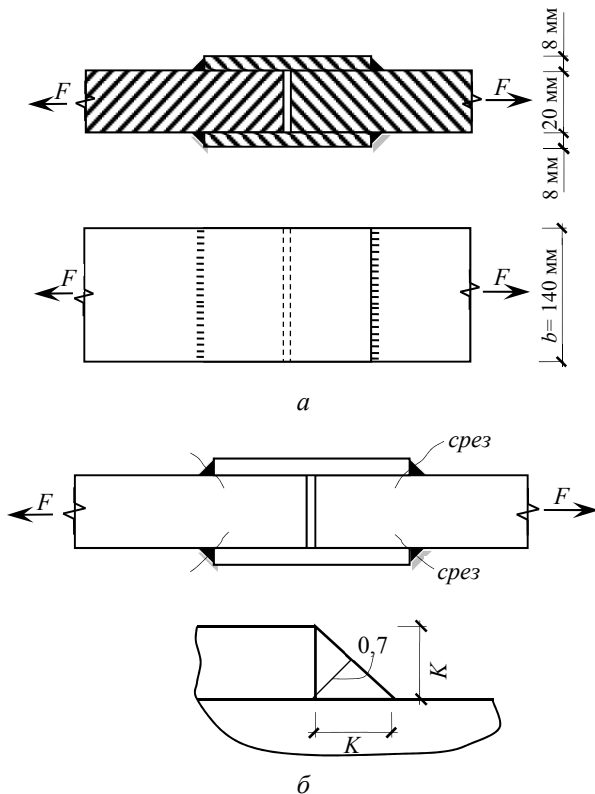


Рис. 3.17

### 3.8. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня

#### 3.8.1. Геометрические характеристики простых сечений

Прочность и жесткость изгибаемых стержней зависит не только от вида материала и размеров сечения, но и от формы поперечных сечений и их ориентации. В расчетах конструкций на прочность и жесткость помимо площади поперечного сечения необходимо знать такие характеристики плоских фигур, как статический момент, осевой и полярный моменты инерции, момент сопротивления сечения.

Рассмотрим основные геометрические характеристики поперечных сечений изгибаемого стержня.

*Площадь сечения* является одной из геометрических характеристик, используемых, главным образом, в расчетах на растяжение и сжатие. Площадь является простейшей геометрической характеристикой сечения, имеет размерность  $\text{м}^2$ . Формулы для определения площадей основных фигур известны и сведены в таблицу. Для сечений, составленных из профилей стандартного проката, площадь каждого профиля и остальные необходимые для расчетов размеры принимаются по таблицам ГОСТов на прокатную сталь.

Известно, что чем дальше волокна изгибаемого стержня удалены от оси изгиба, тем больше они деформируются, а следовательно, тем большее напряжение они испытывают. Можно провести параллель между напряжением в разных точках по высоте сечения стержня с моментом силы. Чем больше плечо силы относительно оси, тем больше ее момент относительно этой оси. По аналогии, чем дальше от оси изгиба отстоит точка в сечении, тем большее напряжение в ней возникает при попытке изогнуть стержень относительно этой оси.

*Статическим моментом* площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок ( $dA$ ) на расстояния ( $x_i$  или  $y_i$ ) от них до этой оси (рис. 3.18):

$$S_x = \sum y_i dA, \quad S_y = \sum x_i dA \quad (3.18)$$

или для всего сечения:

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c, \quad (3.19)$$

где  $y_c$  – расстояние от центра тяжести всего плоского сечения до оси  $x$ ;  
 $x_c$  – расстояние от центра тяжести всего сечения до оси  $y$ .

В зависимости от расположения сечения относительно осей координат статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Любая ось, проходящая через центр тяжести сечения, называется центральной. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

Статические моменты служат для определения положения центра тяжести сечения. Единица измерения статического момента площади – метр кубический (м<sup>3</sup>).

*Полярным моментом инерции* плоской фигуры относительно полюса (точки), лежащего в той же плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок ( $dA$ ) этой фигуры на квадрат их расстояний ( $\rho_i^2$ ) до полюса:

$$I_p = \sum \rho_i^2 dA. \quad (3.20)$$

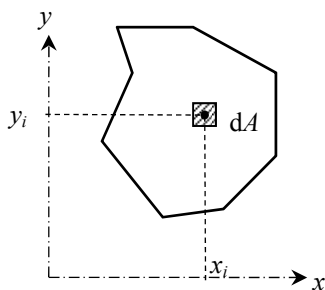


Рис. 3.18

*Осевым моментом инерции* плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок ( $dA$ ) на квадрат расстояний от них ( $x_i^2$  или  $y_i^2$ ) до этой оси (рис. 3.18):

$$I_x = \sum y_i^2 dA, \quad I_y = \sum x_i^2 dA. \quad (3.21)$$

*Центробежным моментом инерции* плоской фигуры относительно осей, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок ( $dA$ ) на произведение расстояний от них ( $x_i$  или  $y_i$ ) до этой оси (рис. 3.18):

$$I_{xy} = \sum x_i \cdot y_i dA. \quad (3.22)$$

Очевидно, что осевой, полярный и центробежный моменты инерции выражаются в одинаковых единицах – м<sup>4</sup>. Если сложить осевые моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных осей, то получим полярный момент инерции этой фигуры относительно точки пересечения этих осей (начала координат), т. е.:

$$I_x + I_y = I_p. \quad (3.23)$$

Момент инерции относительно центральной оси называется *центральной моментом инерции*.

Если оси координат поворачивать в своей плоскости вокруг начала координат, то полярный момент инерции останется неизменным, а осевые моменты будут изменяться, при этом их сумма останется величиной постоянной. При определенном положении осей один из осевых моментов достигнет максимального значения, а другой – минимального. Такие оси называют *главными* осями инерции. Можно также заметить, что относительно главных осей инерции фигуры центробежный момент инерции окажется равным нулю. Если фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является главной осью. Момент инерции относительно главной оси называется *главным* моментом инерции.

При расчетах изгибаемых элементов необходимо установить геометрические характеристики относительно главных центральных осей сечений. Для простейших, наиболее часто встречающихся при расчетах, плоских сечений центральные осевые моменты инерции могут быть найдены по известным формулам:

Для прямоугольника размером $b \times h$ :	$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{b^3h}{12}$
Для квадрата со стороной $a$ :	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$
Для круга диаметром $d$ :	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$
Для кольцевого сечения размером $D \times d$ :	$I_x = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$

Если же необходимо узнать вычислить момент инерции простой фигуры относительно какой-либо другой оси, то необходимо воспользоваться формулами для изменения моментов инерции при параллельном переносе и повороте координатных осей  $x$  и  $y$ . Момент инерции относительно оси  $x$ , например, равен сумме момента инерции относительно центральной оси  $x_c$  сечения, параллельной оси  $x$ ,

и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями  $x$  и  $x_i$ :

$$I_x = I_{x_i} + y_i^2 \cdot A_i; \quad I_y = I_{y_i} + x_i^2 \cdot A_i. \quad (3.24)$$

Зависимость между моментами инерции относительно осей  $x_i, y_i$  и моментами инерции относительно осей  $x, y$ , повернутых на угол  $\alpha$  ( $I_x > I_y$ , положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от осей  $x_i, y_i$  против часовой стрелки):

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_i} \cos^2 \alpha + I_{y_i} \sin^2 \alpha - I_{x_i y_i} \sin 2\alpha; \\ I_y &= I_{x_i} \sin^2 \alpha + I_{y_i} \cos^2 \alpha + I_{x_i y_i} \sin 2\alpha; \\ I_{x_y} &= \frac{I_{x_i} - I_{y_i}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_i y_i} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.25)$$

*Осевой момент сопротивления* относительно рассматриваемой оси – величина, равная моменту инерции относительно той же оси, отнесенному к расстоянию до наиболее удаленной от этой оси точки:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (3.26)$$

*Полярный момент сопротивления*

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (3.27)$$

Осевой и полярный моменты сопротивления имеют размерность  $\text{м}^3$ .

### **3.8.2. Геометрические характеристики составных сечений**

При определении геометрических характеристик составных сечений сложная геометрическая фигура мысленно разбивается на простые по форме части, геометрические характеристики которых известны, либо определяются по известным формулам.

В этом случае площадь составного сечения может быть определена, как сумма площадей простых фигур:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (3.28)$$

Статический момент составного сечения относительно некоторых осей определяется, как алгебраическая сумма статических моментов отдельных ее частей относительно этих осей:

$$S_x = \sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i. \quad (3.29)$$

Чтобы найти центр тяжести составного сечения, используют формулы:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (3.30)$$

Момент инерции сечения сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций его составных частей относительно той же оси:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_x^i, \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_y^i. \quad (3.31)$$

Если главные оси сечения обозначить через  $x_c$  и  $y_c$ , то **главные моменты инерции** определяются по выражениям:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= I_x \cos^2 \alpha_c + I_y \sin^2 \alpha_c - I_{xy} \sin 2\alpha_c; \\ I_{y_c} &= I_x \sin^2 \alpha_c + I_y \cos^2 \alpha_c + I_{xy} \sin 2\alpha_c; \\ I_{x_c y_c} &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$



Угол поворота  $\alpha_c$  можно определить из выражения:

$$\operatorname{tg}2\alpha_c = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (3.33)$$

Главные моменты инерции  $I_{x_c}$  и  $I_{y_c}$  могут быть также определены по формулам:

$$I_{x_c} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}; \quad I_{y_c} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}. \quad (3.34)$$

### ***3.8.3. Алгоритм расчета геометрических характеристик плоских сечений***

При определении геометрических характеристик плоских сечений любой сложности важнейшей задачей является определение положения главных центральных осей, величин главных центральных моментов инерции и моментов сопротивления сечений.

Можно рекомендовать следующий порядок расчета:

1. Заданное сечение вычерчивается в определенном масштабе и разбивается на простые элементы (сечения), геометрические характеристики которых представлены в сортаменте, либо могут быть вычислены по элементарным формулам.

2. Принимается начальная прямоугольная система осей  $x_0, y_0$ . Для упрощения вычислений удобно, если начальные оси проходят так, чтобы составное сечение оказалось в первой четверти выбранных осей, либо проходят через центр тяжести одного или нескольких простых элементов сечения. Все размеры, необходимые для вычисления геометрических характеристик элементов и определения координат их центров тяжести, указываются на чертеже.

3. Определяются координаты центров тяжести элементов сечения относительно начальных осей  $x_0, y_0$  и их геометрические характеристики  $A_i, I_{x_i}, I_{y_i}, I_{x_i y_i}$  относительно собственных центральных осей  $x_i, y_i$ .

4. Определяются координаты центра тяжести всего сечения по формулам (3.30). Центральные оси  $x_c, y_c$  показываются на чертеже.

5. Для определения центральных моментов инерции предварительно должны быть вычислены координаты центров тяжести элементов сечения  $x_{ci}, y_{ci}$  относительно центральных осей сечения:

6. Вычисляются геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n I_x^i = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + y_{ci}^2 \cdot A_i); & I_y &= \sum_{i=1}^n I_y^i = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + x_{ci}^2 \cdot A_i); \\ I_{xy} &= \sum_{i=1}^n I_{xy}^i = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i). \end{aligned} \quad (3.35)$$

*Замечание:* площадь, осевые и полярный моменты инерции являются строго положительными характеристиками сечений. Однако для сечений с отверстиями бывает удобным считать отверстия элементами сечений с отрицательными характеристиками.

7. Определяем положение главных центральных осей по формуле (3.33) и значения главных центральных моментов инерции  $I_{x_c}, I_{y_c}$  по формулам (3.32).

8. Для определения моментов сопротивления сложного сечения по формулам (3.26), (3.27) необходимо найти точки, наиболее удаленные от главных центральных осей. Их координаты относительно главных центральных осей  $x_{\max}$  и  $y_{\max}$ , могут быть определены графически (по чертежу, выполненному в масштабе), либо вычислены по формулам:

$$\begin{aligned} x_{\max} &= x \cdot \cos \alpha_c + y \cdot \sin \alpha_c; \\ y_{\max} &= y \cdot \cos \alpha_c - x \cdot \sin \alpha_c. \end{aligned} \quad (3.36)$$

*Задача 3.6.* Для сечения, показанного на рис. 3.19, а, определить:

- 1) положение центра тяжести сечения;
- 2) главные центральные моменты инерции сечения;
- 3) моменты сопротивления сечения.

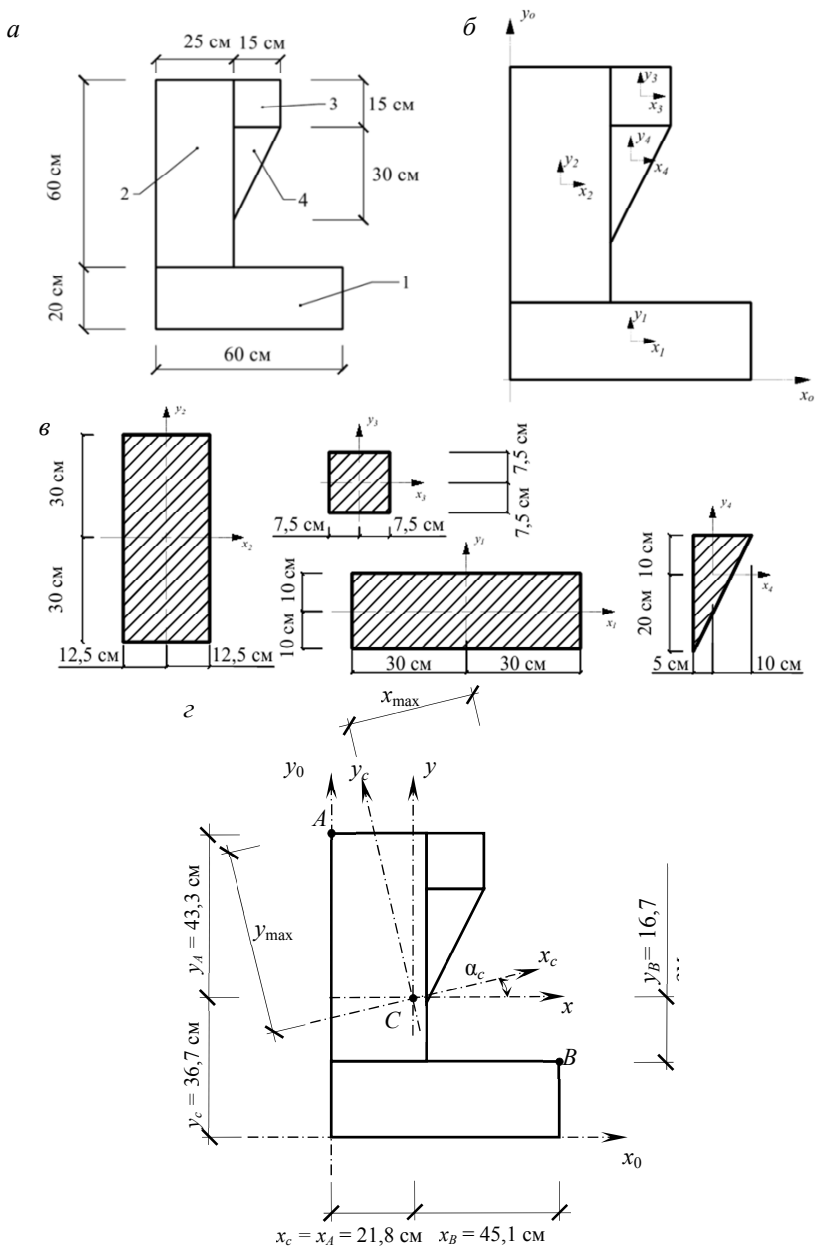


Рис. 3.19

Решение:

1. Сложное сечение состоит из четырех простых фигур. Их нумерация показана на рис. 3.19, а. Размеры, положение центров тяжести каждой простой фигуры показаны на рис. 3.19, б и 3.19, в.

Вычисляем основные геометрические характеристики для каждой простой фигуры.

Прямоугольник 1	Прямоугольник 2
$A_1 = b \times h = 60 \times 20 = 1200 \text{ см}^2,$	$A_2 = b \times h = 25 \times 60 = 1500 \text{ см}^2,$
$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40\,000 \text{ см}^4,$	$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{25 \cdot 60^3}{12} = 450\,000 \text{ см}^4,$
$I_{y_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{60^3 \cdot 20}{12} = 360\,000 \text{ см}^4,$	$I_{y_2} = \frac{b^3h}{12} = \frac{25^3 \cdot 60}{12} = 78\,125 \text{ см}^4,$
$I_{x_1y_1} = 0$	$I_{x_2y_2} = 0$
Квадрат 3	Треугольник 4
$A_3 = b^2 = 15^2 = 225 \text{ см}^2,$	$A_4 = \frac{1}{2}b \times h = \frac{1}{2}15 \times 30 = 225 \text{ см}^2,$
$I_{x_3} = \frac{b^4}{12} = \frac{15^4}{12} = 4218,75 \text{ см}^4,$	$I_{x_4} = \frac{bh^3}{36} = \frac{15 \cdot 30^3}{36} = 11\,250 \text{ см}^4,$
$I_{y_3} = I_{x_3} = 4218,75 \text{ см}^4,$	$I_{y_4} = \frac{b^3h}{36} = \frac{15^3 \cdot 30}{36} = 2812,5 \text{ см}^4,$
$I_{x_3y_3} = 0$	$I_{x_4y_4} = \frac{b^2h^2}{72} = \frac{15^2 \cdot 30^2}{72} = 2812,5 \text{ см}^4$

2. Задаем положение начальных осей  $x_0, y_0$  так, чтобы составное сечение оказалось в первой четверти (рис. 3.19, б).

Найдем положение центров тяжести каждой простой фигуры относительно начальных осей:

$$x_1 = 30 \text{ см}, \quad y_1 = 10 \text{ см}; \quad x_2 = 12,5 \text{ см}, \quad y_2 = 20 + 30 = 50 \text{ см};$$

$$x_3 = 25 + 7,5 = 32,5 \text{ см}, \quad y_3 = 20 + 60 - 7,5 = 72,5 \text{ см};$$

$$x_4 = 25 + 5 = 30 \text{ см}, \quad y_4 = 20 + 60 - 15 - 10 = 55 \text{ см}.$$

3. Определяем координаты центра тяжести всего сечения по формулам (3.30):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{30 \cdot 1200 + 12,5 \cdot 1500 + 32,5 \cdot 225 + 30 \cdot 225}{1200 + 1500 + 225 + 225} = 21,845 \text{ см} \approx 21,8 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{10 \cdot 1200 + 50 \cdot 1500 + 72,5 \cdot 225 + 55 \cdot 225}{1200 + 1500 + 225 + 225} = 36,73 \text{ см} \approx 36,7 \text{ см}.$$

4. Для определения центральных моментов инерции предварительно должны быть вычислены координаты центров тяжести элементов сечения  $x_{ci}$ ,  $y_{ci}$  относительно центральных осей сечения:

$$x_{c1} = 30 - 21,8 = 8,2 \text{ см}, \quad y_{c1} = 10 - 36,7 = -26,7 \text{ см};$$

$$x_{c2} = 12,5 - 21,8 = -9,3 \text{ см}, \quad y_{c2} = 50 - 36,7 = 13,3 \text{ см};$$

$$x_{c3} = 32,5 - 21,8 = 10,7 \text{ см}, \quad y_{c3} = 72,5 - 36,7 = 35,8 \text{ см};$$

$$x_{c4} = 30 - 21,8 = 8,2 \text{ см}, \quad y_{c4} = 55 - 36,7 = 18,3 \text{ см}.$$

5. Вычисляются геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + y_{ci}^2 \cdot A_i) = 40\,000 + (-26,7)^2 \cdot 1200 + 450\,000 + 13,3^2 \cdot 1500 + 4218,75 + 35,8^2 \cdot 225 + 11250 + 18,3^2 \cdot 225 = 1\,989\,991 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + x_{ci}^2 \cdot A_i) = 360\,000 + 8,2^2 \cdot 1200 + 78\,125 + (-9,3)^2 \cdot 1500 + 4218,75 + 10,7^2 \cdot 225 + 2812,5 + 8,2^2 \cdot 225 = 696\,468,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i) = 0 + 8,2 \cdot (-26,7) \cdot 1200 + 0 + (-9,3) \cdot 13,3 \times 1500 + 0 + 10,7 \cdot 35,8 \cdot 225 + 2812,5 + 8,2 \cdot 18,3 \cdot 225 = -325\,498,5 \text{ см}^4.$$

6. Определяем положение главных центральных осей по формуле (3.33). Положительный угол  $\alpha_c$  откладывается против хода часовой стрелки, отрицательный – по ходу часовой стрелки.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_c = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(-325\,498,5)}{696\,468,5 - 1\,989\,991} = 0,50327;$$

$$2\alpha_c = \operatorname{arctg} 2\alpha_c = 26,71^\circ \Rightarrow \alpha_c = 13,36^\circ.$$

7. Определяем значения главных центральных моментов инерции  $I_{x_c}, I_{y_c}$  по формулам (3.32).

$$I_{x_c} = I_x \cos^2 \alpha_c + I_y \sin^2 \alpha_c - I_{xy} \sin 2\alpha_c = 1\,989\,991 \cdot \cos^2 13,36^\circ + 696\,468,5 \cdot \sin^2 13,36^\circ - (-325\,498,5) \sin 26,71^\circ = 2\,067\,229,68 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_x \sin^2 \alpha_c + I_y \cos^2 \alpha_c + I_{xy} \sin 2\alpha_c = 1\,989\,991 \cdot \sin^2 13,36^\circ + 696\,468,5 \cdot \cos^2 13,36^\circ + (-325\,498,5) \sin 26,71^\circ = 619\,229,82 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_c + I_{xy} \cos 2\alpha_c = \frac{1\,989\,991 - 696\,468,5}{2} \sin 26,71^\circ + (-325\,498,5) \cos 26,71^\circ \approx 0.$$

Для контроля правильности полученных результатов проверим выполнение равенства  $I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} = \text{const}$ :

$$1\,989\,991 + 696\,468,5 = 2\,686\,459,5 \text{ см}^4;$$

$$2\,067\,229,68 + 619\,229,82 = 2\,686\,459,5 \text{ см}^4.$$

8. Моменты сопротивления сложного сечения определим по формуле (3.26):

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{2\,067\,229,68}{47,17} = 43\,825,1 \text{ см}^3;$$

$$W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{x_{\max}} = \frac{619\,229,82}{33,31} = 18\,589,91 \text{ см}^3.$$

Наиболее удаленными точками от осей  $x_{ci}$  и  $y_{ci}$  являются точки  $B$  и  $A$ , соответственно (см. рис. 3.19,  $z$ ):

$$\begin{aligned}x_A &= -21,8 \text{ см}; & y_A &= 80 - 36,7 = 43,3 \text{ см}; \\x_B &= 60 - 21,8 = 38,2 \text{ см}; & y_B &= 20 - 36,7 = -16,7 \text{ см}.\end{aligned}$$

Расстояния от главных центральных осей до точек  $A$  и  $B$  вычисляются по формуле (3.36):

$$\begin{aligned}x_{\max} &= x_B \cdot \cos \alpha_c + y_B \cdot \sin \alpha_c = 38,2 \cdot \cos 13,36^\circ + \\&+ (-16,7) \cdot \sin 13,36^\circ = 33,31 \text{ см}; \\y_{\max} &= y_A \cdot \cos \alpha_c - x_A \cdot \sin \alpha_c = 43,3 \cdot \cos 13,36^\circ - \\&- (-21,8) \cdot \sin 13,36^\circ = 47,17 \text{ см}.\end{aligned}$$

**Задача 3.7.** Для сечения, показанного на рис. 3.20,  $a$ , определить: 1) положение центра тяжести сечения; 2) главные центральные моменты инерции сечения; 3) моменты сопротивления сечения.

Решение:

1. Сложное сечение представляет собой прямоугольник, из которого вырезаны отверстия в виде двух квадратов и двух половин круга. Размеры, положение центров тяжести каждой простой фигуры показаны на рис. 3.20,  $b$  и 3.20,  $в$ .

2. Поскольку сечение симметрично по горизонтали и по вертикали, то можно без вычислений определить положение центра тяжести и главных центральных осей инерции – они совпадают с осями симметрии, а центр тяжести находится на пересечении этих осей (рис. 3.20,  $b$ ).

3. Координаты центров тяжести элементов сечения  $x_{ci}$ ,  $y_{ci}$  относительно главных центральных осей сечения легко найти по рисунку, так как сечение симметричное:

$$\begin{aligned}x_{c1} &= 0 \text{ см}, & y_{c1} &= 0 \text{ см}; & x_{c2} &= 0 - 3,0 - 1,0 = -4 \text{ см}, & y_{c2} &= 0 \text{ см}; \\x_{c3} &= 0 + 3,0 + 1,0 = 4 \text{ см}, & y_{c3} &= 0 \text{ см}; \\x_{c4} &= 0 \text{ см}, & y_{c4} &= 15,0 - 0,717 = 14,283 \text{ см}; \\x_{c5} &= 0 \text{ см}, & y_{c5} &= -15,0 + 0,717 = -14,283 \text{ см}.\end{aligned}$$

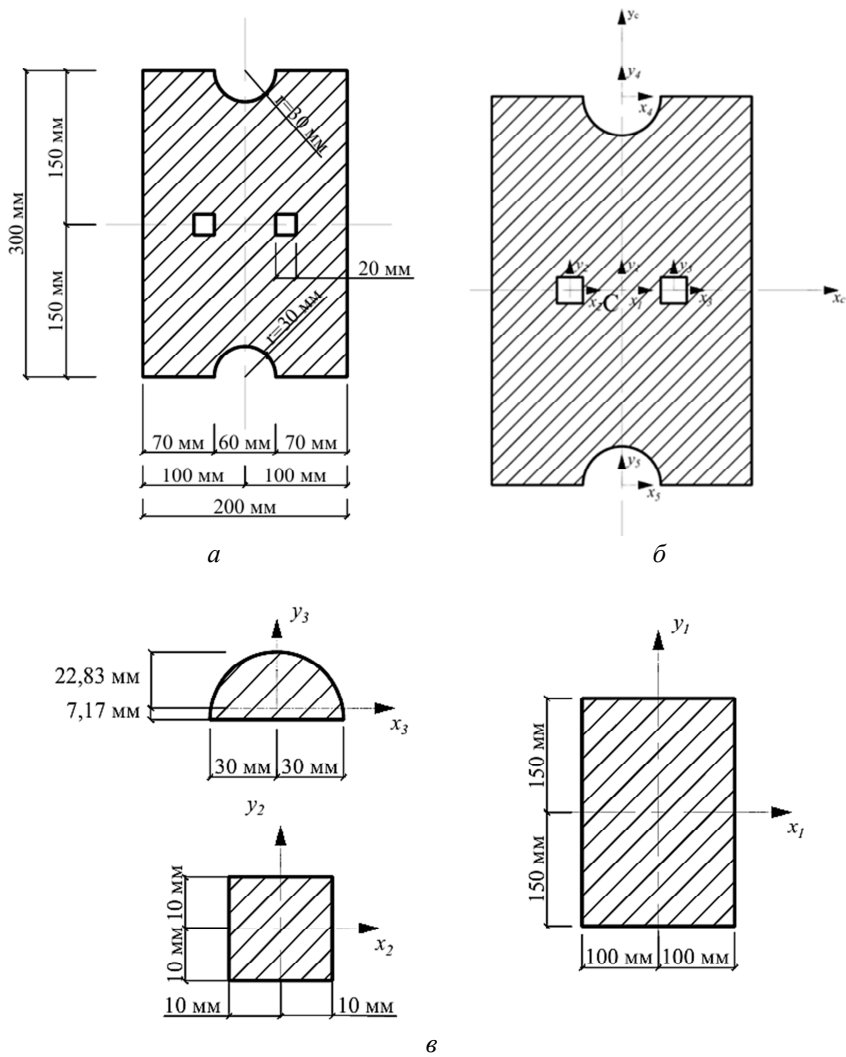


Рис. 3.20

Вычисляем осевые моменты инерции относительно собственных центральных осей и площади поперечных сечений для каждой простой фигуры:



Прямоугольник 1	Квадрат 2 и 3
$A_1 = b \times h = 20 \times 30 = 600 \text{ см}^2,$ $I_{x_1} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45\,000 \text{ см}^4,$ $I_{y_1} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20\,000 \text{ см}^4$	$A_1 = b^2 = 2^2 = 4 \text{ см}^2,$ $I_{x_3} = \frac{2^4}{12} = 1,33 \text{ см}^4,$ $I_{y_3} = I_{x_3} = 1,33 \text{ см}^4$
Полукруг 4 и 5	
$A_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3,14 \cdot 3^2}{2} = 14,13 \text{ см}^2,$ $I_{x_4} = 0,11r^4 = 0,11 \cdot 3^4 = 8,91 \text{ см}^4,$ $I_{y_4} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{3,14 \cdot 3^4}{8} = 31,79 \text{ см}^4$	

4. Вычисляем геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + y_{ci}^2 \cdot A_i) = 45\,000 + 0^2 \cdot 600 - (1,33 + 0^2 \cdot 4) \cdot 2 - (8,91 + 14,283^2 \cdot 14,13) \cdot 2 = 39\,214,36 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + x_{ci}^2 \cdot A_i) = 20\,000 + 0^2 \cdot 600 - (1,33 + 4^2 \cdot 4) \cdot 2 - (31,79 + 0^2 \cdot 14,13) \cdot 2 = 19\,805,76 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i) = 0 \text{ см}^4.$$

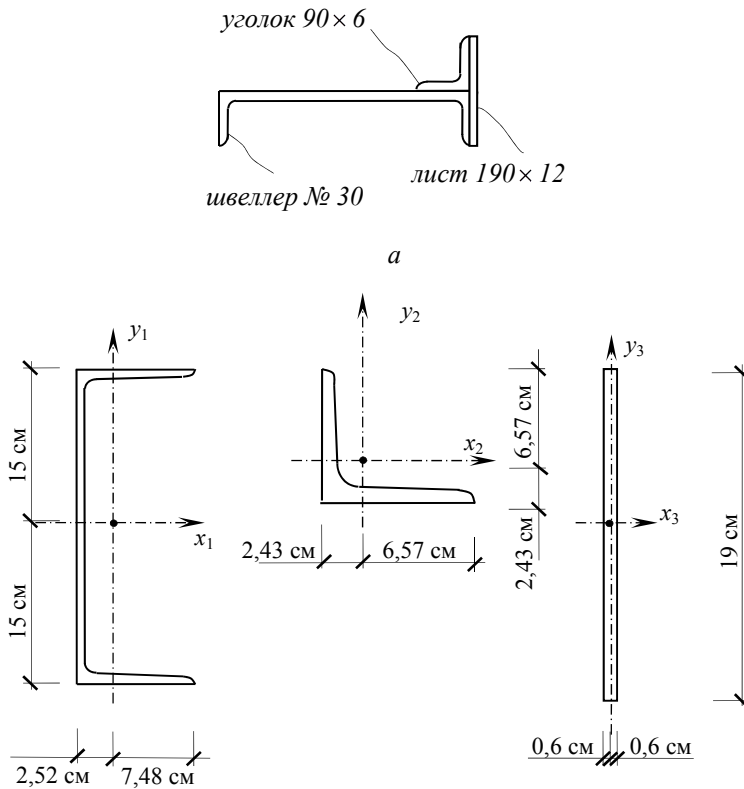
5. Моменты сопротивления сложного сечения определим по формуле (3.26). Расположение точек, наиболее удаленных от главных центральных осей, определяем по чертежу (рис. 3.21, з):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{39\,214,36}{15} = 2614,29 \text{ см}^3;$$

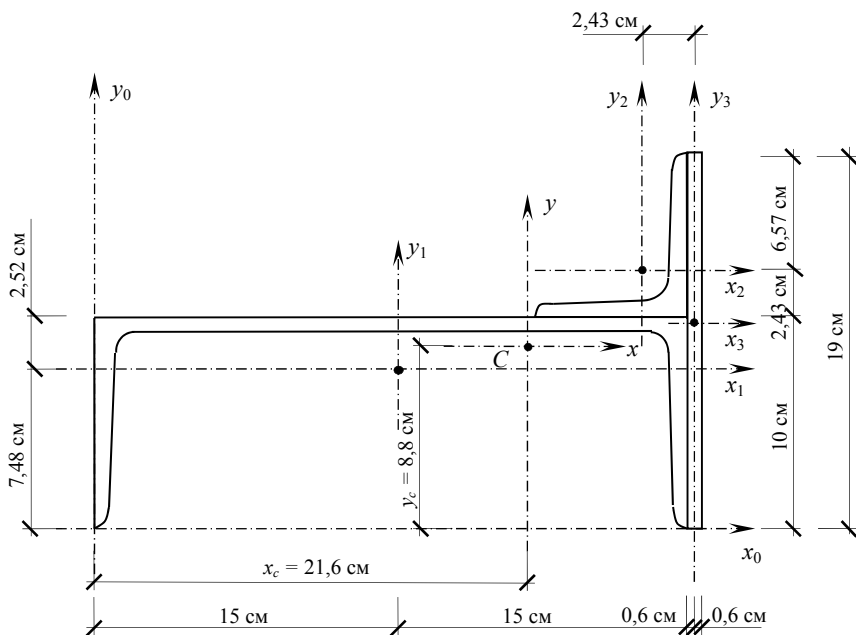
$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{19\,805,76}{10} = 1980,58 \text{ см}^3,$$

где (см. рис. 3.21, з):  $y_{\max} = 15 \text{ см}$ ;  $x_{\max} = 10 \text{ см}$ .

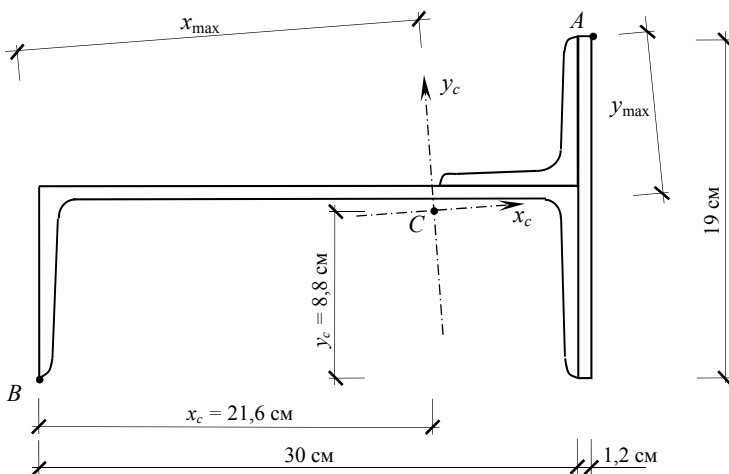
**Задача 3.8.** Для сечения, показанного на рис. 3.21, а, определить:  
 1) положение центра тяжести сечения; 2) главные центральные моменты инерции сечения; 3) моменты сопротивления сечения.



б  
Рис. 3.21



6



2

Окончание рис. 3.21

Решение:

1. Сложное сечение состоит из прокатных профилей: уголка, швеллера и листа. Размеры, положение центров тяжести каждой простой фигуры показаны на рис. 3.21, б и 3.21, в.

Так как заданное сложное сечение не имеет осей симметрии, то алгоритм расчета совпадает с решением задачи 3.6.

2. Задаем положение начальных осей  $x_0, y_0$  так, чтобы составное сечение оказалось в первой четверти (рис. 3.21, в).

Найдем положение центров тяжести каждого профиля относительно начальных осей:

$$x_1 = 15 \text{ см}, \quad y_1 = 7,48 \text{ см};$$

$$x_2 = 30 - 2,43 = 27,57 \text{ см}, \quad y_2 = 10 + 2,43 = 12,43 \text{ см};$$

$$x_3 = 30 + 0,6 = 30,6 \text{ см}, \quad y_3 = 19 / 2 = 9,5 \text{ см}.$$

Основные геометрические характеристики для швеллера и уголка (рис. 3.21, б) выбираются по сортаменту, для листа – вычисляются как для прямоугольника:

Швеллер № 30	Уголок 90×6	Лист 190×12
$A_1 = 40,5 \text{ см}^2$ ,	$A_2 = 10,61 \text{ см}^2$ ,	$A_3 = b \times h = 1,2 \times 19 = 22,8 \text{ см}^2$ ,
$I_{x_1} = 5810 \text{ см}^4$ ,	$I_{x_2} = 82,1 \text{ см}^4$ ,	$I_{x_3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,2 \cdot 19^3}{12} = 685,9 \text{ см}^4$ ,
$I_{y_1} = 327 \text{ см}^4$ ,	$I_{y_2} = 82,1 \text{ см}^4$ ,	$I_{y_3} = \frac{b^3h}{12} = \frac{1,2^3 \cdot 19}{12} = 2,736 \text{ см}^4$ ,
$I_{x_1y_1} = 0$	$I_{x_2y_2} = 48,1$	$I_{x_3y_3} = 0$

3. Определяем координаты центра тяжести всего сечения по формулам (3.30):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{15 \cdot 40,5 + 27,57 \cdot 10,61 + 30,6 \cdot 22,8}{40,5 + 10,61 + 22,8} \approx 21,6 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{7,48 \cdot 40,5 + 12,43 \cdot 10,61 + 9,5 \cdot 22,8}{40,5 + 10,61 + 22,8} \approx 8,8 \text{ см.}$$

4. Для определения центральных моментов инерции предварительно должны быть вычислены координаты центров тяжести элементов сечения  $x_{ci}$ ,  $y_{ci}$  относительно центральных осей сечения:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= 15 - 21,6 = -6,6 \text{ см}, & y_{c1} &= 7,48 - 8,8 = -1,32 \text{ см}; \\ x_{c2} &= 27,57 - 21,6 = 5,97 \text{ см}, & y_{c2} &= 12,43 - 8,8 = 3,63 \text{ см}; \\ x_{c3} &= 30,6 - 21,6 = 9 \text{ см}, & y_{c3} &= 9,5 - 8,8 = 0,7 \text{ см.} \end{aligned}$$

5. Вычисляются геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + y_{ci}^2 \cdot A_i) = 327 + (-1,32)^2 \cdot 40,5 + 82,1 + \\ &+ (3,63)^2 \cdot 10,61 + 685,9 + 0,7^2 \cdot 22,8 = 1316,6 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + x_{ci}^2 \cdot A_i) = 5810 + (-6,6)^2 \cdot 40,5 + 82,1 + \\ &+ 5,97^2 \cdot 10,61 + 2,736 + 9^2 \cdot 22,8 = 9883,97 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i) = 0 + (-6,6) \cdot (-1,32) \cdot 40,5 + 48,1 + \\ &+ 5,97 \cdot 3,63 \cdot 10,61 + 0 + 9 \cdot 0,7 \cdot 22,8 = 774,51 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

*Замечание:* так как швеллер в составе сложного сечения повернут на  $90^\circ$  по отношению к изображению швеллера из сортамента, то и значения геометрических характеристик следует брать для изменивших свое положение осей.

6. Определяем положение главных центральных осей по формуле (3.33).

$$\operatorname{tg} 2\alpha_c = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 774,51}{9883,97 - 1316,6} = 0,1808;$$

$$2\alpha_c = \operatorname{arctg} 2\alpha_c = 10,26^\circ \Rightarrow \alpha_c = 5,13^\circ.$$

7. Определяем значения главных центральных моментов инерции  $I_{x_c}, I_{y_c}$  по формулам (3.32).

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= I_x \cos^2 \alpha_c + I_y \sin^2 \alpha_c - I_{xy} \sin 2\alpha_c = 1316,6 \cdot \cos^2 5,13^\circ + \\ &+ 9883,97 \cdot \sin^2 5,13^\circ - 774,51 \cdot \sin 10,26^\circ = 1247,15 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= I_x \sin^2 \alpha_c + I_y \cos^2 \alpha_c + I_{xy} \sin 2\alpha_c = 1316,6 \cdot \sin^2 5,13^\circ + \\ &+ 9883,97 \cdot \cos^2 5,13^\circ + 774,51 \cdot \sin 10,26^\circ = 9953,43 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_c y_c} &= \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \frac{1316,6 - 9883,97}{2} \sin 10,26^\circ + \\ &+ 774,51 \cdot \cos 10,26^\circ \approx 0. \end{aligned}$$

Для контроля правильности полученных результатов проверим выполнение равенства  $I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} = \text{const}$ :

$$1316,6 + 9883,97 = 11\,200,57 \text{ см}^4;$$

$$1247,15 + 9953,43 = 11\,200,58 \text{ см}^4.$$

8. Моменты сопротивления сложного сечения определим по формуле (3.26):

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{1247,15}{9,3} = 134,1 \text{ см}^3;$$

$$W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{x_{\max}} = \frac{9953,43}{22,3} = 446,34 \text{ см}^3,$$

где (см. рис. 3.21, з):

$$y_{\max} = 10,2 \cdot \cos 5,13^\circ - 9,6 \cdot \sin 5,13^\circ = 9,3 \text{ см};$$

$$x_{\max} = (-21,6) \cdot \cos 5,13^\circ + (-8,8) \cdot \sin 5,13^\circ = -22,3 \text{ см}.$$

Наиболее удаленными точками от осей  $x_{ci}$  и  $y_{ci}$  являются точки  $B$  и  $A$ , соответственно (см. рис. 3.21, з):

$$x_A = 30 + 1,2 - 21,6 = 9,6 \text{ см}; \quad y_A = 19 - 8,8 = 10,2 \text{ см};$$

$$x_B = -21,6 \text{ см}; \quad y_B = -8,8 \text{ см}.$$

**Задача 3.9.** Для сечения, показанного на рис. 3.22, а, определить:

- 1) положение центра тяжести сечения;
- 2) главные центральные моменты инерции сечения;
- 3) моменты сопротивления сечения.

Решение:

1. Сложное сечение состоит из прокатных профилей: двух двутавров, соединенных двумя листами. Размеры, положение центров тяжести каждой простой фигуры показаны на рис. 3.22, б. Так как заданное сложное сечение имеет оси симметрии, то алгоритм расчета совпадает с решением задачи 3.7.

2. Поскольку сечение симметрично по горизонтали и по вертикали, то можно без вычислений определить положение центра тяжести и главных центральных осей инерции – они совпадают с осями симметрии, а центр тяжести находится на пересечении этих осей (рис. 3.22, б).

Вычисляем геометрические характеристики каждой простой фигуры:

Прямоугольник 1 и 2	Двутавр 3 и 4
$A_1 = A_2 = b \times h = 30 \times 1 = 30 \text{ см}^2,$	$A_3 = A_4 = 34,8 \text{ см}^2,$
$I_{x_1} = I_{x_2} = \frac{30 \cdot 1^3}{12} = 2,5 \text{ см}^4,$	$I_{x_3} = I_{x_4} = 3460 \text{ см}^4,$
$I_{y_1} = I_{y_2} = \frac{30^3 \cdot 1}{12} = 2250 \text{ см}^4$	$I_{y_3} = I_{y_4} = 198 \text{ см}^4$

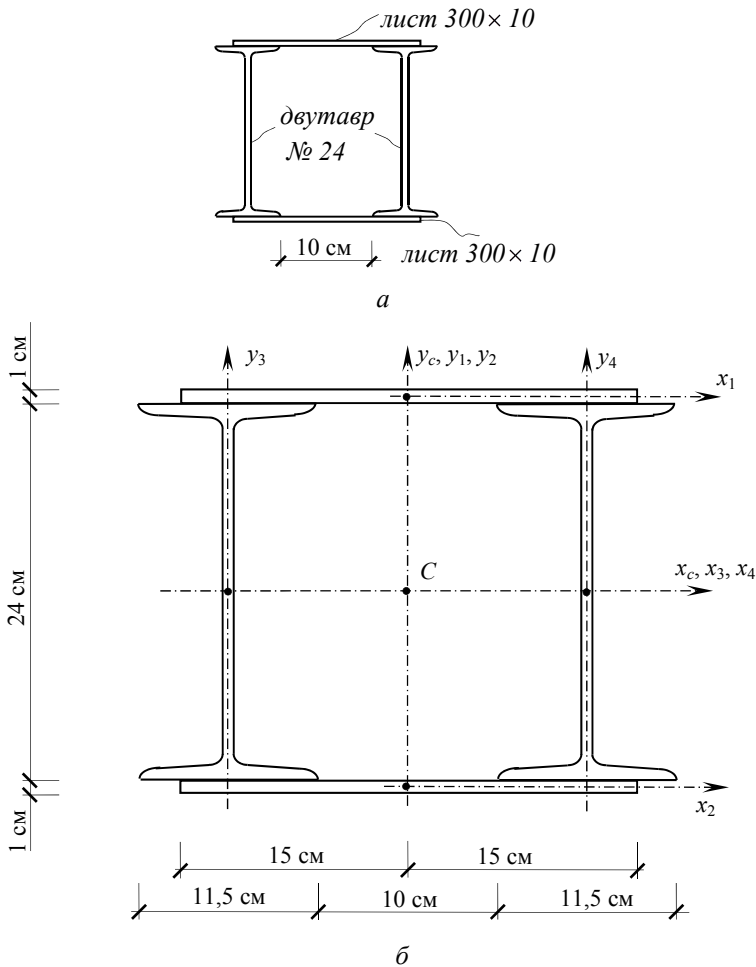


Рис. 3.22

3. Для определения главных центральных моментов инерции предварительно должны быть вычислены координаты центров тяжести элементов сечения  $x_{ci}, y_{ci}$  относительно главных центральных осей сечения.

Так как сечение симметричное, то и координаты легко найти по рисунку:



$$\begin{aligned}
 x_{c1} &= 0 \text{ см}, \quad y_{c1} = 12 + 0,5 = 12,5 \text{ см}; \quad x_{c2} = 0 \text{ см}, \quad y_{c2} = -12,5 \text{ см}; \\
 x_{c3} &= -5 - 11,5 / 2 = -10,75 \text{ см}, \quad y_{c3} = 0 \text{ см}; \\
 x_{c4} &= 10,75 \text{ см}, \quad y_{c4} = 0 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

4. Вычисляем геометрические характеристики сечения – осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \sum_{i=1}^n (I_{x_i} + y_{ci}^2 \cdot A_i) = (2,5 + 12,5^2 \cdot 30) \cdot 2 + \\
 &+ (3460 + 0^2 \cdot 34,8) \cdot 2 = 16\,300 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + x_{ci}^2 \cdot A_i) = (2250 + 0^2 \cdot 30) \cdot 2 + \\
 &+ (198 + 10,75^2 \cdot 34,8) \cdot 2 = 12\,939,15 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n (I_{x_i y_i} + x_{ci} y_{ci} \cdot A_i) = 0 \text{ см}^4.$$

5. Моменты сопротивления сложного сечения определим по формуле (3.26). Расположение точек, наиболее удаленных от главных центральных осей, определяем по чертежу (рис. 3.22, б):

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{16\,300}{13} = 1253,85 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} = \frac{12\,939,15}{16,5} = 784,19 \text{ см}^3,$$

где  $y_{\max} = 12 + 1 = 13 \text{ см}; \quad x_{\max} = \frac{10}{2} + 11,5 = 16,5 \text{ см}.$

### 3.9. Понятие об изгибе балок. Поперечная сила и изгибающий момент

*Изгибом* называется вид нагружения бруса, при котором к нему прикладывается поперечная нагрузка, лежащая в плоскости, проходящей через продольную ось (рис. 3.23, а). В этой же плоскости располагается *изогнутая ось* стержня (упругая линия).

Изгиб называется *плоским*, или *прямым*, если плоскость действия нагрузки проходит через главную центральную ось инерции сечения (рис. 3.23, б). *Косой* изгиб – изгиб, при котором нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции. *Сложный изгиб* – изгиб, при котором нагрузки действуют в различных (произвольных) плоскостях. Далее будем рассматривать плоский изгиб, то есть все силы будем прилагать в плоскости симметрии балки.

При плоском поперечном изгибе в балке возникают два вида внутренних усилий (рис. 3.23, в): поперечная сила  $Q_y$ , где  $y$  – ось симметрии (главная центральная ось) и изгибающий момент  $M_x$ , где  $x$  – другая главная центральная ось сечения, нормальная к оси симметрии. В раме при плоском поперечном изгибе возникают три усилия: продольная  $N$ , поперечная  $Q$  силы и изгибающий момент  $M$ .

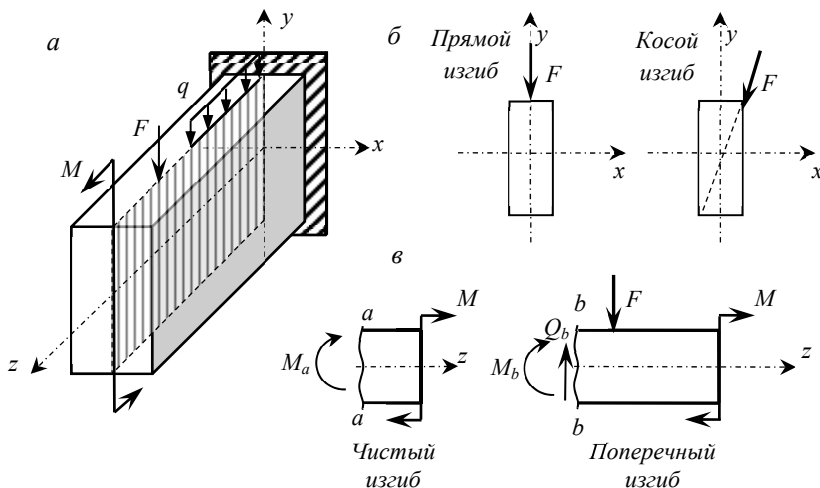


Рис. 3.23

Если изгибающий момент  $M_x$  является единственным внутренним силовым фактором, то такой изгиб называется чистым (рис. 3.23, в). При наличии поперечной силы  $Q_y$ , изгиб называется поперечным.

### 3.10. Определение внутренних сил в сечениях изгибаемых элементов. Построение эпюр усилий в простых балках

Для того чтобы произвести расчет балки на прочность, необходимо знать величину наибольшего изгибающего момента  $M$  и положение сечения, в котором он возникает. Точно так же нужно знать и наибольшую поперечную силу  $Q$ . Для этой цели строят эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Эпюра внутренней силы – график, показывающий изменение этой силы по длине балки.

Для построения эпюр балка *характерными сечениями* разбивается на участки, в пределах которых функция внутренней силы не меняет своего аналитического выражения. За характерные принимают сечения, в которых приложены внешние нагрузки: сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, начинается или заканчивается распределенная нагрузка одного направления, изменяющаяся по одному закону, а также начало и конец балки.

Перед тем, как определять внутренние усилия (поперечные силы и изгибающие моменты) и строить эпюры, как правило, нужно найти опорные реакции, возникающие в закреплении стержня (см. п. 3.1). Если опорные реакции и внутренние усилия можно найти из уравнений статики, то конструкция называется статически определимой. После определения опорных реакций внутренние усилия в статически определимых конструкциях определяем с помощью метода сечений (см. п. 3.1).

Как было сказано выше, при плоском поперечном изгибе в балке возникают два внутренних усилия: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . В соответствии с методом сечений поперечную силу можно найти как сумму проекций всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, на ось (ось  $y$ ), перпендикулярную оси стержня (ось  $z$ ). Изгибающий момент равен сумме моментов всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения, относительно оси, проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения (оси  $x$ ).

Для того чтобы можно было вести расчет с любого конца балки, необходимо принять правило знаков для внутренних силовых факторов.

Если внешняя сила вращает отрезанную часть балки по часовой стрелке, то внутренняя сила является положительной; если внешняя сила вращает отрезанную часть балки против хода часовой стрелки, то внутренняя сила является отрицательной.

Если под действием внешней силы изогнутая ось балки принимает вид вогнутой чаши, такой, что идущий сверху дождь будет наполнять ее водой, то изгибающий момент считается положительным. Если под действием внешней силы изогнутая ось балки принимает вид выпуклой чаши, такой, что идущий сверху дождь не будет наполнять ее водой, то изгибающий момент считается отрицательным.

При построении эпюр  $Q$  и  $M$  договоримся на эпюре  $Q$  положительные значения откладывать сверху нулевой линии. На эпюре  $M$  у строителей принято откладывать положительные ординаты снизу. Такое правило построения эпюры  $M$  называется построением эпюры со стороны растянутых волокон, т. е. положительные значения  $M$  откладываются в сторону выпуклости изогнутой балки.

Рассмотрим балку с произвольной формой поперечного сечения. Следуя методу сечений (п. 3.2), мысленно проведем разрез и отбросим какую-либо часть балки, а другую оставим. На оставшейся части покажем действующие на нее внешние силы, а со стороны отброшенной части – внутренние силовые факторы (поперечную силу  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ ).  $M_x$  и  $Q_y$  заранее неизвестны, поэтому их показывают в положительном направлении в соответствии с принятыми правилами знаков.

Для определения величины  $Q_y$  и  $M_x$  составляются два уравнения равновесия для оставшейся части:

$$\begin{aligned}\sum Y = 0: & \rightarrow Q_y; \\ \sum M_x = 0: & \rightarrow M_x.\end{aligned}\tag{3.37}$$

На практике поперечную силу  $Q_y$  в сечении балки удобно определять как сумму проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса, на ось перпендикулярную оси бруса (ось  $y$ ):

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внеш}}. \quad (3.38)$$

На практике изгибающий момент  $M_x$ , действующий в поперечном сечении балки, удобно определять, не записывая непосредственно уравнение, а суммируя моменты всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой отсеченной части бруса, относительно центральной оси  $x$  этого сечения:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} M^{\text{внеш}}. \quad (3.39)$$

Если внешняя сила в данном сечении растягивает нижние волокна балки, то момент этой силы в этом сечении считается положительным, если растягиваются верхние волокна балки, то момент этой силы будет отрицательным.

Уравнение момента составляется относительно оси  $x$ , проходящей в поперечном сечении через точку на оси балки – тогда поперечная сила в уравнение не входит и величина  $M_x$  определяется независимо от  $Q_y$ . Можно доказать, что результат вычислений  $Q_y$  и  $M_x$  не зависит от того, равновесие какой оставшейся части рассматривается.

Рассмотрим порядок построения эпюр в балках на примерах.

*Задача 3.10.* Определить опорные реакции и построить эпюры внутренних сил для консоли, изображенной на рис. 3.24.

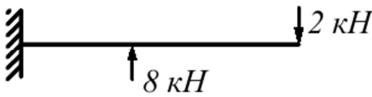


Рис. 3.24

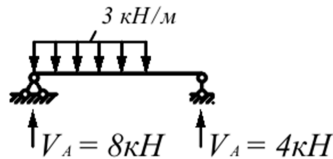


Рис. 3.25

Решение:

1. На расчетной схеме балки показываем опорные реакции, соответствующие виду опорного закрепления (рис. 3.26). Направление этих реакций заранее неизвестно, поэтому выбирается произвольно.

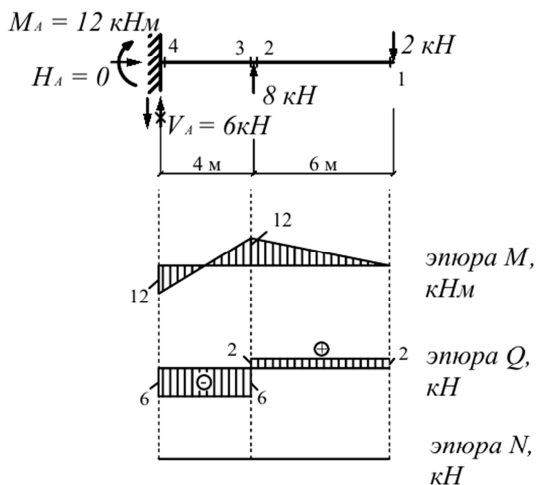


Рис. 3.26

Используем уравнения статики для их определения:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum Y = 0, \\ \sum M_A = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ V_A + 8 - 2 = 0, \\ M_A - 8 \cdot 4 + 2 \cdot 10 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ V_A = -6 \text{ кН}, \\ M_A = 12 \text{ кНм}. \end{cases}$$

*Замечание:* а) при составлении уравнения  $\sum M_A = 0$  за положительное направление принято то, при котором моменты осуществляют поворот по часовой стрелке. В уравнении моментов это направление может выбираться произвольно и к правилу знаков при построении эпюр изгибающих моментов отношения не имеет; б) отрицательное значение вертикальной опорной реакции  $V_A = -6$  кН говорит о том, что ее первоначальное направление было выбрано неверно. Можно перенаправить ее (см. рис. 3.26), изменив значение на положительное.

2. На расчетной схеме показываем характерные сечения, в которых надлежит определить внутренние усилия. Сечения 1 и 3 стремятся к сосредоточенным силам слева, сечение 2 – справа, сечение 4 – вблизи от опоры.

3. Определяем усилия в указанных сечениях по методу сечений (формулы (3.37) или (3.38) и (3.39)). Для определения внутренних сил в сечениях 1 и 2 будем рассматривать равновесие левой части:

$$Q_1 = Q_2 = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внеш}} = 2 \text{ кН}, \quad N_1 = N_2 = \sum_{\text{прав}} F_x^{\text{внеш}} = 0 \text{ кН},$$

$$M_1 = \sum_{\text{прав}} M^{\text{внеш}} = -2 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}, \quad M_2 = -2 \cdot 6 = -12 \text{ кНм}.$$

Для определения внутренних сил в сечениях 3 и 4 будем рассматривать равновесие правой части:

$$Q_3 = Q_4 = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внеш}} = -6 \text{ кН}, \quad N_3 = N_4 = \sum_{\text{лев}} F_x^{\text{внеш}} = 0 \text{ кН},$$

$$M_3 = \sum_{\text{лев}} M^{\text{внеш}} = 12 - 6 \cdot 0 = 12 \text{ кНм}, \quad M_4 = 12 - 6 \cdot 4 = -12 \text{ кНм}.$$

4. Откладываем полученные значения внутренних сил (в определенном масштабе) под/над соответствующими сечениями перпендикулярно оси стержня. Напомним, что изгибающие моменты строятся на растянутых волокнах, поперечные силы могут быть отложены в произвольном направлении, но при этом необходимо указывать их знаки. Соединяем ординаты прямыми линиями на участках 1–2 и 3–4 (рис. 3.26), так как на этих участках другие изменения внутренних усилий происходить не будут.

*Задача 3.11.* Определить опорные реакции и построить эпюры внутренних сил для консоли, изображенной на рис. 3.25.

Решение:

1. На расчетной схеме балки показываем опорные реакции, соответствующие виду опорного закрепления (рис. 3.27). Направление этих реакций заранее неизвестно, поэтому выбирается произвольно.

Используем уравнения статики для их определения:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ -V_B \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0, \\ V_A \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot (2 + 2) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ V_B = 4 \text{ кН}, \\ V_A = 8 \text{ кН}. \end{cases}$$

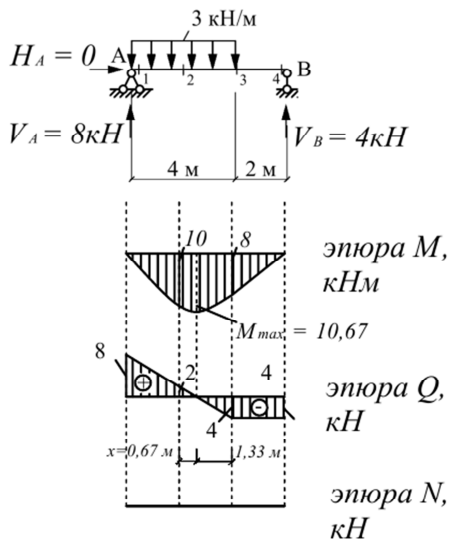


Рис. 3.27

Как видим, первоначальное направление опорных реакций было выбрано верно.

2. На расчетной схеме показываем характерные сечения, в которых надлежит определить внутренние усилия. Сечения 1 и 3 соответствуют краям равномерно-распределенной нагрузки, сечение 2 – ее середине, сечение 4 находится вблизи от опоры (опорной реакции).

3. Определяем усилия в указанных сечениях по методу сечений (формулы (3.37) или (3.38) и (3.39)). Для определения внутренних сил в сечениях 1 и 2 будем рассматривать равновесие правой части:

$$Q_1 = 8 \text{ кН}, \quad Q_2 = 8 - 3 \cdot 2 = 2 \text{ кН}, \quad N_1 = N_2 = 0 \text{ кН}, \\ M_1 = 8 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}, \quad M_2 = 8 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \text{ кНм}.$$

Для определения внутренних сил в сечениях 3 и 4 будем рассматривать равновесие левой части:

$$Q_3 = Q_4 = -4 \text{ кН}, \quad N_3 = N_4 = 0 \text{ кН}, \\ M_3 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кНм}, \quad M_4 = 4 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}.$$



4. По полученным значениям внутренних сил строим эпюры. Соединяем ординаты прямыми линиями на участке 3–4. На участке 1–2–3 (учасок действия распределенной нагрузки) только эпюра поперечных сил будет иметь линейный характер. Эпюра изгибающих моментов на этом участке очерчена по параболе, направленной выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки (рис. 3.27). Экстремум параболы (максимум) на эпюре  $M$  соответствует нулю на эпюре  $Q$ . Если обозначить за  $x$  расстояние от сечения 2 до точки пересечения эпюрой  $Q$  оси стержня (см. рис. 3.27), то из подобия треугольников:

$$\frac{x}{2-x} = \frac{2}{4} \Rightarrow 4x = 2(2-x) \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow x = 0,67 \text{ м.}$$

Тогда, максимальный изгибающий момент будет:

$$M_{\max} = 8 \cdot (2 + 0,67) - 3 \cdot (2 + 0,67) \cdot \frac{(2 + 0,67)}{2} = 10,67 \text{ кНм.}$$

### 3.11. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой при плоском изгибе

Для проверки правильности построения эпюр внутренних сил можно использовать известные дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = q. \quad (3.40)$$

Указанные зависимости при изгибе позволяют установить соответствия между эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов:

1. Эпюра  $Q$  является прямолинейной на всех участках. На тех участках, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $Q$  имеет вид прямой, параллельной оси стержня, а эпюра  $M$ , в общем случае, – имеет линейный закон распределения.

2. На тех участках, где к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра  $Q$  имеет линейный закон распределения, а эпюра  $M$  очерчена по кривой параболического очертания. При по-

строении эпюры  $M$  на растянутых волокнах, выпуклость параболы обращена в сторону действия распределенной нагрузки.

3. В тех сечениях, где  $Q = 0$ , касательная к эпюре  $M$  параллельна оси эпюры. Изгибающий момент в таких сечениях балки экстремален по величине ( $M_{\max}$ ,  $M_{\min}$ ).

4. На участках, где  $Q > 0$ , линейный график на эпюре  $M$  возрастает, то есть слева направо положительные ординаты эпюры  $M$  монотонно увеличиваются; на тех участках, где  $Q < 0$ , ординаты эпюры  $M$  монотонно уменьшаются.

5. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эпюре  $Q$  будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;

б) на эпюре  $M$  будут изломы, острие излома направлено по направлению действия силы.

6. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные моменты, на эпюре  $M$  будут скачки на величину этих моментов, на эпюре  $Q$  никаких изменений не будет.

7. Если на конце консоли или в концевой опоре приложен сосредоточенный момент, то в этом сечении изгибающий момент равен внешнему моменту.

8. Эпюра  $Q$  представляет собой диаграмму производной от эпюры  $M$ . Значит, ординаты  $Q$  пропорциональны тангенсу угла наклона касательной к эпюре  $M$ .

9. Порядок функции на эпюре  $Q$  всегда на единицу меньше, чем на эпюре  $M$ . Например, если эпюра  $M$  – квадратная парабола, то эпюра  $Q$  на этом участке – наклонная прямая; если эпюра  $M$  – наклонная прямая, то эпюра  $Q$  на этом участке – прямая, параллельная оси; если  $M = \text{const}$  (прямая, параллельная оси), то на этом участке  $Q = 0$ .

### 3.12. Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность при изгибе

Нормальные напряжения при изгибе, можно определить по формуле, впервые полученной Ш. Кулоном в 1773 году:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}. \quad (3.41)$$

Согласно этой формуле нормальные напряжения не зависят от модуля упругости материала балки. По мере удаления от нейтрального слоя нормальные напряжения  $\sigma$  в поперечном сечении бруса при его изгибе изменяются по линейному закону в зависимости от координаты  $y$  и принимают максимальное значение на уровне крайних волокон (при  $y = y_{\max}$ ):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (3.42)$$

Формулой (3.42) удобно пользоваться для расчета балок, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Поскольку знак напряжения в этом случае не имеет значения, напряжения вычисляются по модулю, и условие прочности при изгибе балки в форме призматического стержня получает вид

$$\sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (3.43)$$

где  $\max M_x$  – максимальное значение изгибающего момента (легко определяемое по его эпюре);

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение на простое растяжение (сжатие).

Из условия (3.43) формулируют два рода задач на прочность при изгибе:

1. Проверка прочности: задана балка, нагрузка, известен материал. Строится эпюра  $M_x$  – определяется  $M_{\max}$ , вычисляется  $W_x$  и по формуле (3.43) проверяется условие прочности.

2. Конструирование балки – определение размеров ее поперечного сечения:

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]}. \quad (3.44)$$

Строится эпюра  $M_x$  – определяется  $M_{\max}$ , вычисляется правая часть по формуле (3.44) и подбираются размеры поперечного сечения, удовлетворяющие формуле (3.43).

Для прямоугольного сечения

$$\frac{bh^2}{6} \geq \frac{M_x}{[\sigma]} \quad (3.45)$$

обычно задаются отношением

$$\frac{h}{b} = K. \quad (3.46)$$

Тогда

$$\frac{b^3 K^2}{6} \geq \frac{M_x}{[\sigma]} \Rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_x}{[\sigma]K^2}}. \quad (3.47)$$

Задаваясь шириной  $b$ , по формуле (3.46) получим  $h$ .

Для двутаврового сечения по таблице сортамента подбирают номер двутавра с  $W_x$  большим, чем правая часть формулы (3.44).

В случае поперечного изгиба в сечениях балки возникают не только изгибающий момент, но и поперечная сила. Тогда в поперечных сечениях бруса возникают не только нормальные, но и касательные напряжения:

$$\tau = \frac{S_x^* \cdot Q_y}{b_{\min} \cdot I_x}. \quad (3.48)$$

Формулой (3.48), которая носит имя русского ученого Д. И. Журавского, можно пользоваться только в случае прямого изгиба.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau = \frac{S_x^* \cdot Q_y^{\max}}{b_{\min} \cdot I_x} \leq [\tau]. \quad (3.49)$$

где  $Q_y^{\max}$  – максимальное значение поперечной силы в сечении;

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение.

Для проверки на прочность при изгибе по действующим на балку внешним нагрузкам строят эпюры изменения внутренних усилий по ее длине и определяют опасные сечения балки, для каждого из которых необходимо провести проверку прочности.

**Задача 3.12.** Проверить на прочность по нормальным и касательным напряжениям балку, расчетная схема которой показана на рис. 3.28. В сечении балки – прямоугольный деревянный брус с соотношением сторон  $K = h/b = 1,7$ . Допускаемые напряжения:  $[\sigma] = 85 \text{ МПа}$ ;  $[\tau] = 8 \text{ МПа}$ .

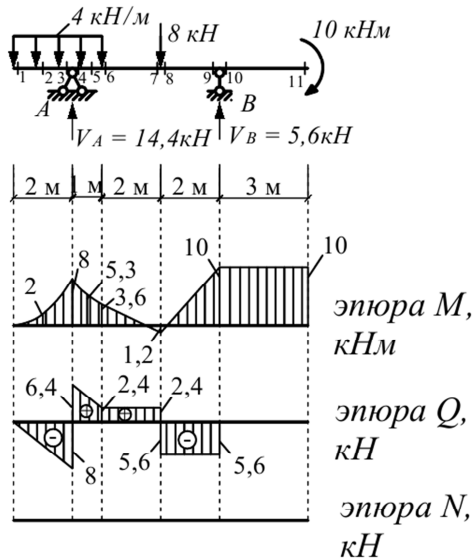


Рис. 3.28

Решение:

1. Определяются опорные реакции (рис. 3.28):

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_A = 0, \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ 10 - V_B \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0, \\ V_A \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot (4 + 1,5) - 8 \cdot 2 + 10 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 0, \\ V_B = 5,6 \text{ кН}, \\ V_A = 14,4 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для контроля правильности определения вертикальных реакций можно использовать уравнение проекций всех сил на ось  $y$ :

$$\sum Y = -4 \cdot 3 + 14,4 - 8 + 5,6 = -20 + 20 = 0.$$

Уравнение удовлетворяется, следовательно опорные реакции найдены верно.

2. На расчетной схеме показываем характерные сечения, в которых надлежит определить внутренние усилия. Сечения 3–4, 7–8, 9–10 и 11 поставлены так, чтобы исследовать распределение внутренних сил возле сосредоточенных сил. Участок с распределенной нагрузкой, таким образом, разбивается опорной реакцией  $V_A$  на два участка (1–3 и 4–6), на каждом из которых эпюра изгибающих моментов имеет криволинейный характер. Поэтому, для того, чтобы более точно отразить характер распределения изгибающих моментов на этих участках, дополнительно выбираем сечения 2 и 5 посередине каждого участка.

3. Определяем усилия в характерных сечениях.

Для определения внутренних сил в сечениях 1–7 будем рассматривать равновесие левой части:

$$Q_1 = -4 \cdot 0 = 0 \text{ кН}, \quad M_1 = -4 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}, \quad N_1 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_2 = -4 \cdot 1 = -4 \text{ кН}, \quad M_2 = -4 \cdot 1 \cdot 0,5 = -2 \text{ кНм}, \quad N_2 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН}, \quad M_3 = -4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кНм}, \quad N_3 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_4 = -4 \cdot 2 + 14,4 = 6,4 \text{ кН}, \quad M_4 = M_3 = -8 \text{ кНм}, \quad N_4 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_5 = -4 \cdot 2,5 + 14,4 = 4,4 \text{ кН}, \quad M_5 = -4 \cdot 2,5 \cdot 1,25 + 14,4 \cdot 0,5 = -5,3 \text{ кНм},$$

$$N_5 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_6 = -4 \cdot 3 + 14,4 = 2,4 \text{ кН}, \quad M_6 = -4 \cdot 3 \cdot 1,5 + 14,4 \cdot 1 = -3,6 \text{ кНм},$$

$$N_6 = 0 \text{ кН};$$

$$Q_7 = -4 \cdot 3 + 14,4 = 2,4 \text{ кН}, \quad M_7 = -4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 14,4 \cdot 3 = 1,2 \text{ кНм},$$

$$N_7 = 0 \text{ кН}.$$

Для определения внутренних сил в сечениях 8–11 будем рассматривать равновесие правой части:

$$\begin{aligned}
 Q_8 &= -5,6 \text{ кН}, \quad M_8 = -10 + 5,6 \cdot 2 = 1,2 \text{ кНм}, \quad N_8 = 0 \text{ кН}; \\
 Q_9 &= -5,6 \text{ кН}, \quad M_9 = -10 + 5,6 \cdot 0 = -10 \text{ кНм}, \quad N_9 = 0 \text{ кН}; \\
 Q_{10} &= 0 \text{ кН}, \quad M_{10} = -10 \text{ кНм}, \quad N_{10} = 0 \text{ кН}; \\
 Q_{11} &= 0 \text{ кН}, \quad M_{11} = -10 \text{ кНм}, \quad N_{11} = 0 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

4. По полученным значениям внутренних сил строим эпюры (рис. 3.28). При этом должны соблюдаться дифференциальные зависимости при изгибе. На участках 6–7, 8–9, 10–11 поперечные силы имеют постоянные значения, а изгибающие моменты изменяются по линейному закону; на участках 1–3 и 4–6 поперечные силы изменяются по линейному закону, причем угол наклона на обоих участках одинаков, эпюра изгибающих моментов имеет параболическое очертание, выпуклостью вниз. Эпюра изгибающих моментов имеет изломы в местах приложения сосредоточенных сил (в том числе и опорных реакций), направление изломов совпадает с направлением сил; на эпюре поперечных сил в этих местах наблюдаем скачок, на величину сосредоточенной силы. В точке приложения сосредоточенного момента – скачок на величину этого момента на эпюре  $M$ . Также проверяем соответствие знаков на эпюре  $Q$  и знаков тангенса наклона касательной к эпюре  $M$ : положительным считается угол, отсчитываемый от оси стержня по часовой стрелке.

5. Подбираем ширину поперечного прямоугольного сечения по формуле (3.47):

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{[\sigma]K^2}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{85 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 \cdot 1,7^2}} = 0,0625 \text{ м}.$$

Примем  $b = 7 \text{ см}$ ,  $h = 7 \times 1,7 \approx 12 \text{ см}$ .

Проверим прочность по касательным напряжениям (формула (3.49)):

$$\tau = \frac{S_x^* \cdot Q_y^{\max}}{b_{\min} \cdot I_x} = \frac{126 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 8 \cdot 10^3 \text{ Н}}{7 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 1008 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 1,43 \text{ МПа} \leq [\tau] = 8 \text{ МПа}.$$

Здесь  $S_x^* = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126 \text{ см}^3$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно оси  $x$  (для прямоугольного сечения наибольшее касательное напряжение возникает на уровне нейтральной оси изгиба);

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{7 \cdot 12^3}{12} = 1008 \text{ см}^4;$$

$b_{\min} = 7 \text{ см}$  – минимальная ширина сечения.

**Задача 3.13.** Для балки, расчетная схема которой показана на рис. 3.29, подобрать поперечное сечение в виде двутавра так, чтобы прочность балки была обеспечена. Допускаемые напряжения:  $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$ ;  $[\tau] = 90 \text{ МПа}$ .

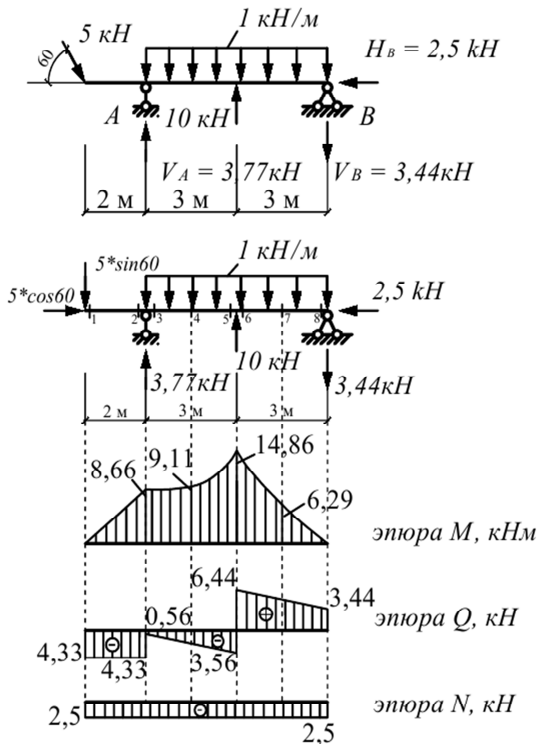


Рис. 3.29



Решение:

1. Для удобства расчета наклонную сосредоточенную силу раскладываем на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 3.29). Определяются опорные реакции:

$$\begin{cases} \sum X = 0, \\ \sum M_A = 0, \rightarrow \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \cdot \cos 60^\circ - H_A = 0, \\ -5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + V_B \cdot 6 - 10 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = 0, \\ V_A \cdot 6 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 8 + 10 \cdot 3 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = 2,5 \text{ кН}, \\ V_B = 3,44 \text{ кН}, \\ V_A = 3,77 \text{ кН}. \end{cases}$$

Для контроля правильности определения вертикальных реакций можно использовать уравнение проекций всех сил на ось  $y$ :

$$\sum Y = -5 \cdot \sin 60^\circ + 3,77 - 1 \cdot 6 + 10 - 3,44 = -13,77 + 13,77 = 0.$$

2. Выбираем характерные сечения и определяем в них внутренние силы. Для определения усилий в сечениях 1–4 будем рассматривать равновесие левой части:

$$Q_1 = -5 \cdot \sin 60^\circ = -4,33 \text{ кН}, \quad M_1 = -5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0 = 0 \text{ кНм},$$

$$N_1 = -5 \cdot \cos 60^\circ = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_1 = -4,33 \text{ кН}, \quad M_2 = -5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 = -8,66 \text{ кНм},$$

$$N_2 = N_1 = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_3 = -5 \cdot \sin 60^\circ + 3,77 = -0,56 \text{ кН}, \quad M_3 = M_2 = -8,66 \text{ кНм},$$

$$N_3 = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_4 = -5 \cdot \sin 60^\circ + 3,77 - 1 \cdot 1,5 = -2,06 \text{ кН},$$

$$M_4 = -5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + 3,77 \cdot 1,5 - 1 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -9,11 \text{ кНм},$$

$$N_4 = -2,5 \text{ кН}.$$

Для определения внутренних сил в сечениях 5–8 будем рассматривать равновесие правой части:

$$Q_5 = 3,44 + 1 \cdot 3 - 10 = -3,56 \text{ кН}, \quad M_5 = -3,44 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1,5 = -14,86 \text{ кНм},$$

$$N_5 = -H_A = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_6 = 3,44 + 1 \cdot 3 = 6,44 \text{ кН}, \quad M_6 = M_5 = -14,86 \text{ кНм}, \quad N_6 = -2,5 \text{ кН};$$

$$Q_7 = 3,44 + 1 \cdot 1,5 = 4,94 \text{ кН}, \quad M_7 = -3,44 \cdot 1,5 - 1 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -6,29 \text{ кНм},$$

$$N_7 = -2,5 \text{ кН}; \quad Q_8 = 3,44 \text{ кН}, \quad M_8 = -3,44 \cdot 0 = 0 \text{ кНм}, \quad N_8 = -2,5 \text{ кН}.$$

3. По полученным значениям внутренних сил строим эпюры (рис. 3.29), соблюдая дифференциальные зависимости при изгибе.

4. Подбираем поперечное сечение в виде двутавра по формуле (3.44):

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{14,86 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{210 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 0,0708 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 70,8 \text{ см}^3.$$

По сортаменту двутавровых профилей принимаем двутавр № 14, для которого  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$ .

Проверим прочность по касательным напряжениям (формула (3.49)):

$$\tau = \frac{S_x^* \cdot Q_y^{\max}}{b_{\min} \cdot I_x} = \frac{46,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 6,44 \cdot 10^3 \text{ Н}}{4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 10,75 \text{ МПа} \leq [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Здесь  $S_x^* = 46,8 \text{ см}^3$  – статический момент половины сечения относительно оси  $x$  (из сортамента);  $I_x = 572 \text{ см}^4$ ;  $b_{\min} = 4,9 \text{ мм}$  – минимальная ширина сечения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 478 с.
2. Сидоров, В. Н. Сопротивление материалов : учебник / под ред. В. А. Смирнова. – М.: Издательство «Архитектура-С», 2013. – 304 с.
3. Смирнов, В. А. Строительная механика : учебник для вузов / В. А. Смирнов, С. А. Иванов, М. А. Тихонов. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
4. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем : учебное пособие / А. В. Яровая; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.
5. Борисевич, А. А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.
6. Сопротивление материалов : (примеры и задачи) : учебно-методическое пособие для строительных специальностей вузов / М. К. Балькин [и др.]. – Белорусский национальный технический университет, Кафедра «Сопротивление материалов и теория упругости». – Минск : БНТУ, 2008. – 364 с.
7. Гурин, В. В. Механика : лекции / В. В. Гурин. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 276 с.
8. Бабанов, В. В. Теоретическая механика для архитекторов. В 2 т. Т. 2 : учебник для студ. высш. учеб. заведений / В. В. Бабанов. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 272 с.
9. Каримов, Р. И. Прикладная механика. Раздел «Сопротивление материалов» : учебное пособие / Р. И. Каримов, Н. А. Максудова. – Ташкент : ТашГТУ, 2003. – 139 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Основные положения статики .....	4
1.1. Система сил на плоскости. Основные аксиомы статики .....	4
1.2. Равновесие плоской системы сходящихся сил .....	6
1.3. Пара сил и ее момент. Момент силы относительно точки .....	14
1.4. Равновесие плоской системы произвольно расположенных сил .....	15
2. Расчетные схемы сооружений, их образование и анализ .....	19
2.1. Расчетная схема сооружения .....	19
2.2. Виды связей в расчетной схеме .....	20
2.3. Опорные связи плоских расчетных схем .....	22
2.4. Нагрузки и воздействия .....	22
2.5. Классификация расчетных схем. Цель и порядок проведения кинематического анализа .....	24
2.6. Степень свободы плоской расчетной схемы .....	24
2.7. Принципы образования геометрически неизменяемых плоских расчетных схем .....	27
2.8. Примеры проведения кинематического анализа .....	28
3. Основы расчета строительных конструкций на прочность .....	34
3.1. Внешние и внутренние силы. Суть метода сечений для определения внутренних сил .....	34
3.2. Понятие о напряжениях .....	36
3.3. Внутренние усилия, напряжения и деформации при одноосном растяжении/сжатии .....	38
3.4. Механические характеристики и свойства материалов .....	41
3.5. Условия прочности и жесткости при растяжении/сжатии .....	43
3.6. Понятие о сдвиговых деформациях и касательных напряжениях. Закон Гука при сдвиге .....	51
3.7. Практические расчеты на сдвиг (срез) и смятие .....	52
3.8. Геометрические характеристики поперечного сечения стержня .....	59
3.9. Понятие об изгибе балок. Поперечная сила и изгибающий момент .....	82
3.10. Определение внутренних сил в сечениях изгибаемых элементов. Построение эпюр усилий в простых балках .....	83
3.11. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой при плоском изгибе .....	89
3.12. Нормальные и касательные напряжения при изгибе. Расчеты на прочность при изгибе .....	90
Литература .....	99

Учебное издание

**ЮРКОВА** Ксения Владимировна

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: ПРАКТИКУМ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов, обучающихся по направлению специальности  
1-27 01 01-17 «Экономика и организация производства  
(строительство)»

Редактор *А. Д. Спичёнок*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 28.10.2021. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 5,87. Уч.-изд. л. 4,59. Тираж 300. Заказ 822.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя  
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.