

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

О. Л. Вербицкая
С. И. Зиневич
Л. И. Шевчук

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебно-методическое пособие
для строительных специальностей

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2021

УДК 539.31(075.8)

ББК 22.251я7

В31

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Механика материалов и детали машин» УО «Белорусский
государственный аграрный технический университет»
(зав. каф., канд. техн. наук, доцент *В. Н. Основин*);
зав. каф. «Механика материалов и конструкций» УО «Белорусский
государственный технологический университет»,
канд. техн. наук, доцент *А. В. Спиглазов*

Вербицкая, О. Л.

В31 Теория упругости и пластичности: учебно-методическое пособие
для строительных специальностей / О. Л. Вербицкая, С. И. Зиневич,
Л. И. Шевчук. – Минск : БНТУ, 2021. – 128 с.
ISBN 978-985-583-323-0.

Учебно-методическое пособие содержит понятия и определения, основные разделы теории упругости и пластичности: теорию напряженного и деформированного состояния в точке, основные уравнения теории упругости, плоскую задачу теории упругости, изгиб прямоугольных и круглых пластин, понятия о вариационном методе, о методе конечных элементов и о теории пластичности. В пособии приведены примеры решения задач. В конце дан список контрольных вопросов.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: «Автомобильные дороги», «Мосты, транспортные тоннели и метрополитен», «Водохозяйственное строительство» и «Строительство тепловых и атомных электростанций».

УДК 539.31(075.8)

ББК 22.251я7

ISBN 978-985-583-323-0

© Вербицкая О. Л., Зиневич С. И.,
Шевчук Л. И., 2021

© Белорусский национальный
технический университет, 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов третьего курса обучения по специальностям 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство» и 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций». Объем изучаемого раздела дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 17 часов лекций, 17 часов практических занятий.

Целью издания является помощь студентам в освоении методов теории упругости для расчета типовых элементов строительных конструкций дорожных объектов на прочность, жесткость, устойчивость и долговечность, в правильном выборе конструкционных материалов и форм сечений элементов конструкций, обеспечивающих требуемые запасы надежности, безопасность и экономичность сооружений.

Задача пособия – дать студентам навыки по применению методов сопротивления материалов и теории упругости при изучении курсов строительной механики, оснований и фундаментов, механики грунтов, металлических и железобетонных конструкций.

Учебник составлен по материалам лекций, прочитанным для специальности «Мосты и тоннели» и рассчитан на студентов, изучающих раздел «Теория упругости и пластичности» курса «Сопротивление материалов», рассчитанного на 70 учебных часов.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости является одним из разделов механики деформируемого твердого тела. Эта наука появилась примерно триста лет назад и формировалась с большими трудностями в процессе развития научно-технического прогресса. Рассмотрим наиболее важные этапы развития механики деформируемых тел и теории упругости, относящиеся к XVII–XX векам.

Основной закон деформирования упругих тел, в его простейшей линейной форме, был сформулирован в 1678 г. Р. Гуком (1635–1703 гг.). Этот момент можно считать зарождением изучения сопротивления материалов, а впоследствии и теории упругости. Закон был установлен по результатам опыта. Правда, к тому времени еще не было объяснений физической сущности такому явлению, как упругость.

Первая попытка рассмотрения нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями была сделана Г. Бюльфингером (1693–1750 гг.) и опубликована в трудах Российской академии наук в 1729 г.

Первые открытия в математической теории изгиба упругого стержня сделали русские ученые Л. Эйлер (1707–1783 гг.) и Д. Бернулли (1700–1782 гг.). Их труды были опубликованы в 40–70 гг. XVIII века. Эйлеру принадлежат первые исследования упругой устойчивости (задача о продольном изгибе). Эйлер и Бернулли занимались проблемой поперечных колебаний упругого стержня.

Особо отметим то, что причины упругости и содержание ее понятия изложены М. В. Ломоносовым (1711–1765 гг.) в его знаменитом трактате «Попытка теории упругости силы воздуха», представленном им в 1748 г. в Российской академии наук. В своем труде М. В. Ломоносов решительно осуждал тенденцию призывать «по обычаю века» на помощь для отыскания причины упругости воздуха «невесомую материю упругости», то есть господствующую в то время теорию эфира. Материалистической корпускулярной философии М. В. Ломоносова было органически чуждо представление о невесомых материях. Заметим, что М. В. Ломоносову принадлежит также введение в употребление на русском языке слова «упругость».

Первым исследователем, занимавшимся построением общих уравнений равновесия и колебания упругих тел, был французский инженер и ученый А. Навье (1785–1836 гг.). Он исходил из концепции И. Ньютона (1642–1727 гг.) о строении вещества и считал, что упру-

гие реакции возникают вследствие тех изменений молекулярных сил, которые являются результатом перемен во взаимном расположении молекул. В этом смысле проведенные исследования Навье относятся к дискретной теории упругости. Полученные им дифференциальные уравнения выражались в смещениях их молекул и содержали одну постоянную, выражающую упругие свойства тела. Его мемуары были прочитаны в Парижской академии наук в 1821 г. Однако примененный Навье ход рассуждений не получил общего признания.

Открытие в теории распространения света (гипотеза поперечных колебаний) позволило осуществить дальнейшее развитие теории упругости. Проблема распространения волн в упругой среде привлекла тогда внимание трех выдающихся математиков: М. В. Остроградского (1801–1862 гг.), О. Л. Коши (1789–1857 гг.) и С. Д. Пуассона (1781–1840 гг.).

Русский академик М. В. Остроградский внес существенный вклад в развитие динамической теории упругости своими работами о распространении деформаций в упругой изотропной среде, опубликованными в период 1829–1833 гг. С именем М. В. Остроградского связаны не только его работы по динамической теории упругости, но и целая школа в области механики, получившая мировое признание.

В 1822 г. Коши ввел современное в теории упругости понятие о напряжении в точке. Он выразил деформацию в окрестности исследуемой точки через шесть компонентов и вывел уравнение движения (уравнение равновесия), которое отражает зависимость между компонентами напряжений и силами, распределенными по объему, а также силами инерции. Соотношения между напряжениями и деформациями Коши построил на допущениях, что эти соотношения линейные и что главные напряжения в этой точке совпадают с главными осями деформации. Но для описания последних допущений он не указал экспериментальный закон Гука. Полученные им уравнения – именно те, которые приняты сейчас для изотропных тел. Методы первоначальных исследований Коши отличаются от методов исследования Навье. Впоследствии эту теорию Коши применил и в случае кристаллических тел.

В начале XIX ст. трудами Навье, Коши, Остроградского, Пуассона и других ученых были заложены основы той ветви, которую теперь называют математической теорией упругости. Однако методы теории упругости оставались в стороне от инженерной практи-

ки. Представители математической теории упругости того времени занимались главным образом такими физическими проблемами, как объяснения явлений распространения света, исходя из представлений об эфире, как об упругом теле, а также исследованиями напряжений в земной коре вследствие тяготения и охлаждения Земли и т. д.

Теория упругости оставалась наукой достаточно далекой от конкретных технических приложений, и инженеры ею не пользовались. Бурное развитие строительства железных дорог, металлических для них мостов, машиностроения, железного судостроения и связанная с этим необходимость производить расчеты на прочность машин и сооружений позволили создать учение о сопротивлении материалов, как чисто практическую дисциплину. Сопротивление материалов основано на наглядных гипотезах и элементарных математических приемах, широко использующих экспериментальный материал как полученный в результате специально поставленных опытов, так и накапливающийся в процессе эксплуатации тех или иных объектов.

Таким образом, дальнейшее развитие механики деформируемого тела разветвляется на два русла. Одно направление, отталкивающееся от методов, введенных Л. Эйлером и Д. Бернулли, связанное в дальнейшем с именами наших соотечественников (Д. И. Журавского (1821–1891 гг.), Ф. С. Ясинского (1856–1899 гг.), В. Л. Кирпичева (1845–1913 гг.) и других), получает название сопротивления материалов. Другое направление, именуемое математической теорией упругости, является продолжением теории Навье.

В Петербургском институте инженеров путей сообщения французские инженеры Г. Ламе (1795–1870 гг.) и А. Ж. Клапейрон (1799–1864 гг.) развили теорию Навье применительно к строительному делу.

В пору раннего развития механики деформируемого твердого тела возникли большие споры о количестве упругих постоянных (одна, две или больше) и о значении некоторых констант. Причиной споров явилось расхождение опытных данных с результатами теории: ограниченность механики испытания и выбора самого материала для экспериментирования (пробка, желатин, каучук). Однако эти споры принесли и определенную пользу. Они позволили уяснить самые недоступные вопросы о природе молекул и характере их взаимодействия. В результате оказалась несостоятельной гипотеза упругой светопроводящей среды.

Одновременно происходившая эволюция в физических воззрениях на строение материала, развитие атомистической теории в химии, статической молекулярной теории в физике, на распространение энергетических принципов окончательно подорвало доверие к гипотезе, которая ранее использовалась – гипотеза материальных точек, связанных с действием центральных сил через пустоту.

Выдвинутую ранее гипотезу, отражавшую дискретную схему строения материи, впоследствии заменила гипотеза о сплошности, то есть механика континуума, которая рассматривается в наиболее выдающихся произведениях по теории упругости конца XIX в. и современности. К таким работам следует отнести работы А. Ж. Сен-Венана (1797–1886 гг.), в которых решены проблемы изгиба и, особенно, кручения призматических тел, исследования Г. Р. Герца (1857–1894 гг.) в области передачи силы (смятие шаров).

Исследования Сен-Венана по изгибу показали, что элементарная теория изгиба, созданная Бернулли и Эйлером, обладает весьма большой точностью и совершенно достаточна для практических целей. Его исследования по теории кручения показали ошибочность предложения Навье рассчитывать стержень любого профиля по тем формулам, которые еще в 1784 г. были выведены Ш. О. Кулоном (1736–1806 гг.) для стержней круглого сечения и основаны на гипотезе плоских сечений.

В области, так называемой, плоской задачи теории упругости следует особо отметить работы Г. В. Колосова (1867–1936 гг.), изложившего впервые метод, основанный на применении теории функций комплексного переменного. Метод Колосова был впоследствии развит и обобщен Н. И. Мухелишвили (1891–1976 гг.).

Из русских ученых, труды которых были основополагающими, отметим И. Г. Бубнова (1872–1919 гг.) (теория пластин с цепными напряжениями) и Б. Г. Галеркина (1871–1945 гг.) (приближенные методы решения статических задач о расчете пластин, впоследствии использованных в разных задачах теории упругости, в аэродинамике, в гидродинамике и др.). Сюда следует отнести работы Л. С. Лейбензона (1879–1951 гг.) по расчету безбалочных перекрытий, В. Л. Кирпичева по сближению теории упругости со строительной механикой, Х. С. Головина (1844–1904 гг.) по теории изгиба кривых брусьев, П. Ф. Папковича (1887–1946 гг.) по строительной механике корабля, С. П. Тимошенко (1878–1972 гг.) по динамике машин и механизмов.

В XX ст. существенно приближена к запросам практики теория толстых плит, а также теория гибких пластин благодаря работам П. М. Варвака, М. И. Горбунова-Посадова (1908–1991 гг.), Б. Н. Жемочкина (1887–1961 гг.), А. С. Калманюка, П. М. Огибалова (1907–1991 гг.), С. П. Тимошенко.

Следует отметить оригинальный способ определения напряжений в пространственном теле (призме) при помощи функций особого класса, предложенный М. М. Филоненко-Бородачем (1885–1962 гг.). Общая теория пространственной работы тонкостенных стержней, складчатых систем и оболочек детально разработана в трудах В. З. Власова (1906–1958 гг.).

Разработка теории упругости анизотропных сред фактически целиком относится к XX в. (И. И. Гольденблат, С. Г. Лехницкий (1909–1981 гг.) и др.). Большие успехи достигнуты в решении пространственных контактных задач Г. Я. Галиным (1924–2014 гг.). Существенные достижения имеются в новой отрасли теории упругости – нелинейной теории упругости – благодаря трудам В. В. Новожилова (1910–1987 гг.), П. М. Огибалова (1907–1991 гг.). Важные результаты получены в механике композитных материалов. Во второй половине XX в. начала развиваться теория ползучести – Ю. Н. Работнов (1914–1985 гг.), А. Р. Ржаницын (1911–1987 гг.).

В настоящее время теория упругости является самой красивой наукой механики твердого деформированного тела. В какой-то мере это объясняется тем, что в ее создании принимали участие выдающиеся ученые прошлых лет. Однако, получение решения большинства задач теории упругости сталкивается с серьезными трудностями. Отметим, что существует три основных метода решения задач в механике: аналитические решения, в результате которых получаются аналитические формулы или выражения; приближенные методы с использованием рядов, когда решение представлено в виде усеченного ряда; численные методы (метод конечных разностей и метод конечных элементов), дающие решение в виде числовых таблиц. Два первых метода не дают возможности решить многие инженерные задачи. Последний метод значительно расширяет круг решаемых задач теории упругости и пластичности, поэтому чаще, особенно с 1954 г., когда получила развитие вычислительная техника, используется для решения многих задач в этой области механики.

В данном пособии кратко изложены основные разделы современной теории упругости и пластичности, основы вариационных методов и методов конечных элементов, очень кратко изложена теория пластин. В книге приведены решения примеров и контрольные вопросы для проверки знаний студентов. Объем учебного материала в пособии вполне достаточен для изучения раздела «Теория упругости» студентами специальностей «Автомобильные дороги», «Мосты и тоннели», «Водохозяйственное строительство» и «Строительство тепловых и атомных электростанций».

1. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ЕЕ МЕСТО СРЕДИ ДРУГИХ НАУК МЕХАНИКИ

Все науки, изучающие поведение твердых тел, объединены в одно научное направление, которое называется *механикой твердого деформируемого тела*. Самой общей наукой этого направления, в которой изучается поведение не только твердых, но и газообразных и жидких тел, является *реология*. Механика твердого тела включает основные разделы: теоретическая механика; сопротивление материалов; строительная механика; линейная (классическая) теория упругости; нелинейная теория упругости; теория пластичности; теория ползучести; теория упругости анизотропного тела; теория упругости неоднородного тела и др.

Теоретическая механика – это наука, изучающая взаимодействие абсолютно твердых тел и их движение.

Сопротивление материалов – это инженерная дисциплина, изучающая распределение внутренних сил в прямых (или кривых) брусках. В основу исследований положена гипотеза плоских сечений. Изучаются вопросы прочности материалов при различных воздействиях на строительные конструкции, детали машин и механизмов.

Строительная механика (классическая) занимается определением внутренних сил в сложных стержневых системах. В специальных разделах строительной механики изучаются пластины, оболочки, арки и др.

Линейная (классическая) теория упругости изучает деформации и напряжения в линейно упругих телах: толстых брусках, пластинах, оболочках, массивах. Линейная теория упругости основывается на предположениях об идеальной упругости тела и о законе Гука. Диаграмма деформирования для такого материала показана на рис. 1.1, а. *Идеальная упругость* есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, ее вызвавших, полностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры.

Нелинейная теория упругости изучает деформации и напряжения в телах с нелинейной диаграммой деформирования материала. При этом закон деформирования должен быть обратимым. Диаграмма деформирования материала приведена на рис. 1.1, б.

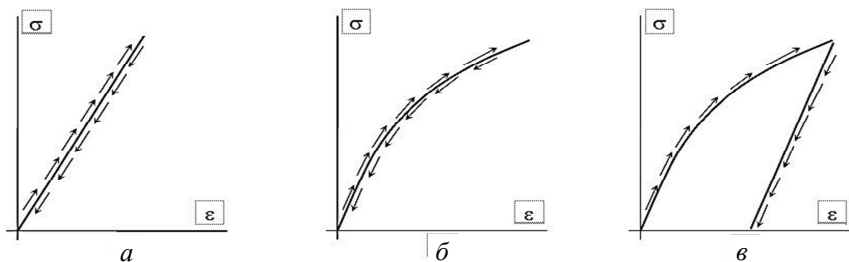


Рис. 1.1. Закон деформирования тела:
а – из линейно упругого материала; *б* – из нелинейно упругого материала;
в – из нелинейно пластического материала

Теория пластичности изучает деформацию тел, имеющих нелинейную диаграмму деформирования, когда процесс деформирования необратим. Закон деформирования материала приведен на рис. 1.1, *в*.

Теория ползучести изучает изменение деформаций и напряжений во времени в результате начального нагружения тела. В теории ползучести вводится понятие о *релаксации* и *ползучести*.

Релаксация – это явление изменения во времени напряжений при постоянной деформации тела.

Ползучесть – это явление изменения во времени деформаций, возникающих в результате начального нагружения тела.

Реология – это наука, устанавливающая общие закономерности образования и развития во времени деформаций любого вещества от различных причин и в различных термодинамических и физико-химических условиях.

2. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В линейной (классической) теории упругости приняты следующие гипотезы:

1. *Гипотеза о сплошности строения тел.* Непрерывное до деформации тело остается непрерывным и после деформации. Поэтому в теории упругости деформации и напряжения выражаются непрерывными функциями, что позволяет использовать дифференциальное и интегральное исчисления.

2. *Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии тела.* До приложения нагрузки напряжения в теле считаются равными нулю. В действительности в деталях машин и элементах строительных конструкций и до приложения нагрузок напряжения уже существуют, которые могут появляться при их изготовлении и обработке. Но установить их величину и характер распределения в телах практически невозможно. Поэтому и принимается такое допущение.

3. *Гипотеза об идеальной линейной упругости.* Все тела являются идеально упругими, а процесс деформирования является обратимым, при этом деформации прямо пропорциональны напряжениям. Для большинства материалов это не так. Но нелинейность деформирования слабо выражена. Поэтому с некоторым приближением такая гипотеза может быть принята.

4. *Гипотеза о шаровой изотропии.* Физико-механические свойства материала одинаковые по всем направлениям, проведенным из данной точки тела. Если это не так, то такие материалы называются *анизотропными*. Расчетом конструкций, изготовленных из анизотропных материалов, занимается *теория упругости анизотропного тела*.

5. *Гипотеза о совершенной однородности.* Во всех точках тела механические свойства материала совершенно одинаковые. Отметим, что если материал имеет кристаллическое строение, то за счет хаотичной ориентации самих кристаллов материал считается квазиизотропным и квазиоднородным.

6. *Принцип «автономной» прочности.* Напряженное состояние в данной точке тела зависит от состояния деформации в этой же точке, но не в любой другой.

7. *Принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок – принцип Сен-Венана.* Если в какой-либо малой части тела приложена уравновешенная система сил, то она вызывает в теле на-

пряжения, которые очень быстро убывают по мере удаления от этой части тела. Примером может служить резание листа (рис. 2.1).

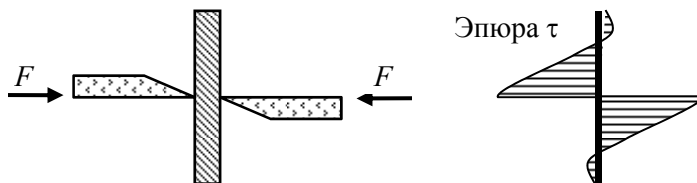


Рис. 2.1. Быстрое убывание касательных напряжений при удалении от места разреза

8. *Гипотеза о малости перемещений.* Перемещения точек тела, вызванные его деформацией, малы по сравнению с размерами самого тела.

3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

3.1. Обозначения напряжений. Тензор напряжений. Шаровой тензор и девиатор тензора напряжений

Дадим определения некоторым понятиям.

Волокно – это совокупность всех материальных точек, расположенных вдоль некоторой непрерывной линии.

Линейный элемент – это малый отрезок некоторого волокна.

Слой тела – совокупность точек тела, расположенных на некоторой поверхности.

Элементарная площадка – бесконечно малый элемент какого-либо слоя.

В механике твердого тела различают внешние и внутренние силы.

Внешние силы – это силы взаимодействия двух тел в результате их соприкосновения или за счет взаимодействия полей (гравитационного, электромагнитного).

Внутренние силы – это силы взаимодействия между частями одного и того же тела. Интенсивностью внутренних сил являются *напряжения*. Дадим определения напряжениям.

Полным напряжением в точке p_v является интенсивность внутренних сил, проходящих через элементарную площадку, взятую вблизи этой точки, и равной пределу отношения:

$$p_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_v}{\Delta A}, \quad (3.1)$$

где ΔP_v – элементарная внутренняя сила, передающаяся через площадку ΔA ;

ΔA – площадь элементарной площадки.

Проекции полного напряжения на координатные оси X , Y и Z соответственно обозначим P_{xv} , P_{yv} , P_{zv} (рис. 3.1).

Нормальное σ_v и касательное τ_v напряжения, соответственно, равны проекциям полного напряжения на нормаль площадки и на плоскость самой площадки (рис. 3.1).

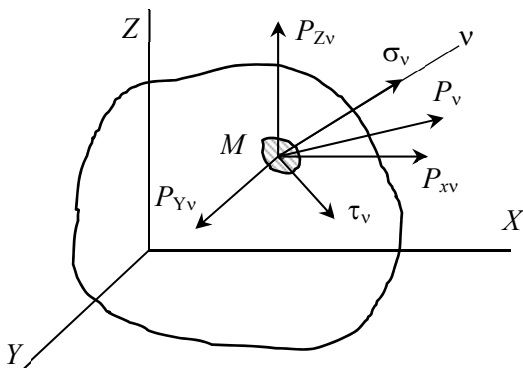


Рис. 3.1. Полное напряжение и его проекции на координатные оси, на нормаль и на плоскость выделенной площадки

Связь полного напряжения с его проекциями имеет вид:

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2. \quad (3.2)$$

В теории упругости принято следующее правило индексации – *первый индекс* соответствует той оси, параллельно которой действует само напряжение, а *второй индекс* – нормаль площадки, к которой приложено напряжение.

Нормальным напряжением в точке σ_v называется проекция полного напряжения в точке на нормаль площадки, к которой приложено само полное напряжение.

Касательным напряжением в точке τ_v называется проекция полного напряжения в точке на плоскость площадки, к которой приложено само полное напряжение.

Поясним правила индексации нормальных и касательных напряжений.

Нормальное напряжение имеет один индекс, совпадающий с обозначением той оси, параллельно которой оно направлено. Нормальное напряжение считается *положительным*, если оно вызывает растяжение, то есть совпадает по направлению с внешней нормалью площадки. Нормальные напряжения обозначаются следующим образом: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (рис. 3.2).

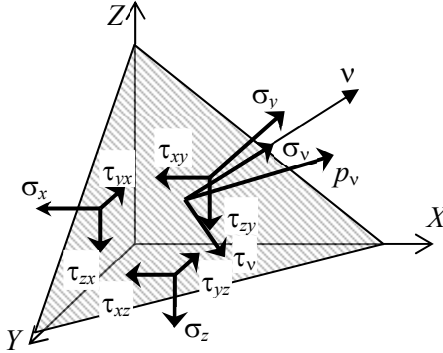


Рис. 3.2. Тетраэдр и напряжения на его площадках

Касательные напряжения имеют два индекса.

Первый индекс совпадает с обозначением той оси, вдоль которой действует само касательное напряжение. *Второй индекс* совпадает с обозначением той оси, которая является нормалью к площадке, где приложено само касательное напряжение.

Касательное напряжение считается *положительным*, если его направление и направление внешней нормали площадки, к которой оно приложено, одновременно совпадают или одновременно не совпадают с положительными направлениями соответствующих осей координат. Касательные напряжения обозначаются следующим образом: τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

Рассмотрим элементарный тетраэдр, вырезанный внутри тела в окрестности какой-либо точки (см. рис. 3.2).

Тетраэдр находится в состоянии равновесия. На его наклонной площадке и координатных площадках действуют напряжения. Отметим, что проекции напряжения на наклонной площадке p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} вызывают нормальные и касательные напряжения на координатных площадках тетраэдра, соответственно:

$$p_{xv} \Rightarrow \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}; \quad p_{yv} \Rightarrow \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}; \quad p_{zv} \Rightarrow \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z. \quad (3.3)$$

Выделим в окрестности внутренней точки тела параллелепипед (рис. 3.3) и покажем напряжения на его видимых для нас площадках.

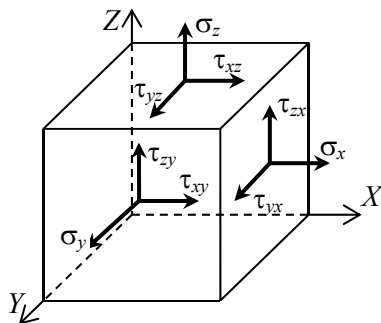


Рис. 3.3. Элемент в форме параллелепипеда и напряжения на его площадках

В классической теории упругости предполагается, что напряжения в пределах каждой площадки элемента распределены равномерно. На площадках элементарного параллелепипеда всего появляется *девять* напряжений. Но согласно закону парности касательных напряжений, полученному в дисциплине сопротивления материалов, справедливы равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3.4)$$

Поэтому только шесть составляющих полного напряжения являются независимыми друг от друга.

Матрица, составленная из компонент напряжения, расположенных в определенном порядке, называется *тензором напряжения*.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Экспериментально установлено, что опасность разрушения материала зависит в большей мере от деформации изменения формы тела. Поэтому для суждения о прочности необходимо из общей деформации тела выделить те компоненты, которые зависят от изме-

нения формы, и те, которые зависят от изменения объема. Таким же образом следует разделять и компоненты тензора напряжения.

Тензор напряжения можно представить как сумму двух тензоров: шарового тензора напряжений и тензора девиатора напряжения:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}, \quad (3.6)$$

где T_{σ}^0 – шаровой тензор напряжений;

D_{σ} – тензор-девиатор напряжения или девиатор напряжений;

σ_m – среднее напряжение.

$$\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$T_{\sigma}^0 = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix};$$

$$D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}.$$

3.2. Напряженное состояние в точке.

Частные случаи напряженных состояний

Напряженным состоянием в точке тела называется совокупность напряжений, приложенных к всевозможным площадкам, проведенным в окрестности данной точки. Напряженное состояние считается вполне определенным, если можно найти напряжения на любой площадке, проведенной в окрестности исследуемой точки. Представление о напряженном состоянии в точке полностью определено тензором напряжений. В теории упругости отличают три основных вида напряженных состояний – линейное (одноосное), плоское (двуосное) и объемное (трехосное).

Линейным напряженным состоянием называется такое состояние, при котором две пары площадок элементарного параллелепипеда свободны от напряжений (рис. 3.4, а).

Плоским напряженным состоянием называется такое состояние, при котором только одна пара противоположных площадок элементарного параллелепипеда свободна от напряжений (рис. 3.4, б).

Объемным напряженным состоянием называется такое состояние, при котором в элементарном параллелепипеде нет свободных от напряжений площадок (рис. 3.4, в).

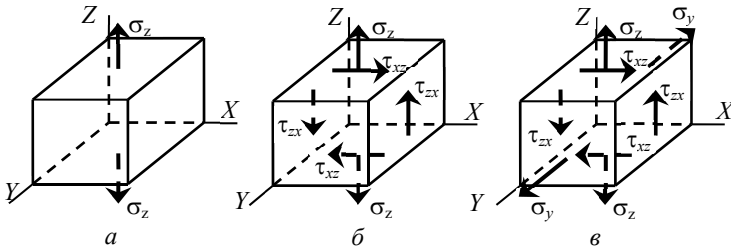


Рис. 3.4. Примеры видов напряженных состояний:
а – линейное; б – плоское; в – объемное

3.3. Условия на контуре. Граничные условия

Между интенсивностью внешней нагрузки, действующей на какую-либо точку поверхности тела, и компонентами напряжения, действующими в окрестности той же точки, существует зависимость. Получим ее. Для этого рассмотрим элементарный тетраэдр, вырезанный в окрестности точки поверхности тела (рис. 3.5).

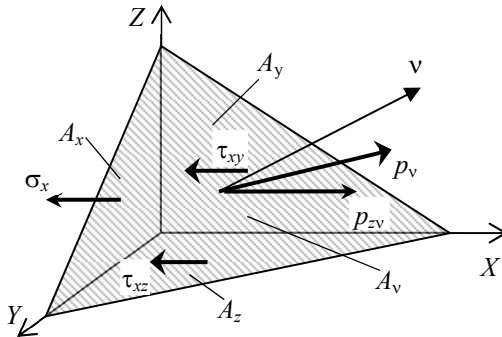


Рис. 3.5. Элементарный тетраэдр и напряжения на его площадках

Введем обозначения:

A_v – площадь наклонной грани с нормалью v ;

A_x – площадь грани с нормалью X ;

A_y – площадь грани с нормалью Y ;

A_z – площадь грани с нормалью Z .

Косинусы углов между координатными осями X , Y и Z и внешней нормалью v наклонной площадки обозначают буквами, соответственно, $l = \cos(X, v)$; $m = \cos(Y, v)$; $n = \cos(Z, v)$ и называют *направляющими косинусами наклонной площадки*.

Площади граней тетраэдра связаны между собой зависимостью:

$$A_x = A_v l; \quad A_y = A_v m; \quad A_z = A_v n. \quad (3.7)$$

Из геометрических соображений, очевидно, что направляющие косинусы связаны между собой уравнением (3.8):

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3.8)$$

Под действием внешних и внутренних сил элементарный тетраэдр должен находиться в состоянии равновесия. Условие равновесия выражается уравнением равновесия. Запишем одно из них:

$$\sum X = 0; \quad p_{xv} A_v - \sigma_x A_x - \tau_{xy} A_y - \tau_{xz} A_z = 0. \quad (3.9)$$

Выполним перенос и учтем зависимости между площадями граний элемента (3.7):

$$p_{xv} A_v = \sigma_x A_v l + \tau_{xy} A_v m + \tau_{xz} A_v n. \quad (3.10)$$

Разделим левую и правую части уравнения (3.10) на A_v и получим:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (3.11)$$

Аналогично составим два других уравнения и в итоге получим условие на поверхности тела или *статические граничные условия*:

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (3.12)$$

3.4. Исследование напряженного состояния в точке

Уравнения, выражающие граничные условия (3.12), справедливы и для точек, расположенных внутри тела. Только в этом случае p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} являются проекциями не интенсивности нагрузки, а проекциями полного напряжения p_v в рассматриваемой точке (рис. 3.6).

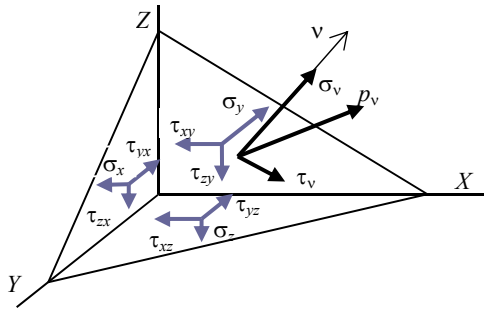


Рис. 3.6. Тетраэдр, взятый около точки внутри тела, и напряжения на его площадках

Согласно (3.12) проекции полного напряжения p_v на координатные оси X, Y и Z могут быть выражены через компоненты тензора напряжений T_{σ} (3.13):

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (3.13)$$

Разложим полное напряжение p_v на две составляющие: нормальное напряжение σ_v и касательное напряжение τ_v . Полное напряжение равно:

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2. \quad (3.14)$$

Проектируем каждую составляющую p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} полного напряжения p_v на нормаль к наклонной площадке и проекции суммируем. В результате получим нормальное напряжение на наклонной площадке:

$$\begin{aligned} \sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n = & (\sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n)l + (\tau_{yx}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n)m + \\ & + (\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n)n = \sigma_x l^2 + \tau_{xy}lm + \tau_{xz}ln + \tau_{yx}ml + \sigma_y m^2 + \\ & + \tau_{yz}mn + \tau_{zx}nl + \tau_{zy}nm + \sigma_z n^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Учитывая закон парности касательных напряжений и приведя подобные, получим уравнение для нормального напряжения на наклонной площадке внутри тела:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy}lm + \tau_{yz}mn + \tau_{zx}ml). \quad (3.16)$$

Касательные напряжения на наклонной площадке вычисляются как разность квадратов полного напряжения и нормального напряжения:

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (3.17)$$

3.5. Главные напряжения и главные площадки. Инварианты

Из сопротивления материалов известно, что площадки, проведенные около некоторой точки и на которых касательные напряжения равны нулю, называются *главными площадками*.

Нормальные напряжения, действующие на таких площадках, называются *главными напряжениями*. Пусть на наклонной площадке касательные напряжения равны нулю (рис. 3.7). Тогда полное напряжение p_v должно располагаться на нормали площадки v и быть равным по величине своей проекции на нормаль σ_v :

$$\tau_v = 0, \quad p_v = \sigma_v. \quad (3.18)$$

Выразим проекции полного напряжения на наклонной площадке с учетом (3.13), (3.18):

$$\begin{cases} p_{xv} = p_v l = \sigma_v l = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} = p_v m = \sigma_v m = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} = p_v n = \sigma_v n = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{cases} \quad (3.19)$$

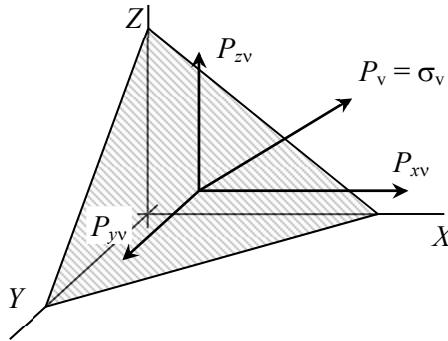


Рис. 3.7. Тетраэдр, взятый около точки внутри тела, и напряжения на его площадках

Обозначим для удобства $\sigma_v \rightarrow \sigma$ и учтем последние уравнения в системе (3.19), получим:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Кроме того, из геометрии известна зависимость между направляющими косинусами:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3.21)$$

В результате получена система четырех уравнений (3.20) и (3.21) с четырьмя неизвестными (l , m , n и σ). Первые три уравнения (3.20) однородные и образуют систему, имеющую нулевое решение. Но это решение не подходит к четвертому уравнению (3.21). Поэтому следует потребовать, чтобы система первых трех уравнений имела кроме нулевого решения еще и ненулевое. А это возможно только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов системы первых трех уравнений (3.20) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Это требование дает нам уравнение (3.23), с помощью которого устанавливаются значения σ , обеспечивающие выполнение условия, которому соответствует рис. 3.7 и равенства (3.18). А это значит, что существуют площадки, на которых касательные напряжения равны нулю:

$$\sigma^3 - \sigma^I \sigma^2 + \sigma^{II} \sigma - \sigma^{III} = 0. \quad (3.23)$$

Коэффициенты σ^I , σ^{II} , σ^{III} выражаются через компоненты тензора напряжений T_σ . Три корня полученного кубического уравнения (3.23) являются главными напряжениями, которые принято индексировать по следующему условию:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (3.24)$$

Подставляя какое-либо главное напряжение σ_k ($k = 1, 2, 3$) в первые два уравнения (3.20) и учитывая зависимость между направляю-

щими косинусами (3.21), можно определить направляющие косинусы k -й площадки, на которой касательные напряжения равны нулю. Такие площадки принято называть *главными площадками*. Исследования показали, что на главных площадках действуют экстремальные нормальные напряжения.

Для объемного напряженного состояния в любой точке тела всегда существует три главных площадки или, в особых случаях, их может быть бесконечное множество. Если около заданной точки вырезать два элементарных параллелепипеда, по-разному ориентированных в пространстве, то на их площадках будут действовать разные напряжения. Однако, независимо от ориентации этих параллелепипедов, около рассматриваемой точки будут действовать строго определенные главные напряжения. То есть главные напряжения будут зависеть не от компонентов тензора напряжений, а только от напряженного состояния той точки тела, которая рассматривается. Поэтому главные напряжения инвариантны по отношению к преобразованию системы координат. Но главные напряжения являются корнями кубического уравнения (3.23). Поэтому и коэффициенты кубического уравнения (3.23) тоже будут инвариантны по отношению к преобразованию координат.

Пусть задан тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Первый инвариант тензора напряжений σ^I равен сумме элементов тензора напряжений, расположенных на его главной диагонали:

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (3.26)$$

Второй инвариант тензора напряжений σ^{II} равен сумме миноров определителя тензора напряжений, если производить разложение по элементам его главной диагонали:

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{II}} &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} = \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Третий инвариант тензора напряжений σ^{III} равен развернутому в строку определителю тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{III}} &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ &- \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.\end{aligned}\quad (3.28)$$

В теории напряженного состояния и в теории деформированного состояния инварианты σ^{I} , σ^{II} и σ^{III} следует рассматривать как основные характеристики напряженного и деформированного состояний в точке. Полученные инварианты являются *базисными*. Любые комбинации инвариантов – это тоже инварианты.

Исследованиями установлено, что для объемного напряженного состояния экстремальные касательные напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \\ \tau_{23} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \\ \tau_{31} &= \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).\end{aligned}\quad (3.29)$$

Площадки с экстремальными касательными напряжениями расположены под углом 45° к соответствующим главным площадкам. Пример расположения площадок с экстремальными касательными напряжениями показан на рисунке (рис. 3.8).

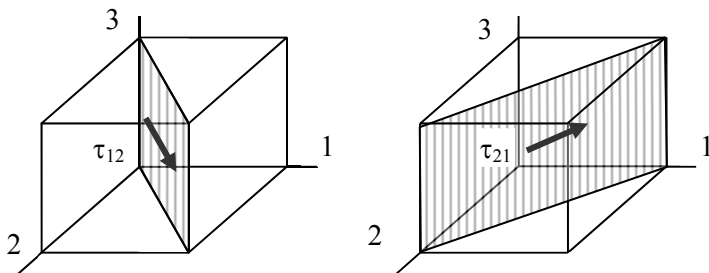


Рис. 3.8. Примеры расположения площадок с экстремальными касательными напряжениями

3.6. Октаэдрические площадки и напряжения

Площадки, равнонаклоненные к главным площадкам, называются *октаэдрическими*. В этом случае все направляющие косинусы октаэдрической площадки одинаковые и равны

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.30)$$

Проекции полного октаэдрического напряжения на нормали главных площадок равны

$$p_{1v} = \sigma_1 l; \quad p_{2v} = \sigma_2 m; \quad p_{3v} = \sigma_3 n; \quad (3.31)$$

Отсюда следует выражение для полного напряжения на октаэдрической площадке:

$$p_{\text{oct}}^2 = p_{1v}^2 + p_{2v}^2 + p_{3v}^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \quad (3.32)$$

или, учитывая значения направляющих косинусов октаэдрических площадок (3.30), получим

$$p_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \quad (3.33)$$

Условимся называть *средним напряжением* величину равную

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.34)$$

Отметим, что среднее напряжение можно выразить через первую инварианту тензора напряжений:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma^I. \quad (3.35)$$

Отсюда следует, что среднее напряжение также является инвариантой. Выведем уравнение для нормального октаэдрического напряжения. Для этого воспользуемся уравнением (3.16). Для октаэдрической площадки, учитывая значения ее направляющих косинусов, получим выражение для *октаэдрического нормального напряжения, выраженного через главные напряжения*:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.36)$$

или через среднее напряжение:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m. \quad (3.37)$$

Определим *октаэдрическое касательное напряжение*:

$$\tau_{\text{oct}}^2 = p_{\text{oct}}^2 - \sigma_{\text{oct}}^2, \quad (3.38)$$

или подробно

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}}^2 &= \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2 - \left[\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 = \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2 - \\ &- \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_1 - \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_1\sigma_3 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_1 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_2\sigma_3 - \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_1 - \\ &- \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_2 - \frac{1}{9}\sigma_3\sigma_3 = \frac{2}{9}\sigma_1^2 + \frac{2}{9}\sigma_2^2 + \frac{2}{9}\sigma_3^2 - \frac{2}{9}\sigma_1\sigma_2 - \frac{2}{9}\sigma_2\sigma_3 - \frac{2}{9}\sigma_3\sigma_1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Окончательно имеем

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1), \quad (3.40)$$

или

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2)]. \quad (3.41)$$

В итоге получим

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.42)$$

В сопротивлении материалов для суждения о прочности материала введено понятие *приведенного напряжения* (*интенсивности напряжения*), которое может быть выражено через главные напряжения или через октаэдрическое напряжение:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

или

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{\text{oct}}. \quad (3.43)$$

Около любой точки тела всегда можно провести восемь октаэдрических площадок, которые образуют тело, называемое *октаэдром* (рис. 3.9). Отсюда и происходит название площадок и напряжений.

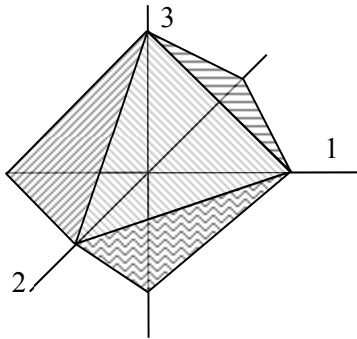


Рис. 3.9. Октаэдр, построенный из октаэдрических площадок

3.7. Примеры к разделу 3

Пример 1. Пусть на видимых площадках элемента в форме параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения, показанные на рис. 3.10.

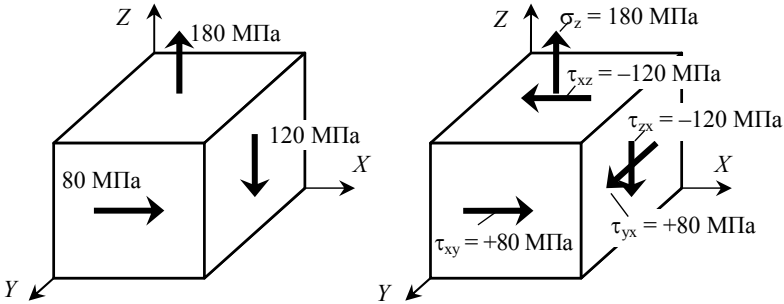


Рис. 3.10. Напряжения на площадках элемента в форме параллелепипеда

Требуется дополнить недостающие напряжения и обозначить их, установить их знаки и записать тензор напряжений.

Запишем тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 80 & -120 \\ 80 & 0 & 0 \\ -120 & 0 & 180 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Пример 2. Найти нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке, если известны ее направляющие косинусы и тензор напряжений в окрестности исследуемой точки деформируемого тела.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -60 & 100 \\ -60 & 140 & 90 \\ 100 & 90 & 80 \end{bmatrix}, \text{ МПа;}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Найдем проекции полного напряжения на координатные оси по формулам (3.13):

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - 60 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 36,07 \text{ МПа};$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = -60 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 140 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 119,97 \text{ МПа};$$

$$p_{zv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = +100 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 90 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 80 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 149,36 \text{ МПа}.$$

Вычислим полное напряжение на наклонной площадке по формуле (3.14):

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2} = \sqrt{36,07^2 + 119,97^2 + 149,36^2} = 194,94 \text{ МПа}.$$

Вычислим нормальное напряжение на наклонной площадке по формуле (3.15):

$$\begin{aligned} \sigma_v = p_{xv} l + p_{yv} m + p_{zv} n &= 36,07 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 119,97 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 149,36 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= 189,60 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Вычислим касательное напряжение на наклонной площадке по формуле (3.17):

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{194,94^2 - 189,60^2} = 45,31 \text{ МПа}.$$

Пример 3. Пусть длинный стержень переменного сечения, показанный на рис. 3.11, растянут силой F .

Доказать, что в поперечных сечениях стержня появляются не только нормальные напряжения, но также и касательные, нормальные и касательные напряжения в продольных сечениях стержня. Найти их значения, если площадь поперечного сечения равна A .

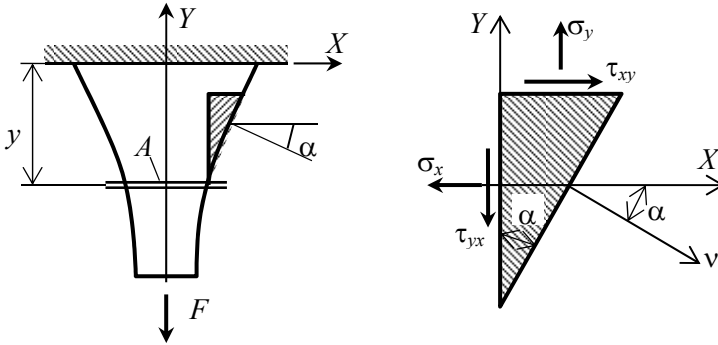


Рис. 3.11. Стержень переменной жесткости, нагруженный сосредоточенной силой

Полагаем, что нормальные напряжения распределяются по площади сечения равномерно. Тогда по формуле сопротивления материалов нормальное напряжение в поперечном сечении равно:

$$\sigma_y = \frac{F}{A}.$$

Запишем уравнения, выражающие условия на границе стержня, учитывая, что имеет место плоское напряженное состояние $\sigma_z = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, а на поверхности стержня нагрузка отсутствует.

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = 0; & (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0. & (**) \end{cases}$$

Значения направляющих косинусов выразим через угол α .

$$l = \cos(x, v) = \cos \alpha; \quad m = \cos(y, v) = \sin \alpha.$$

Из второго уравнения граничных условий (**) выразим касательное напряжение τ_{yx} :

$$\tau_{yx} = -\sigma_y \frac{m}{l} = -\frac{F \sin \alpha}{A \cos \alpha} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

По закону парности касательных напряжений имеем

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из первого уравнения (*) на границе стержня выразим нормальное напряжение σ_x :

$$\sigma_x = -\tau_{xy} \frac{m}{l} = \frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F}{A} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Утверждение доказано. Значение напряжений найдено:

$$\sigma_y = \frac{F}{A}; \quad \sigma_x = \frac{F}{A} \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{F}{A} \operatorname{tg} \alpha.$$

Пример 5. Пусть напряженное состояние в исследуемой точке тела характеризуется тензором напряжения, приведенным в примере 4. Запишем тензор напряжения через главные напряжения, полученные в примере 4.

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190,84 & 0 & 0 \\ 0 & 122,36 & 0 \\ 0 & 0 & -143,20 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Требуется найти октаэдрические напряжения в окрестности исследуемой точки. Учитываем, что октаэдрические площадки равнонаклонены к главным напряжениям и их направляющие косинусы равны по формулам (3.30):

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad m = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вычислим полное октаэдрическое напряжение по формуле (3.33):

$$\begin{aligned} p_{\text{окт}} &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(190,84^2 + 122,36^2 + 143,20^2)} = \\ &= 154,81 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Определим среднее напряжение по формуле (3.34):

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(190,84 + 122,36 - 143,20) = 56,67 \text{ МПа.}$$

Найдем октаэдрическое нормальное напряжение по формуле (3.37):

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = 56,67 \text{ МПа.}$$

Определим октаэдрическое касательное напряжение по формуле (3.42):

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(190,84 - 122,36)^2 + (122,36 + 143,20)^2 + (-143,20 - 190,84)^2} = \\ &= 144,07 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Проверим результаты:

$$p_{\text{oct}} = \sqrt{\sigma_{\text{oct}}^2 + \tau_{\text{oct}}^2} = \sqrt{56,67^2 + 144,07^2} = 154,81 \text{ МПа.}$$

Полное октаэдрическое напряжение и корень из суммы квадратов нормального и касательного октаэдрических напряжений совпадают. Следовательно, найденное решение правильное.

4. ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ

4.1. Компонент деформации. Тензор деформации. Шаровой тензор и девиатор тензора деформаций

Относительная линейная деформация в точке, вдоль некоторого волокна ε_v , называется величиной, равной пределу отношения (рис. 4.1).

$$\varepsilon_v = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}, \quad (4.1)$$

где ΔS – приращение к длине волокна;

S – длина волокна.

Деформацию элементарного параллелепипеда можно разложить на три линейных $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и три угловых $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ деформации.

Индекс относительной линейной деформации совпадает с обозначением той оси, в направлении которой происходит деформация. При удлинении волокна деформация считается положительной, а при укорочении – отрицательной.

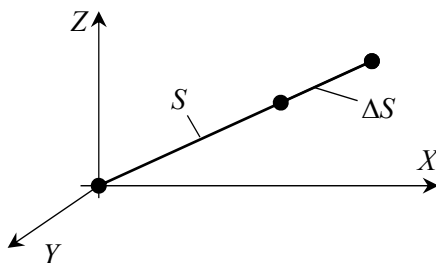


Рис. 4.1. Волокно и его линейная деформация

Индексы относительной угловой деформации (угла сдвига) совпадают с обозначением осей координат, расположенных в плоскости сдвига. При увеличении углового размера тела угол сдвига принимается положительным, а при уменьшении – отрицательным.

Линейные деформации вызывают изменение объема тела, а деформации сдвига вызывают изменение его формы.

Рассмотрим параллелепипед с ребрами равными единице (рис. 4.2).

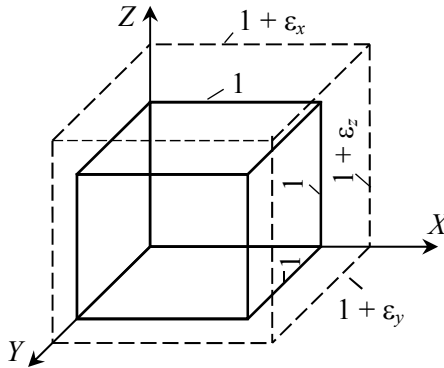


Рис. 4.2. Линейные деформации элементарного параллелепипеда

Пусть его линейные относительные деформации по направлениям соответствующих осей координат равны ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z . Так как длина его ребер равна единице, абсолютные деформации ребер по своим значениям равны ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z . Тогда изменение объема элементарного параллелепипеда равно

$$\theta = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1. \quad (4.2)$$

Раскроем скобки и получим

$$\begin{aligned} \theta &= (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_z + \epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z) - 1 = \\ &= (1 + \epsilon_z + \epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_x + \epsilon_x\epsilon_z + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z) - 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Единицы взаимно уничтожаются. Учитывая, что относительные линейные деформации гораздо меньше единицы, слагаемыми $\epsilon_y\epsilon_z$, $\epsilon_x\epsilon_z$, $\epsilon_x\epsilon_y$, $\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z$ пренебрегаем. В результате получим

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

или

$$\theta = 3\varepsilon_m. \quad (4.4)$$

Из геометрических соображений в теории упругости имеют место тождественности:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}. \quad (4.5)$$

Из компонент деформации строится тензор деформации:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

1/2 перед углами сдвига введена для удобства записей операций с тензорами напряжений и деформаций. Деформированное состояние в точке тела вполне определено, если для этой точки задан тензор деформаций.

Тензор деформаций представляют как сумму двух тензоров

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon, \quad (4.7)$$

где T_ε^0 – шаровой тензор деформаций, который характеризует изменение объема в окрестности некоторой точки;

D_ε – девиатор тензора деформаций, который характеризует формоизменение в окрестности исследуемой точки.

$$T_\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix}; \quad D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}.$$

4.2. Исследование деформированного состояния в окрестности точки. Главные деформации и главные оси деформации.

Инварианты тензора деформаций

Удлинение отрезка какого-либо прямолинейного волокна, проходящего через заданную точку тела и расположенного вдоль оси v , можно выразить через компоненты деформации той же точки:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (4.8)$$

В окрестности каждой точки тела существует три взаимно перпендикулярные главные направления – *главные оси деформации*. Эти оси обладают таким свойством, что волокна, лежащие на них, испытывают только изменение длины этих волокон, но они не искривляются. Для изотропных тел главные оси деформации совпадают с направлениями главных напряжений. Деформации по направлениям главных осей деформации называются *главными деформациями*. Для вычисления значений главных деформаций необходимо решить кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^I \varepsilon^2 + \varepsilon^{II} \varepsilon - \varepsilon^{III} = 0, \quad (4.9)$$

где ε^I , ε^{II} , ε^{III} – инварианты тензора деформаций.

Корни кубического уравнения (4.9) и будут значениями главных деформаций. Главные деформации индексируются по условию

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3. \quad (4.10)$$

Первая инварианта тензора деформаций равна сумме его элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.11)$$

Вторая инварианта тензора деформаций равна сумме миноров, взятых при элементах, расположенных на его главной диагонали:

$$\varepsilon^{\text{II}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix} = \quad (4.12)$$

$$= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2).$$

Третья инварианта тензора деформации равна определителю тензора деформации:

$$\varepsilon^{\text{III}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} = \quad (4.13)$$

$$= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2).$$

Октаэдрическая линейная деформация вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \varepsilon_m. \quad (4.14)$$

Октаэдрический угол сдвига равен

$$\gamma_{\text{oct}} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (4.15)$$

Наибольший угол сдвига определяется по формуле

$$\gamma_{\text{max}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (4.16)$$

В теории упругости вводится понятие *интенсивности деформаций*:

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)}\gamma_{\text{oct}}. \quad (4.17)$$

В пределах упругих деформаций между обобщенным напряжением и обобщенной деформацией существует простая связь

$$\sigma_i = E\varepsilon_i. \quad (4.18)$$

4.3. Примеры к разделу 4

Пример 5. Пусть в окрестности опасной точки твердого деформируемого тела деформированное состояние определяется тензором

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,20 & -0,90 & 0,525 \\ -0,90 & -1,90 & -0,30 \\ 0,525 & -0,30 & 2,70 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Требуется найти главные деформации в окрестности исследуемой точки.

Вычислим инварианты тензора деформации по формулам (4.11), (4.12), (4.13):

$$\begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (3,20 - 1,90 + 2,70)10^{-3} = 4,00 \cdot 10^{-3}; \\ \varepsilon^{II} &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\ &= \left[3,20 \cdot (-1,90) - 1,90 \cdot 2,70 + 2,70 \cdot 3,20 - \frac{1}{4} (1,8^2 + 0,6^2 + 1,05^2) \right] 10^{-6} = \\ &= -3,746 \cdot 10^{-6}; \\ \varepsilon^{III} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} (\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = \\ &= \left[3,20 \cdot (-1,90) \cdot 2,70 + \frac{1}{4} (-1,8) \cdot (-0,6) \cdot 1,05 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (3,20 \cdot 0,60^2 - 1,90 \cdot 1,05^2 + 2,70 \cdot 1,80^2) \right] 10^{-9} = -18,084 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Решим кубическое уравнение по формуле (4.9):

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^I \varepsilon^2 + \varepsilon^{\text{II}} \varepsilon - \varepsilon^{\text{III}} = 0.$$

С помощью подстановки

$$\varepsilon = y + \frac{\varepsilon^I}{3}$$

получим неполное кубическое уравнение:

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Вычислим коэффициенты неполного кубического уравнения:

$$p = \frac{1}{3} \left[\varepsilon^{\text{II}} - \frac{(\varepsilon^I)^2}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[-3,746 - \frac{4,0^2}{3} \right] 10^{-6} = -3,026 \cdot 10^{-6};$$

$$q = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{27} (\varepsilon^I)^3 + \frac{1}{3} \varepsilon^I \varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon^{\text{III}} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{27} 4,0^3 + \frac{1}{3} 4,0(-3,746) + 18,084 \right] 10^{-9} = 4,174 \cdot 10^{-9}.$$

Определим параметр r :

$$r = \sqrt{|p|} = \sqrt{3,026 \cdot 10^{-6}} = 1,740 \cdot 10^{-3}.$$

Знак перед радикалом должен совпадать со знаком q . Поэтому ставим перед радикалом «плюс».

Вычислим вспомогательный угол φ :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{q}{r^3} \right) = \arccos \left[\frac{4,174 \cdot 10^{-9}}{(1,74 \cdot 10^{-3})^3} \right] = 0,656.$$

Найдем корни неполного кубического уравнения:

$$y_1 = -2r \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = -2 \cdot 1,74 \cos\left(\frac{0,656}{3}\right) = -3,397 \cdot 10^{-3};$$
$$y_2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 1,74 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{0,656}{3}\right) = 2,351 \cdot 10^{-3};$$
$$y_3 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot 1,74 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{0,656}{3}\right) = 1,045 \cdot 10^{-3}.$$

Проверим решение неполного кубического уравнения:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -3,397 + 2,351 + 1,045 = 0.$$

Сумма корней неполного кубического уравнения равна нулю. Следовательно, решение неполного кубического уравнения правильное.

Найдем корни полного кубического уравнения (4.9). Для этого воспользуемся подстановкой

$$\varepsilon_1 = y_1 + \frac{\varepsilon^I}{3} = -3,397 \cdot 10^{-3} + \frac{4,0 \cdot 10^{-3}}{3} = -2,063 \cdot 10^{-3};$$
$$\varepsilon_2 = y_2 + \frac{\varepsilon^I}{3} = 2,351 \cdot 10^{-3} + \frac{4,0 \cdot 10^{-3}}{3} = 3,685 \cdot 10^{-3};$$
$$\varepsilon_3 = y_3 + \frac{\varepsilon^I}{3} = 1,045 \cdot 10^{-3} + \frac{4,0 \cdot 10^{-3}}{3} = 2,379 \cdot 10^{-3}.$$

С учетом принятого в механике условия обозначения главных деформаций (формула (4.10)) $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ обозначим полученные главные деформации следующим образом:

$$\varepsilon_1 = 3,685 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_2 = 2,379 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_3 = -2,063 \cdot 10^{-3}.$$

Проверим полученные значения главных деформаций. Для этого, используя их, вычислим инварианты тензора деформаций:

$$\varepsilon^I = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3,685 \cdot 10^{-3} + 2,379 \cdot 10^{-3} - 2,063 \cdot 10^{-3} = 4,00 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{II} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \\ &= [3,685 \cdot 2,379 + 2,379 \cdot (-2,063) - 2,063 \cdot 3,685] 10^{-6} = -3,746 \cdot 10^{-6}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{III} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 3,685 \cdot 2,379 \cdot (-2,063) \cdot 10^{-9} = -18,084 \cdot 10^{-9}.$$

Значения инвариант, полученных по значениям главных деформаций, совпали с инвариантами, полученными по значениям деформаций на координатных площадках. Следовательно, кубическое уравнение решено правильно.

5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

5.1. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

В окрестности точки тела выделим элементарный параллелепипед (рис. 5.1). Покажем только те напряжения на его площадках, которые параллельны оси X .

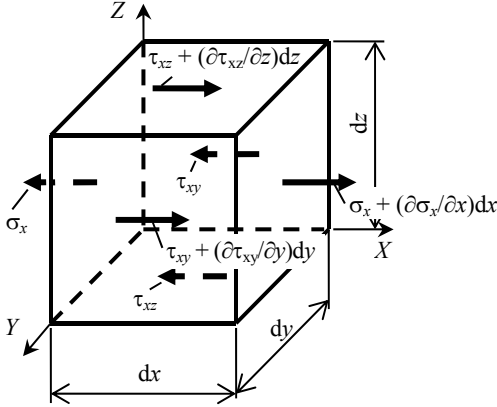


Рис. 5.1. Элемент с напряжениями на его площадках, параллельными оси X

Обозначим буквами U, V, W перемещения по направлениям, соответственно, осей X, Y и Z . Учитывая, что элементарный параллелепипед находится в состоянии равновесия, составим уравнение равновесия:

$$\sum X = m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) запишем подробнее:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{xy} dzdx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$

где ρ – плотность материала;

X – проекция на ось X объемной силы, то есть распределенной силы, отнесенной к единице массы (например, сила тяжести).

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} \sigma_x dydz + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dydz - \sigma_x dydz + \tau_{xy} dzdx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy dz dx - \tau_{xy} dzdx + \\ + \tau_{xz} dx dy + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dx dy - \tau_{xz} dx dy + X \rho dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Приведем подобные слагаемые и разделим на объем элементарного параллелепипеда $dx dy dz$.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \rho = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (5.4)$$

Составляя аналогичные уравнения равновесия на оси Y и Z , получим еще два дифференциальных уравнения. Все три уравнения можно объединить в систему, так как они содержат общие неизвестные.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \rho &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \rho &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \rho &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned} \right. \quad (5.5)$$

5.2. Геометрические уравнения (уравнения Коши)

Вырежем элементарный объем в окрестности исследуемой точки. В результате деформации тела будет изменяться и элементарный объем (рис. 5.2). Полагаем, что перемещения точек элемента и углы поворота его площадок малы. Относительные линейные деформации элемента равны

$$\varepsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u\right) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v\right) - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

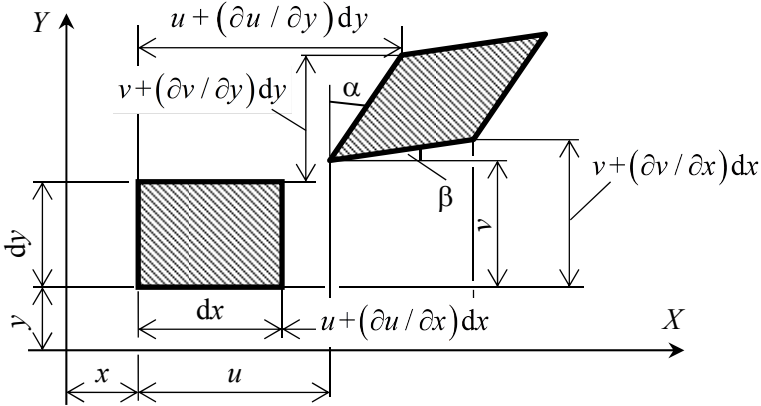


Рис. 5.2. Смещения, линейные и угловые деформации элементарного объема

Угловая деформация (угол сдвига) элемента равна сумме углов поворота его площадок. В выражениях для углов учтено, что ε_x и ε_y малы по сравнению с единицей.

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy - v} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{\frac{\partial v}{\partial y} dy + dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{(\varepsilon_y + 1) dy} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (5.7)$$

$$\beta = \operatorname{tg} \beta = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{\frac{\partial u}{\partial x} dx + dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{(\varepsilon_x + 1) dx} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (5.8)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.9)$$

По аналогии можно получить все зависимости между деформациями и перемещениями для объемного напряженного состояния:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Полученные уравнения называются *геометрическими уравнениями* или *уравнениями Коши*.

5.3. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана)

Перемещение любой точки сплошного тела определяется тремя функциями $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Деформации в любой точке определяются шестью функциями: $\varepsilon_x(x, y, z)$, $\varepsilon_y(x, y, z)$, $\varepsilon_z(x, y, z)$, $\gamma_{xy}(x, y, z)$, $\gamma_{yz}(x, y, z)$, $\gamma_{zx}(x, y, z)$. Если заданы три функции перемещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, то этим определены все шесть составляющих деформации, так как они выражаются через частные производные перемещений (уравнение Коши). И наоборот, если заданы шесть составляющих деформации, то это не значит, что определены три составляющие перемещений. Очевидно, между составляющими деформации должны быть еще какие-то дополнительные зависимости. Имея зависимости (5.10), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.11)$$

Продифференцируем их дважды:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}. \quad (5.12)$$

Сложим эти уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (5.13)$$

или

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}. \quad (5.14)$$

Запишем уравнения Коши (5.10):

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.15)$$

Продифференцируем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; & \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Сложим первое и второе уравнения и вычтем третье

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \\ &\quad - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Продифференцируем по ∂z и получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}, \quad (5.18)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \quad (5.19)$$

Аналогично можно получить все шесть зависимостей для объемного напряженного состояния.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \quad (5.20) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned}$$

Эти уравнения впервые получены Сен-Венаном и называются *уравнениями Сен-Венана*, или *уравнениями неразрывности*.

Физический смысл уравнений Сен-Венана. Если для всех параллелепипедов, на которые мысленно разделено все тело, назначить шесть независимых составляющих деформации, то из таких деформированных параллелепипедов нельзя сложить непрерывное деформированное тело. Для того чтобы неразрывность тела была обеспечена при заданных деформациях, следует их задавать так, чтобы были обеспечены уравнения Сен-Венана.

Энергетический смысл уравнений Сен-Венана. Выполнение принципа неразрывности деформаций соответствует в упругом теле минимальному значению накапливаемой телом потенциальной энергии деформации.

5.4. Примеры к разделу 5

Пример 6. В консольной балке, показанной на рисунке (рис. 5.3), составить выражения для напряжений σ_x и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, исходя из формул сопротивления материалов. Получить функцию для напряжения σ_y , применив для этого дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

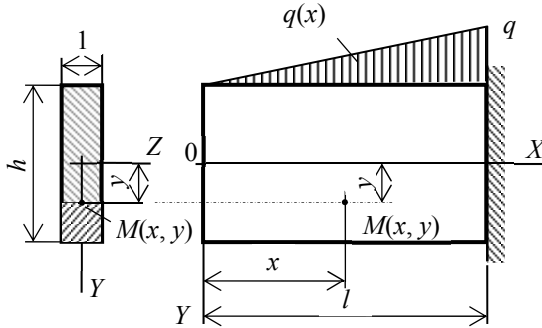


Рис. 5.3. Консольная балка, имеющая распределенную нагрузку

Составим функцию для нагрузки $q(x)$:

$$q(x) = \frac{q}{l}x.$$

Проверим пригодность этой функции для решения задачи:

$$\text{при } x=0 \Rightarrow q(0) = \frac{q}{l} \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } x=l \Rightarrow q(l) = \frac{q}{l} \cdot l = q.$$

Очевидно, что функция правильно описывает закон изменения нагрузки.

Составим функцию для поперечной силы $Q_y(x)$ в произвольном сечении балки:

$$Q_y(x) = \frac{1}{2}q(x) \cdot x = \frac{qx^2}{2l}.$$

Составим функцию для изгибающего момента $M_z(x)$:

$$M_z(x) = \frac{1}{2}q(x)x \frac{1}{3}x = \frac{1}{2} \frac{qx^3}{3l} = \frac{qx^3}{6l}.$$

Используя решение, полученное в сопротивлении материалов, составим функцию для нормального напряжения $\sigma_x(x, y)$. Предварительно запишем выражение для осевого момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси Z :

$$I_z = \frac{1 \cdot h^3}{12} = \frac{h^3}{12},$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M_z(x)}{I_x} y = \frac{qx^3}{6 \cdot l} \frac{12y}{h^3} = \frac{2qx^3 y}{h^3 l}.$$

Выразим статический момент отсеченной части

$$\begin{aligned} S_z^0 &= \left(\frac{h}{2} - y\right) b \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} \right) = \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{y}{2} + \frac{h}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (h - 2y) \frac{1}{4} (2y + h) = \frac{1}{8} (2yh + h^2 - 4y^2 - 2yh) = \frac{1}{8} (h^2 - 4y^2). \end{aligned}$$

Используя формулу Журавского, составим функцию для касательных напряжений τ_{xy} и τ_{yx} :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^0}{I_z b} = \frac{qx^2}{2l} \frac{1}{8} (h^2 - 4y^2) \frac{12}{h^3} = \frac{3}{4} \frac{qx^2}{h^3 l} (h^2 - 4y^2).$$

Функцию нормального напряжения $\sigma_y(x, y)$ определим, используя дифференциальные уравнения равновесия (5.5), учитывая, что объемные силы и ускорения отсутствуют, а некоторые напряжения равны нулю $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения равновесия выразим частную производную нормального напряжения σ_y :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{3}{4} \frac{qx^2}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) \right] = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2).$$

Разделим дифференциалы и получим

$$\partial \sigma_y = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) \partial y.$$

Проинтегрируем по y , учитывая, что появится постоянная интегрирования (функция от x):

$$\sigma_y(x, y) = -\int \frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} (h^2 - 4y^2) dy + f(x) = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left(h^2 y - \frac{4}{3} y^3 \right) + f(x).$$

Функцию $f(x)$ определим по граничным условиям на верхней и на нижней поверхностях балки. На верхней поверхности балки $\sigma \left(x, -\frac{h}{2} \right) = \frac{-qx}{l}$. Воспользуемся этим и найдем функцию $f(x, y)$.

Вначале вычислим интеграл, при $y = -h/2$:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[h^2 \left(-\frac{h}{2} \right) - \frac{4}{3} \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[-\frac{h^3}{2} + \frac{4h^3}{3 \cdot 8} \right] = \\ & = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[-\frac{h^3}{2} + \frac{h^3}{6} \right] = -\frac{3}{2} \frac{qx}{h^3 l} \left[\frac{-3h^3 + h^3}{6} \right] = -\frac{3qx}{2h^3 l} \left(-\frac{h^3}{3} \right) = -\frac{qx}{2l}. \end{aligned}$$

Тогда условие по верхнему краю балки запишется так

$$\sigma_y(x, -h/2) = -\frac{qx}{2l} + f(x) = -\frac{qx}{l}.$$

Отсюда имеем

$$f(x) = -\frac{qx}{2l}.$$

Значит, нормальное напряжение $\sigma(x, y)$ будет выражаться функцией

$$\sigma_y(x, y) = \frac{3qx}{2h^3l} \left(h^2y - \frac{4}{3}y^3 \right) - \frac{qx}{2l} = \frac{qxy}{2l} (3h^2 - 4y^2) - \frac{qx}{2l}.$$

6. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

6.1. Обобщенный закон Гука

Для линейно деформируемого тела связь между деформациями и напряжениями устанавливается по закону Гука, полученному в сопротивлении материалов в обратной форме.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Выразим из обратной формы закона Гука напряжения и получим *прямую форму записи закона Гука*:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx},\end{aligned}\quad (6.2)$$

где G – модуль сдвига;

ν – коэффициент Пуассона;

θ – относительная объемная деформация.

$$\begin{aligned}G &= \frac{E}{2(1+\nu)}; \\ \lambda &= \frac{2\nu G}{1-2\nu};\end{aligned}\quad (6.3)$$

$$\theta = 3\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

6.2. Законы изменения объема и изменения формы

Запишем закон Гука в обратной форме:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Сложим первые уравнения, расположенные в каждой строчке, и раскроем скобки:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \\ &+ \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z + \sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x + \\ &+ \sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu\sigma_x - 2\nu\sigma_y - 2\nu\sigma_z) = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Учитывая выражения для средней деформации, среднего напряжения и относительной объемной деформации, получим

$$\varepsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m; \quad \theta = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m.\quad (6.6)$$

Этот закон может быть записан в тензорной форме

$$T_\sigma^0 = E_0 T_\varepsilon^0, \quad \text{где} \quad E_0 = \frac{E}{1-2\nu}.\quad (6.7)$$

Выведем закон изменения формы, то есть зависимость между компонентами девиаторов напряжения и деформации:

$$D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}; \quad (6.8)$$

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}.$$

Установим зависимость между элементами девиаторов тензора напряжений (3.6) и тензора деформаций (4.7), расположенными на верхней строке левого столбца.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_m &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z) \right] - \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z) \right] - \\ &- \frac{1-2\nu}{3E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3E} \left[3\sigma_x - 3\nu\sigma_y - 3\nu\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + \right. \\ &+ 2\nu\sigma_x + 2\nu\sigma_y + 2\nu\sigma_z \left. \right] = \frac{1}{3E} \left[2(1+\nu)\sigma_x - (1+\nu)\sigma_y - (1+\nu)\sigma_z \right] = (6.9) \\ &= \frac{1+\nu}{3E} (3\sigma_x - 3\sigma_m) = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma_m) = \frac{2(1+\nu)}{2E} (\sigma_x - \sigma_m) = \\ &= \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_m). \end{aligned}$$

Чтобы перейти к прямой форме записи закона изменения формы, выразим элементы, содержащие напряжения:

$$\sigma_x - \sigma_m = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m). \quad (6.10)$$

Связь элементов девиаторов, содержащих углы сдвига и касательные напряжения, очевидна.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}. \quad (6.11)$$

Аналогично можно получить зависимости и для других элементов девиаторов напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m); & \tau_{xy} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m); & \tau_{yz} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m); & \tau_{zx} &= 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Полученную зависимость можно записать и в тензорной форме:

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon. \quad (6.13)$$

6.3. Удельная потенциальная энергия

Энергия, накапливаемая при деформации в единичном объеме материала, называется *удельной потенциальной энергией*, или *упругим потенциалом*, в окрестности рассматриваемой точки:

$$2W = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}. \quad (6.14)$$

Разложим полную потенциальную энергию на два слагаемых:

$$W = W_0 + W_F, \quad (6.15)$$

где W_0 – удельная энергия, расходуемая на изменение объема материала в рассматриваемой точке:

$$W_0 = 3\left(\frac{1}{2}\sigma_m\varepsilon_m\right) = \frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m; \quad (6.16)$$

W_F – удельная энергия, расходуемая на изменение формы.

Удельная энергия изменения формы – разность полной потенциальной энергии и энергии, затраченной на изменение объема.

6.4. Примеры к разделу 6

Пример 7. Определить полную удельную потенциальную энергию, удельную энергию изменения объема и удельную энергию изменения формы, если известен тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & -120 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Примем значения модуля упругости и коэффициента Пуассона, соответственно, равными $E = 200$ ГПа и $\nu = 0,3$.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа.}$$

Используя закон Гука, вычислим деформации (6.1) с учетом $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$; $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_z) = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [160 - 0,3(-120)] \cdot 10^6 = 0,98 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x) = \\ &= -\frac{0,3}{200 \cdot 10^9} [-120 + 160] \cdot 10^6 = -0,06 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x) = \frac{1}{200 \cdot 10^9} [-120 - 0,3 \cdot 160] \cdot 10^6 = -0,84 \cdot 10^{-3};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{0}{76,92 \cdot 10^9} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{0}{76,92 \cdot 10^9} = 0;$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{-100 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = -1,30 \cdot 10^{-3}.$$

Запишем тензор деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,98 & 0 & -0,65 \\ 0 & -0,06 & 0 \\ -0,65 & 0 & -0,84 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Вычислим удельную полную потенциальную энергию:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \\ &= \frac{1}{2} [160 \cdot 0,98 + 0 \cdot (-0,06) + (-120) \cdot (-0,84) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \\ &\quad + (-100) \cdot (-1,30)] 10^3 = 193,80 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}. \end{aligned}$$

Вычислим среднее напряжение и среднюю деформацию:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(160 + 0 - 120) = 13,33 \text{ МПа};$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}(0,98 - 0,06 - 0,84) \cdot 10^{-3} = 0,027 \cdot 10^{-3}.$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения объема:

$$W_V = 3 \left(\frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m \right) = 3 \left(\frac{1}{2} \cdot 13,33 \cdot 10^6 \cdot 0,027 \cdot 10^{-3} \right) = 0,533 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Вычислим удельную потенциальную энергию изменения формы:

$$W_F = W - W_V = 193,80 - 0,533 = 193,267 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3}.$$

Пример 8. Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор напряжений:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -140 & 80 & -60 \\ 80 & 120 & 70 \\ -60 & 70 & 90 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Учитывая закон Гука, вычислить деформации и записать тензор деформаций. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными $E = 200$ ГПа и $\nu = 0,3$.

Так как в тензоре напряжений нет нулевых строк и столбцов, то есть в элементе, вырезанном в окрестности исследуемой точки, нет площадок свободных от напряжений, то материал испытывает объемное напряженное состояние. Определим модуль сдвига по формуле (6.3):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа.}$$

По закону Гука (6.1) вычислим деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{200 \cdot 10^9} \left[-140 - 0,3(120 + 90) \right] 10^6 = \\ &= -1,015 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \\
&= \frac{1}{200 \cdot 10^9} [120 - 0,3(90 - 140)] 10^6 = 0,675 \cdot 10^{-3}; \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \\
&= \frac{1}{200 \cdot 10^9} [90 - 0,3(-140 + 120)] 10^6 = 0,480 \cdot 10^{-3}; \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{80 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 1,040 \cdot 10^{-3}; \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{70 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = 0,910 \cdot 10^{-3}; \\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{-60 \cdot 10^6}{76,92 \cdot 10^9} = -0,780 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Запишем тензор деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,015 & 0,520 & -0,390 \\ 0,520 & 0,675 & 0,455 \\ -0,390 & 0,455 & 0,480 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Пример 9. Пусть в окрестности внутренней точки деформируемого тела задан тензор деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,45 & 0,75 \\ 0,45 & -0,84 & 0,32 \\ 0,75 & 0,32 & 0,96 \end{bmatrix} 10^{-3}.$$

Учитывая, что материал тела деформируется по закону Гука, вычислить напряжения и записать тензор напряжений. Принять модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, равными $E = 200$ ГПа и $\nu = 0,3$.

Вычислим модуль сдвига, коэффициент Ляме и относительную объемную деформацию в окрестности рассматриваемой точки по формулам (6.3):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0,3)} = 76,92 \text{ ГПа};$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{2 \cdot 0,3 \cdot 76,92}{1-2 \cdot 0,3} = 115,38 \text{ ГПа};$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (0,65 - 0,84 + 0,96)10^{-3} = 0,77 \cdot 10^{-3}.$$

По закону Гука (6.2) вычислим напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,65 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = 188,84 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot (-0,84 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = -40,38 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta = 2 \cdot 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,96 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 115,38 \cdot 10^9 \cdot 0,77 \cdot 10^{-3} = 236,53 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 69,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,32 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 49,23 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 76,92 \cdot 10^9 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 115,38 \text{ МПа}.$$

Запишем тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 188,84 & 69,23 & 115,38 \\ 69,23 & -40,38 & 49,23 \\ 115,38 & 49,23 & 236,53 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

7. ГИПОТЕЗЫ НАСТУПЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО УПРУГОГО И ПРЕДЕЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЙ

В курсе сопротивления материалов рассмотрены некоторые теории прочности. Задача теорий прочности заключается в том, чтобы на основании стандартных экспериментальных данных о разрушении конкретного материала при простой деформации (осевое растяжение) определить условие, при котором возможно разрушение того же материала при заданной сложной деформации.

7.1. Теории прочности Кулона

Предельное упругое состояние в данной точке сплошной среды наступит тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигнет значения, равного значению наибольшего касательного напряжения при предельном состоянии для того же материала, испытывающего простое растяжение. При простом растяжении максимальное касательное напряжение равно

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y}{2}, \quad (7.1)$$

где σ_y – предел текучести.

При сложном напряженном состоянии (в конструкции) максимальное касательное напряжение можно выразить через главные напряжения (3.29):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (7.2)$$

Отсюда выражается условие наступления предельного состояния:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$

или

$$\sigma_{\text{ср}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y. \quad (7.3)$$

7.2. Теория прочности Губера – Мизеса – Генки

Упругое предельное состояние в данной точке тела наступит тогда, когда касательное октаэдрическое напряжение достигнет значения, соответствующего упругому предельному состоянию для того же материала при простом растяжении. При сложном напряженном состоянии октаэдрическое касательное напряжение может быть выражено через главные напряжения (3.42):

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (7.4)$$

при простом растяжении:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_y. \quad (7.5)$$

Приравнявая выражения для обоих октаэдрических напряжений, получим условие наступления предельного состояния:

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_y. \quad (7.6)$$

7.3. Примеры к разделу 7

Пример 10. Пусть задан тензор напряжений в исследуемой точке твердого деформированного тела. Предел текучести материала тела равен $\sigma_y = 240$ МПа.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 0 & -90 \\ 0 & 0 & 0 \\ -90 & 0 & 140 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

Требуется проверить, наступит ли предельное состояние по теориям прочности Кулона и Губера – Мизеса – Генки.

Так как тензор напряжений содержит один нулевой столбец и одну нулевую строку, то материал в окрестности исследуемой точки испытывает плоское напряженное состояние.

Вычислим главные напряжения по формуле, взятой из курса сопротивления материалов:

$$\begin{aligned}\sigma_{1/2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} = \\ &= \frac{110 + 140}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(110 - 140)^2 + 4 \cdot 90^2};\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 216,24 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 33,76 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 0.$$

По теории Кулона:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 216,24 - 0 = 216,24 \text{ МПа} < \sigma_y = 240 \text{ МПа}.$$

По теории Губера – Мизеса – Генки:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{eq}} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} [(216,24 - 33,76)^2 + (33,76 - 0)^2 + (0 - 216,24)^2]} = \\ &= 201,49 \text{ МПа} < \sigma_y = 240 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Очевидно, что по теории прочности Кулона и по теории прочности Губера – Мизеса – Генки предельное состояние в исследуемой точке не наступит.

8. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

8.1. Постановка задачи в теории упругости

При постановке задачи в теории упругости задаются граничные условия в виде информации о поверхностных силах – *статические граничные условия*:

$$p_{xv} = p_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad p_{yv} = p_2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad p_{zv} = p_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad (8.1)$$

либо в виде *кинематических граничных условий*:

$$u = u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad v = v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad w = w(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \quad (8.2)$$

Могут быть заданы и *объемные силы*:

$$X = X(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad Y = Y(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}); \quad Z = Z(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \quad (8.3)$$

В качестве неизвестных принимаются компоненты перемещения:

$$u(x, y, z); \quad v(x, y, z); \quad w(x, y, z); \quad (8.4)$$

или компоненты напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z); \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z); \end{aligned} \quad (8.5)$$

или компоненты деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z); \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z); \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z); \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z); \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z); \quad \gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Таким образом, имеется 15 неизвестных. Следовательно, для решения задачи должно быть 15 уравнений и условия на границе тела для определения постоянных интегрирования. Такие уравнения имеются. Это дифференциальные уравнения равновесия (5.5) – 3; уравнения Коши (5.10) – 6; уравнения неразрывности (5.20) – 6. Таким образом, задача теории упругости решается.

8.2. Решение задач теории упругости в перемещениях

Для получения уравнений равновесия с учетом объемных сил и сил инерции следует в физические уравнения (6.2) подставить геометрические уравнения (5.10), продифференцировать и подставить полученные выражения в уравнения Навье (5.5). В результате получим уравнения в перемещениях, которые называют *уравнениями Ламе*. Следует отметить, что решение задач теории упругости в перемещениях является наиболее исчерпывающими, так как, используя его, можно найти функции для напряжений, функции для деформаций и другие характеристики напряженного и деформированного состояний тела. Однако, получить такое аналитическое решение в общей постановке невозможно. Для этого используются численные методы.

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X \rho &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2}; \\(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y \rho &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2}; \\(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z \rho &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

8.3. Решение задач теории упругости в напряжениях

В качестве неизвестных принимаются напряжения. Используя физические уравнения (6.2), уравнения неразрывности (5.20) и уравнения равновесия (5.5), получим уравнения в напряжениях, которые называются *уравнениями Бельтрами*:

$$\begin{aligned}
(1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial x^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial x\partial y} &= 0; \\
(1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial y^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial y\partial z} &= 0; \\
(1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial z^2} &= 0; & (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma^I}{\partial z\partial x} &= 0,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

где σ^I – первая инварианта тензора напряжений (3.26):

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2},$$

$\nabla^2(\cdot)$ – оператор функции.

Для решения задачи к уравнениям Бельтрами необходимо присоединить условия на границе

$$\begin{aligned}
p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\
p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\
p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n,
\end{aligned} \tag{8.9}$$

9. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

9.1. Плоское напряженное состояние

Примером плоского напряженного состояния может служить состояние тонкой пластины, подвергнутой действию нагрузки в ее плоскости (рис. 9.1).

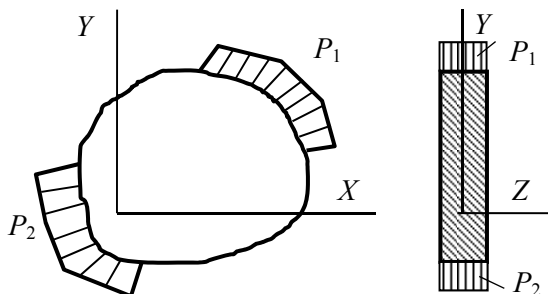


Рис. 9.1. Тонкая пластина, испытывающая плоское напряженное состояние

В этом случае некоторые составляющие напряжения равны нулю: $\sigma_z = 0$; $\tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = 0$. Предполагается, что другие составляющие напряжения равномерно распределены по толщине пластины.

В этом случае тензор напряжений и тензор деформации имеют следующий вид:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (9.1)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия сокращается до двух:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Условие на контуре пластины принимает следующий вид:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \quad (9.3)$$

Связь между перемещениями и деформациями выражается тремя уравнениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.4)$$

Закон Гука в обратной форме принимает вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad (9.5)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Уравнение неразрывности выражается одним уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (9.6)$$

9.2. Плоское деформированное состояние

Примером плоской деформации является состояние, испытываемое ленточным фундаментом, дамбой или плотиной (рис. 9.2). В этом случае

$$\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (9.7)$$

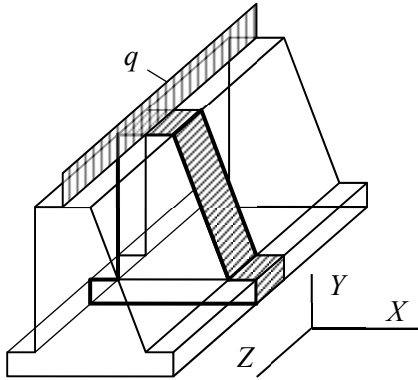


Рис. 9.2. Дамба, испытывающая плоское деформируемое состояние

В этом случае тензор напряжений и тензор деформации имеют следующий вид:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}; \quad T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия сокращается до двух:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + q = 0, \quad (9.9)$$

где q – равномерно распределенная вертикальная нагрузка.

Условие на контуре пластины принимает следующий вид:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \quad (9.10)$$

Связь между перемещениями и деформациями выражается тремя уравнениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.11)$$

Закон Гука в обратной форме принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y \right]; \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x \right]; \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \end{cases} \quad (9.12)$$

Уравнение неразрывности деформаций выражается одним уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (9.13)$$

которое можно записать в напряжениях следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (9.14)$$

Это уравнение называется *уравнением Леви*.

9.3. Использование функции напряжений (функции Эри) для решения плоских задач теории упругости

При решении плоской задачи в напряжениях требуется найти три неизвестные: σ_x , σ_y , τ_{xy} . Чтобы упростить решение вводится

функция напряжений φ . Эта функция должна определять напряжения путем ее дифференцирования:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + qx. \quad (9.15)$$

Таким образом, вместо трех неизвестных, имеем одно неизвестное φ . Легко проверить существование такой функции. Для этого подставим ее в дифференциальные уравнения равновесия, принимая объемные силы и силы инерции равными нулю (9.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + q - q = 0. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Очевидно, что уравнения равновесия удовлетворяются тождественно. Сумму напряжений выразим через функцию φ :

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (9.17)$$

Для определения вида самой функции φ подставим ее в уравнение неразрывности (уравнение Леви) (9.14):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0. \quad (9.18)$$

И окончательно получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (9.19)$$

В сокращенной форме полученное уравнение можно записать в виде оператора:

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad \text{где} \quad \nabla^4 (\cdot) = \nabla^2 [\nabla^2 (\cdot)]. \quad (9.20)$$

Таким образом, решение плоской задачи сводится к решению бигармонического уравнения, которое должно удовлетворять условиям на контуре.

9.4. Примеры к разделу 9

Пример 11. Рассмотрим пластину, нагруженную по торцам распределительными нагрузками парами сил с моментом M (рис. 9.3).

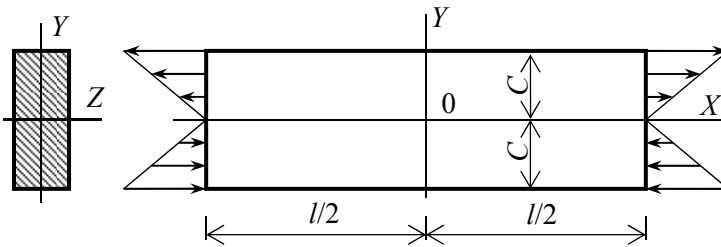


Рис. 9.3. Балка, нагруженная распределенными нагрузками по торцам

Из сопротивления материалов известно, что

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Так как напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} выражаются линейными функциями, то уравнение неразрывности (9.14) удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Чтобы убедиться в пригодности решения, предложенного сопротивлением материалов, достаточно только проверить выполнение дифференциальных уравнений равновесия и условие на контуре пластины. Возьмем производные

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M}{I} y \right) = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0.$$

Подставим производные в дифференциальные уравнения равновесия (9.2):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 + 0 = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

Уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Следовательно, предложенные функции пригодны для решения задачи теории упругости. Требуется уточнить граничные условия.

Подставим условие на торце пластины. Пусть $x = \pm \frac{l}{2}$. Напряжение на торцах пластины согласно предложенному решению имеет вид

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0.$$

То есть по торцам пластины действуют только нормальные напряжения, которые распределены по высоте сечения по линейному закону. Площадка на правом торце пластины имеем направляющие косинусы $l = +1$, $m = 0$, $n = 0$. Тогда проекции нагрузки на торцах пластины выражаются зависимостями:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \frac{M}{I} y \cdot 1 + 0 \cdot 0 = \frac{M}{I} y;$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Выразим продольную силу на правом торце пластины. При этом принимаем толщину пластины равной единице:

$$N = \int_A p_{xv} dA = \int_A \frac{M}{I} y dA = \int_{-C}^{+C} \frac{M}{I} y dy = \frac{M}{I} \int_{-C}^{+C} y dy = \left[\frac{M}{2I} y^2 \right]_{-C}^{+C} = 0.$$

Очевидно, что продольная сила на правом торце балки равна нулю. Выразим момент сил на правом торце пластины:

$$\int_A p_{xy} y dA = \int_A \left(\frac{M}{I} y \right) y dA = \frac{M}{I} \int_A y^2 dA = \frac{M}{I} I = M.$$

Аналогично получается и на левом торце пластины.

Следовательно, решение, полученное в сопротивлении материалов, пригодно в том случае, если по торцам пластины приложены распределенные нагрузки, показанные на рис. 9.3, и создающие момент M .

Пример 12. Пластина постоянной толщины произвольного очертания равномерно сжата по наружному контуру давлением p (рис. 9.4). Доказать, что во всех точках пластины касательное напряжение τ_{xy} равно нулю, а нормальные напряжения σ_x и σ_y – давлению сжатия.

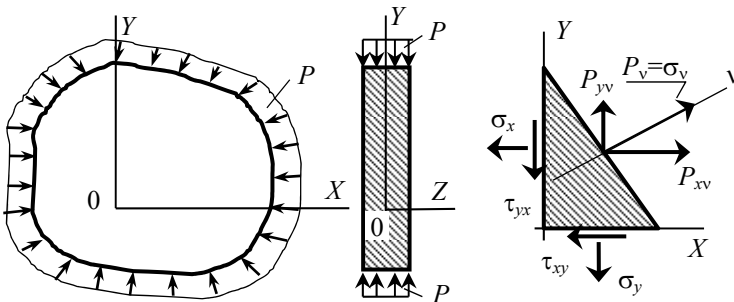


Рис. 9.4. Равномерно сжатая пластина произвольного очертания постоянной толщины

Вырежем элемент около произвольной точки контура пластины. Пусть направляющие косинусы l и m наклонной площадки известны. Полное напряжение на наклонной площадке равно давлению на контур пластины:

$$p_v = -p.$$

Найдем проекции полного напряжения:

$$p_{xv} = p_v l; \quad p_{yv} = p_v m.$$

Запишем граничные условия (9.3):

$$\begin{cases} p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = p_v l; \\ p_{yv} = \tau_{yx} l + \sigma_y m = p_v m. \end{cases} \quad (*)$$

Решим полученную систему уравнений (*), принимая в качестве неизвестных напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} и учитывая, что, согласно закону парности касательных напряжений, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Для удобства касательные напряжения обозначим буквой τ . В результате получим уравнение, содержащее касательное напряжение:

$$m^2 \tau - l^2 \tau = lm \cdot p_v - ml \cdot p_v$$

или

$$(m^2 - l^2) \tau = 0. \quad (**)$$

Это равенство должно выполняться при любых положениях наклонной площадки. При этом направляющие косинусы l и m могут принимать значения на отрезке $[-1, +1]$. Учитывая соотношение направляющих косинусов для плоской задачи $l^2 + m^2 = 1$, уравнение (***) можно записать следующим образом:

$$\left[m^2 - (1 - m^2) \right] \tau = \left[2m^2 - 1 \right] \tau = 0. \quad (***)$$

При различных положениях наклонной площадки множитель $[2m^2 - 1]$ может принимать значения на отрезке $[-1, +1]$. Поэтому, чтобы уравнение (***) всегда выполнялось, требуется $\tau = 0$. То есть $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau = 0$.

Из первого уравнения системы (*) получим значение нормального напряжения σ_x :

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \sigma_x l + 0m = p_v l;$$

$$\sigma_x = p_v = -p.$$

Из второго уравнения системы (*) получим значение нормального напряжения $\sigma_y = -p$.

Пример 13. Дана квадратная пластина и заданы функции для напряжений:

$$\sigma_x = -\frac{1}{2} C x^4 y;$$

$$\sigma_y = -C x^2 y^3;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = C x^3 y^2.$$

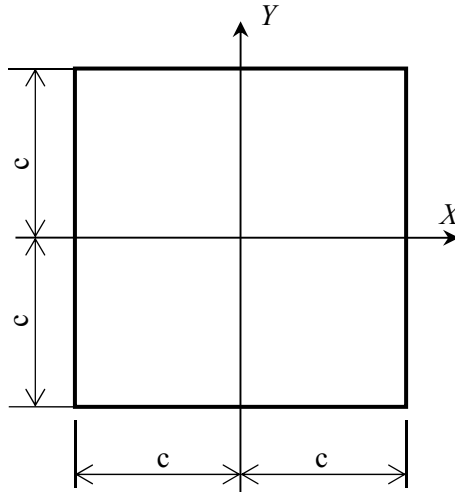


Рис. 9.5. Квадратная пластина

Требуется установить соответствующую нагрузку по контуру пластины. В начале, проверим пригодность заданных функций напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ для решения задачи теории упругости. Так как функции $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, их производные и взятые от них интегралы являются непрерывными, то уравнения Сен-Венана (уравнения неразрывности деформаций) будут удовлетворяться. Следует проверить, будут ли выполняться условия равновесия, то есть дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).

Возьмем производные:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot 4Cx^3y = -2Cx^3y; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -3Cx^2y^2;$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 2Cx^3y; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 3Cx^2y^2.$$

Подставим производные в уравнения Навье (5.5):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0;$$

получим

$$-2Cx^3y + 2Cx^3y = 0; \quad 3Cx^2y^2 - 3Cx^2y^2 = 0.$$

Очевидно, что заданные функции для напряжений удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия.

Определим нагрузки по краям пластины:

1) на верхнем краю пластины:

$$-C \leq x \leq C, \quad y = C, \quad l = 0, \quad m = 1;$$

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} Cx^4 y \cdot 0 + Cx^3 y^2 \cdot 1 = Cx^3 y^2 = C^3 x^3;$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = Cx^3 y^2 \cdot 0 - Cx^2 y^3 \cdot 1 = -Cx^2 y^3 = -C^4 x^2;$$

2) на нижнем краю пластины:

$$-C \leq x \leq C, \quad y = -C, \quad l = 0, \quad m = -1;$$

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} C x^4 y \cdot 0 - C x^3 y^2 \cdot 1 = -C x^3 y^2 = -C^3 x^3;$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = C x^3 y^2 \cdot 0 - C x^2 y^3 \cdot (-1) = C x^2 y^3 = C^4 x^2;$$

3) на левом краю пластины:

$$x = -C, \quad -C \leq y \leq C, \quad l = -1, \quad m = 0;$$

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = -\frac{1}{2} C x^4 y \cdot (-1) = \frac{1}{2} C x^4 y = \frac{1}{2} C^5 y;$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = C x^3 y^2 \cdot (-1) = -C x^3 y^2 = C^4 y^2;$$

4) на правом краю пластины:

$$x = C, \quad -C \leq y \leq C, \quad l = +1, \quad m = 0;$$

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m = \frac{1}{2} C x^4 y \cdot 1 = \frac{1}{2} C x^4 y = \frac{1}{2} C^5 y;$$

$$p_{yv} = \tau_{yx} m + \sigma_y l = C x^3 y^2 \cdot 1 = C x^3 y^2 = C^4 y^2.$$

Эпюры нормальной и касательной нагрузок приведены на рис. 9.6.

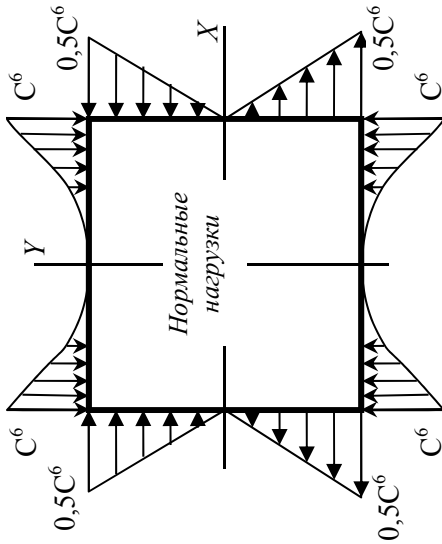
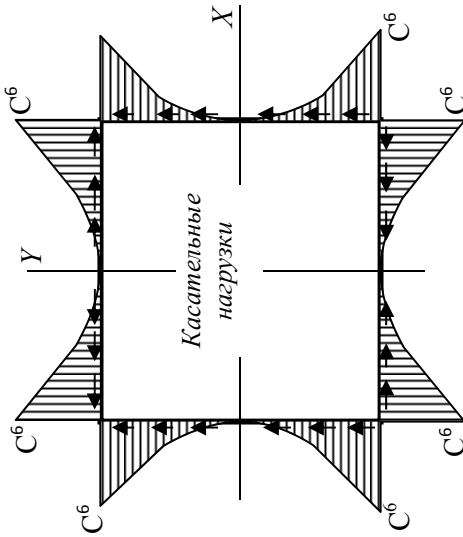


Рис. 9.6. Эпюры нормальных и касательных нагрузок

10. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

10.1. Обозначения перемещений, напряжений и деформаций

В некоторых случаях, например, при расчете плоских колец или дисков, удобно пользоваться полярными координатами.

Положение точки на срединной плоскости пластины определяется расстоянием r от начала координат O и углом θ между направлением r и некоторой осью Ox , занимающей определенное положение на срединной плоскости.

Для исследования в случае использования полярных координат выделяется малый элемент двумя радиальными и двумя цилиндрическими поверхностями. Нормальные напряжения в радиальном направлении обычно обозначаются σ_r , нормальные напряжения в тангенциальном направлении – σ_θ . Касательные напряжения обозначаются по тем правилам, что и в декартовых координатах – $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta r}$. Проекции объемной силы, отнесенные к единице объема, обозначаются следующим образом: R – действующая в радиальном направлении – и θ – действующая в тангенциальном направлении. Перемещение в радиальном и перемещение в тангенциальном направлениях обозначаются, соответственно, u и v (рис. 10.1).

Относительные удлинения в радиальном и в тангенциальном направлениях обозначаются, соответственно, ε_r и ε_θ , а деформации сдвига (углы сдвига) – $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta r}$. Учитывая принятые обозначения, тензор напряжений и тензор деформаций для плоской задачи в полярных координатах записываются в следующем виде:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{bmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\theta r} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix}. \quad (10.1)$$

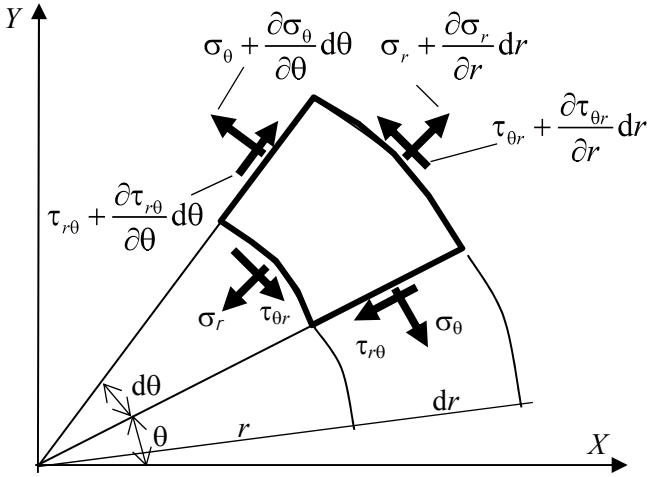


Рис. 10.1. Обозначения напряжений в полярных координатах

10.2. Основные уравнения теории упругости в полярных координатах

Приведем без вывода основные уравнения теории упругости в полярных координатах для общего случая деформации тела, когда присутствуют и касательные напряжения $\tau_{r\theta}$.

Применительно к обозначениям (см. рис. 10.1), если спроектировать все силы на направление радиуса и на перпендикулярное к нему направление, то после отбрасывания бесконечно малых высших порядков получим аналогично дифференциальным уравнениям равновесия в декартовых координатах следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \tag{10.2}$$

где R – объемная сила, отнесенная к единице объема, действующая только в радиальном направлении.

Если составляющие перемещения точки в радиальном и тангенциальном направлениях обозначить u и v , то соответствующие им направления деформации можно представить в следующем виде:

1) относительное удлинение в радиальном направлении:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (10.3)$$

2) относительное удлинение в тангенциальном направлении:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta}; \quad (10.4)$$

3) деформация сдвига:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (10.5)$$

Функцию напряжений можно применять и при полярной системе координат. Так как между декартовыми и полярными координатами имеются зависимости:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{и} \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad (10.6)$$

то, учитывая и подставляя их в вытекающие из них соотношения, после ряда преобразований получим следующие уравнения неразрывности деформаций в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (10.7)$$

Зависимости напряжений от функции напряжений имеют следующий вид (при отсутствии объемных сил):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (10.8)$$

10.3. Понятия и основные уравнения для осесимметричных задач в цилиндрических координатах

Ограничимся рассмотрением тел вращения, к которым приложены силы, распределенные симметрично относительно оси этого тела. В качестве примеров можно привести круглый цилиндр, усеченный конус и другие тела с осевой симметрией. При этом такие тела должны подвергаться, например, внутреннему, или внешнему давлению, или другим нагрузкам, распределенным симметрично.

Ось симметрии тела обозначим Z . Ось, перпендикулярную к оси Z , обозначим R . Для рассматриваемого случая двух координат достаточно, так как все точки тела с одинаковыми координатами r и z находятся в одинаковых условиях, то есть в их окрестностях будут одинаковыми все напряжения и деформации (рис. 10.2).

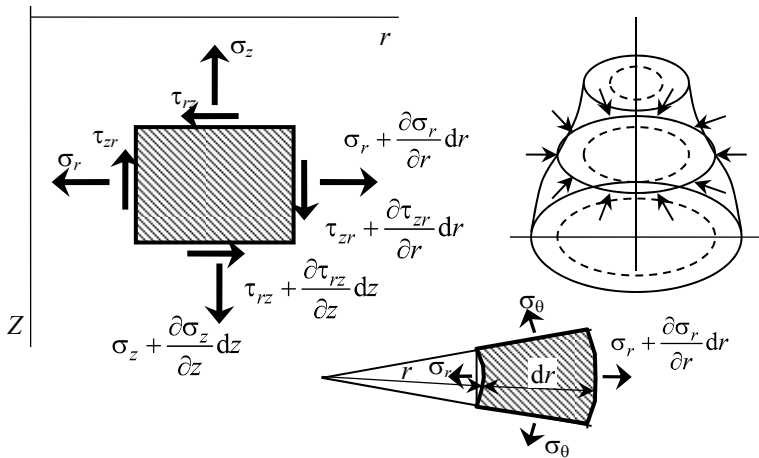


Рис. 10.2. Напряжения на площадках элементарного объема

Так как каждая меридиональная плоскость zOr представляет собой плоскость симметрии как относительно формы, так и относительно нагрузки тела, то в меридиональных плоскостях касательных напряжений быть не может. Поэтому площадки в окрестности каждой точки тела, расположенной на меридиональной плоскости, являются главными площадками. Главное напряжение, действующее по этой площадке, обозначим σ_θ .

Кроме меридионального сечения, через точку с координатами z, r проведем еще одно сечение, перпендикулярное к оси Z . Для исследования проводят и третье сечение, которое перпендикулярно к первым двум. Следы второго и третьего сечений на меридиональном сечении, соответственно, параллельны осям R и Z .

Вследствие симметрии в обеих секущих плоскостях в точках z, r могут действовать лишь такие касательные напряжения, которые параллельны меридиональной плоскости. Нормальные напряжения, действующие в секущих плоскостях, обозначаются σ_z и σ_r , касательные – τ_{rz} . Эти напряжения являются функциями координат z и r . Проектируем все силы, приложенные к площадкам элементарного объема, на оси Z, R и получим дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r d\theta dz dr - \tau_{zr} r d\theta dz + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz = 0; \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} -\sigma_r r d\theta dz + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz + \\ + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \cdot r \cdot d\theta dr - \sigma_\theta dr dz d\theta = 0. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Делим уравнения на произведение $dr dz d\theta$ и получаем

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \tau_{zr} + r \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} = 0; \quad (10.11)$$

$$\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta = 0.$$

В более компактной форме статические уравнения можно представить так

$$\frac{r \partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{zr}) = 0; \quad (10.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \sigma_\theta + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0.$$

Если обозначить w упругие перемещения точки (z, r) в направлении оси z , а u в направлении радиуса (в тангенциальном направлении перемещения отсутствуют), геометрические уравнения в цилиндрических координатах принимают вид

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (10.13)$$

Физические уравнения (закон Гука) в цилиндрических координатах записываются следующим образом:

$$\sigma_z = 2G \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\theta; \quad \sigma_\theta = 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\theta; \quad \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (10.14)$$

11. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

11.1. Основные понятия

Тонкой пластиной принято называть упругое тело призматической или цилиндрической формы с малой, по сравнению с ее генеральными размерами, толщиной. Под генеральными размерами следует понимать длину и ширину пластины. Отношение толщины пластины к ее любому другому размеру должно быть не более $1/10$, а ожидаемые прогибы не превышать $1/5$ ее толщины (рис. 11.1).

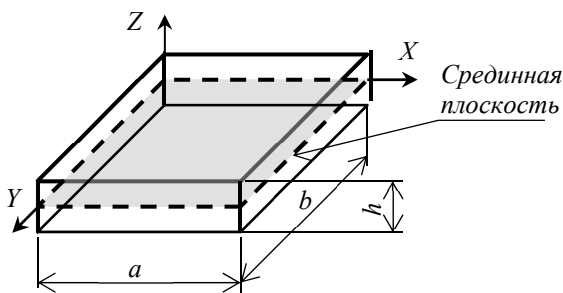


Рис. 11.1. Прямоугольная пластина и ее срединная плоскость

Плоскость, параллельная поверхности пластины и разделяющая ее толщину пополам, называется *срединной плоскостью*. В теории тонких пластин приняты следующие две гипотезы:

1. *Гипотеза прямолинейного элемента*. Совокупность точек, лежащих до деформации пластины на какой-либо прямой, нормальной к срединной поверхности, остается на прямой, нормальной к упругой поверхности деформируемой пластины.

2. *Статическая гипотеза*. Давление слоев пластины, параллельных ее срединной поверхности, не учитывается.

Отметим, что эти гипотезы аналогичны принимаемым в курсе сопротивления материалов для балок – гипотеза плоских сечений и гипотеза об отсутствии давлений между слоями балки. Координатные оси в плоскости срединной поверхности обозначаются буквами X и Y , а перемещения по их направлениям U и V . Ось, перпендикулярная к срединной поверхности пластины, обозначается буквой Z , а перемещение по ее направлению (прогиб) – буквой W .

11.2. Уравнение упругой поверхности прямоугольной пластины

При расчете пластины разрешающей функцией является описывающая прогиб пластины $W(x, y)$. Эта функция должна удовлетворять уравнению Софи Жермен и граничным условиям по краям пластины.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (11.1)$$

где $p(x, y)$ – интенсивность распределенной нагрузки на плиту;

D – цилиндрическая жесткость плиты, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$.

11.3. Связь между прогибами пластины и внутренними силами

В сечениях пластины появляются пять внутренних сил – два изгибающих момента в двух плоскостях M_x и M_y , крутящий момент M_{xy} и две поперечные силы Q_{xz} и Q_{yz} . Так как пластина нагружается поперечными нагрузками, то перемещениями точек u и v ее срединной поверхности по направлениям осей X и Y пренебрегаем. Учитываются перемещения точек срединной поверхности пластины только перпендикулярные к ней w . Функция, описывающая эти перемещения, является разрешающей. Между прогибами пластины (разрешающей функцией $W(x, y)$) и внутренними силами в ней существует связь, выражающаяся следующими уравнениями (11.2).

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right);$$
$$M_{xy} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \quad (11.2)$$

$$Q_{xz} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right); \quad Q_{yz} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).$$

Если эта функция $W(x, y)$ определена, то это значит, что определено все – кривизна пластины, внутренние силы и напряжения в ней.

11.4. Граничные условия для прямоугольных пластин

Различают три вида закрепления пластины: защемление, шарнирное закрепление и случай, когда край пластины свободен. Рассмотрим граничные условия для всех трех случаев закрепления левого края пластины.

Если край пластины защемлен, то прогиб и угол поворота сечения на левом краю равны нулю:

$$(W)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=0} = 0. \quad (11.3)$$

При шарнирном опирании края пластины ставится условие:

$$(W)_{x=0} = 0; \quad (M_x)_{x=0} = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (11.4)$$

Для свободного края пластины условие на левом краю имеет вид

$$\begin{aligned} (M_x)_{x=0} &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = 0; \\ (R_x)_{x=0} &= \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

11.5. Напряжения в сечениях пластины

Изгибающие моменты M_x и M_y вызывают в поперечных сечениях пластины нормальные напряжения σ_x и σ_y , а крутящий момент M_{xy} – касательные напряжения τ_{xy} . Их значения определяются выражениями (11.6):

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z, \quad (11.6)$$

где M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты, приходящиеся на единицу ширины сечения;

z – расстояние от срединной поверхности пластины до точки, в которой вычисляются напряжения;

I – момент инерции сечения пластины с шириной равной единице, $I = h^3 / 12$.

Отметим, что в теории тонких пластин (плит) понятие об изгибающих моментах отличается от такого понимания в других разделах механики твердого деформируемого тела: теоретической механики, сопротивлении материалов, теории упругости и др. Здесь изгибающий момент M_x следует понимать, как момент, который искривляет волокно пластины, расположенное вдоль оси X , а M_y – момент, искривляющий волокно, расположенное вдоль оси Y .

Характер распределения нормальных и касательных напряжений, вызванных изгибающими и крутящим моментами, показан на рис. 11.2.

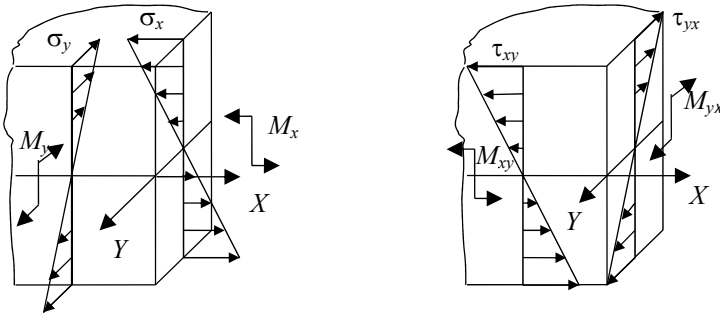


Рис. 11.2. Нормальные и касательные напряжения в поперечных сечениях пластины от изгибающих и крутящего моментов

Поперечные силы Q_{zx} и Q_{zy} вызывают касательные напряжения, действующие в сечениях с нормальми, соответственно, X и Y (рис. 11.3).

$$\tau_{zx} = \frac{Q_{zx} S_y^0}{I} = \frac{3Q_{zx}}{2h}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_{zy} S_x^0}{I} = \frac{3Q_{zy}}{2h}, \quad (11.7)$$

где S_x^0 и S_y^0 – статические моменты относительно осей X и Y части площади сечения пластины с шириной равной единице, расположенной по одну сторону от точки, в которой вычисляется касательное напряжение;

Q_{zx} и Q_{zy} – поперечные силы, приходящиеся на ширину сечения, равную единице.

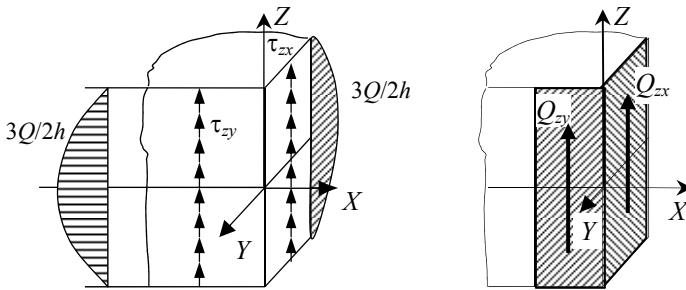


Рис. 11.3. Касательные напряжения в поперечных сечениях пластины от поперечных сил

Кроме указанных выше напряжений в пластине появляются нормальные напряжения σ_z от местной нагрузки, приложенной к ее верхней поверхности (рис. 11.4). Учитывая, что напряжение изменяется по закону кубической параболы, его значение можно вычислить по формуле (11.8):

$$\sigma_z = -p \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^2 \left(3 - \frac{2z+h}{h} \right), \quad (11.8)$$

где p – интенсивность местной нагрузки, приложенной к верхней поверхности пластины;

h – толщина пластины;

z – удаленность точки, в которой вычисляется напряжение, от срединной поверхности пластины.

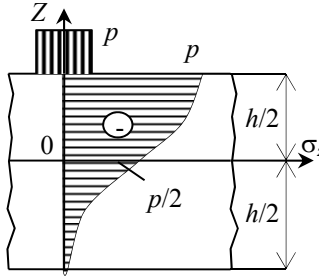


Рис. 11.4. Нормальные вертикальные напряжения от местной нагрузки

Таким образом, могут быть установлены все напряжения в окрестности любой точки пластины.

11.6. Классические модели упругого основания

Модель Фусса – Винклера (модель Винклера). Фусс Н. И., русский академик, в 1798 г. исследовал движения колес конной повозки с образованием колеи, то есть рассматривал локальное развитие деформаций под нагруженной площадкой. Согласно его наблюдениям, деформации оказались полностью необратимыми. По такой схеме действительно ведут себя рыхлые и слабо уплотненные грунты. Э. Винклер предложил модель грунта в виде ничем не связанных между собой упругих пружин, опирающихся на абсолютно жесткую опору (рис. 11.5, а). При локальной нагрузке будут сжиматься только те пружины, которые расположены непосредственно под площадкой оказания силы.

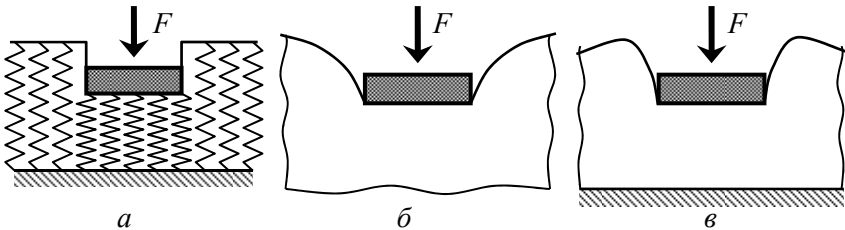


Рис. 11.5. Классические модели грунтовых оснований:
 а – Фусса – Винклера; б – упругое полупространство;
 в – упругий слой конечной толщины

Такая модель не обладает распределительной способностью, и в этом ее главный недостаток. Для расчета конструкций на основании Винклера используются методы строительной механики. Для характеристики такой модели достаточно установить только один параметр – *коэффициент постели*. Это упрощает инженерно-геологические изыскания на строительной площадке. В этом состоит достоинство модели Винклера. Модель используется в инженерных расчетах при больших площадях опирания конструкций на основание, например, плит на упругом основании.

Модель упругого полупространства. Основание представляется как упругое полупространство неограниченное снизу и по сторонам (рис. 11.5, б). Модель характеризуется двумя параметрами: модулем упругости E (в механике грунтов его называют модулем деформации) и коэффициентом поперечной деформации ν . Главным недостатком этой модели является очень большая распределительная способность – осадки поверхности от действия местной нагрузки распределяются неограниченно далеко. Кроме того, в отличие от модели Винклера, приходится определять два параметра, что усложняет инженерно-геологические изыскания. Очень важным недостатком является необходимость при расчетах использовать не более простые методы строительной механики, а более сложные методы теории упругости. Достоинством этого метода является возможность учета взаимного влияния на осадки рядом стоящих зданий.

Модель слоя конечной толщины. В этой модели была сделана попытка избавиться от тех недостатков, которые имели место для двух вышеуказанных моделей: чрезмерная распределительная способность или ее отсутствие. Слой конечной толщины (рис. 11.5, в) характеризуется тремя параметрами: модулем упругости, коэффициентом поперечной деформации и толщиной слоя. Эти параметры требуется установить при инженерно-геологических изысканиях, что существенно их усложняет и удорожает. Кроме того, для расчета требуется использовать методы теории упругости. Это является недостатком этой модели.

11.7. Уравнение упругой поверхности пластины на упругом основании Винклера

При расчете пластины разрешающая функция является описывающей прогиб пластины $W(x, y)$. Эта функция должна удовлетво-

рять уравнению Софи Жермен и граничным условиям по краям пластины. Так как площадь опирания плиты на грунтовое основание большая, обычно используется модель Фусса – Винклера. В этом случае для прямоугольной плиты на упругом основании уравнение Софи Жермен имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y) - r(x, y)}{D}, \quad (11.9)$$

где $p(x, y)$ – интенсивность распределенной нагрузки на плиту;

$r(x, y)$ – интенсивность реактивного давления со стороны грунтового основания;

D – цилиндрическая жесткость плиты, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$.

11.8. Использование метода конечных элементов для расчета прямоугольных пластин

Для многих задач теории упругости аналитических решений найти не удастся. К таким задачам относится расчет плиты на упругом основании. Поэтому в последнее время широко используются численные методы, среди которых самым распространенным является *метод конечных элементов (МКЭ)*.

В методе конечных элементов обычно используют в качестве неизвестных перемещения, так как это упрощает алгоритмизацию, что очень важно при составлении прикладных программ. Метод конечных элементов реализуется в вариационной постановке. Для каждого конечного элемента должно выполняться условие (11.10):

$$I(V) = \Pi - W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^T \bar{\sigma} d\Omega - \int \bar{f}^T \bar{V} d\Omega = 0, \quad (11.10)$$

где Π – потенциальная энергия деформаций;

W – работа внешних сил;

$\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ – вектор напряжений и вектор деформаций;

\bar{f} – вектор узловых сил;

\vec{V} – вектор узловых перемещений;

Ω, S – объем и поверхность конечного элемента.

То есть МКЭ основан на принципе поиска минимума функционала (11.10). Основная концепция МКЭ заключается в дискретизации пластины, которая расчленяется сеткой на конечные элементы (рис. 11.6). На полученной дискретной модели вводятся кусочно-линейные функции в виде полиномов высокой степени $\{\varphi(\vec{X})\}$, определенные на каждом конечном элементе. Такие функции $\varphi(\vec{X})$ называются *координатными*, или *аппроксимирующими*. Искомая функция по области Ω , то есть в пределах одного конечного элемента, может быть записана для прямоугольного элемента в следующем виде (в виде полинома высокой степени):

$$U(\vec{X}) = \sum_{k=1}^L \vec{V}_k \varphi_k(\vec{X}), \quad (11.11)$$

где L – общее количество степеней свободы, равное утроенному количеству узлов (для прямоугольного конечного элемента количество узлов равно четырем, а количество степеней свободы каждого узла равно трем);

\vec{V} – вектор узловых перемещений, который формируется из перемещений узлов конечного элемента.

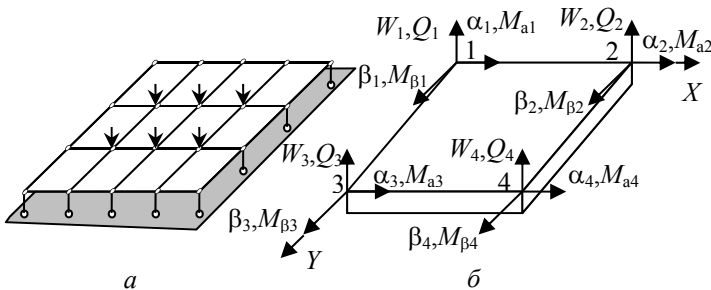


Рис. 11.6. Конечно-элементная модель прямоугольной пластины на упругом основании (а); узловые перемещения и узловые силы несомкнутого конечного элемента прямоугольной формы (б)

Таким образом, задача определения непрерывной функции $u_k(\vec{X})$ сводится к нахождению значений конечного числа перемещений узлов модели, которые определяются из условия минимума функционала (11.10), то есть из системы линейных алгебраических уравнений:

$$K\vec{V} = \vec{F}, \quad (11.12)$$

где \vec{V}, \vec{F}, K – вектор узловых перемещений, вектор узловых сил и матрица жесткости конечно-элементной модели.

Для расчета прямоугольной плиты на упругом основании обычно используются прямоугольные несовместные конечные элементы, имеющий четыре узла и двенадцать степеней свободы (рис. 11.6, б). Основание Фусса – Винклера моделируется упругими вертикальными стержнями, которые одним концом шарнирно прикрепляются к узлам модели плиты, а другим – к неподвижной опоре (рис. 11.6, а). Жесткость этих стержней учитывается при формировании объединенной матрицы жесткости конечно-элементной системы.

Матрица жесткости K получается путем объединения матриц жесткости всех конечных элементов, составляющих численную модель. Для автоматизации объединения матриц жесткостей и векторов узловых сил в МКЭ используются три системы нумераций: нумерация конечных элементов, глобальная и местная нумерация узлов. Пример нумерации показан на рис. 11.7.

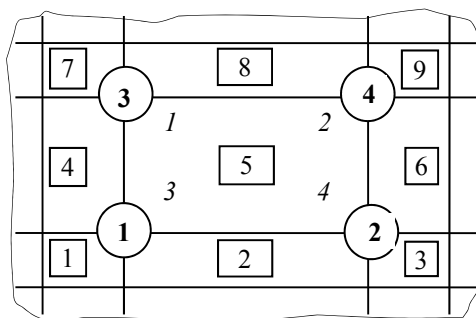


Рис. 11.7. Пример нумерации конечных элементов и узлов численной модели:

- 1, 2, 3, 4 – местные номера узлов пятого конечного элемента;
- 1, 2, 3, 4 – глобальные номера узлов, проставленные в кружках;
- 1, 2, ..., 9 – номера конечных элементов, проставленные в квадратах

Матрица жесткости прямоугольного конечного элемента является квадратной и содержит 12 строк и 12 столбцов. При ее формировании для каждого конечного элемента предварительно строят геометрическую матрицу и матрицу физических коэффициентов, а затем их перемножают:

$$K_i = B_i^T D_i B_i, \quad (11.13)$$

где B – матрица геометрических параметров;

D – матрица физических коэффициентов.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

где h – толщина пластины;

E – модуль упругости материала пластины;

ν – коэффициент Пуассона;

W – геометрическая функция, принятая для пластины в виде полинома.

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^4 (\varphi_{jw} W_j + \varphi_{j\alpha} \alpha_j + \varphi_{j\beta} \beta_j), \quad (11.14)$$

где φ_{jw} , $\varphi_{j\alpha}$, $\varphi_{j\beta}$ – функции, подбираемые в каждом отдельном случае по предполагаемой форме изгиба конечного элемента.

Матрица жесткости K в МКЭ является сильно разреженной, так как в каждой ее строке число ненулевых элементов очень мало и составляет менее одного процента от всех элементов строки. Поэтому в прикладных программах, реализующих метод конечных элементов, применяется специальная технология операций над такими сильно

разреженными матрицами: хранение, сложение, умножение на вектор, вычеркивание строк и столбцов, факторизация (приведение к треугольному виду). Применение такой технологии позволяет уменьшить требуемые затраты памяти и сократить время решения задачи. Решение системы уравнений (11.13) дает вектор узловых перемещений \vec{V} . Используя принятую систему нумерации (рис. 11.7), из вектора \vec{V} выделяют вектора узловых перемещений для каждого конечного элемента, содержащегося в численной модели $\vec{V}_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Вектор напряжений в каждом конечном элементе вычисляется по формуле (11.15):

$$\bar{\sigma}_i = DB_i \vec{V}_i. \quad (11.15)$$

11.9. Расчет круглых пластин

Расчет круглых пластин удобнее выполнять в полярной системы координат. Для этого преобразуем общие соотношения теории изгиба пластины из декартовых координат x, y в полярные координаты ρ, θ . Полярные и декартовы координаты связаны следующими зависимостями в прямом виде: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ и в обратном виде $x^2 + y^2 = r^2, \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta$.

Производные от функции прогибов, учитывая, что это сложная функция, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Учитывая связь декартовых и полярных координат в обратном и в прямом виде, получим производные

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta. \quad (11.17)$$

Так же могут быть найдены частные производные:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (11.18)$$

Выразим производные в выражениях (11.16):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Найдем вторые производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{r} + \\ &+ \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r^2}; \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{r} - \\ &- \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}; \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \sin(2\theta) - \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\sin(2\theta)}{r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos(2\theta)}{r} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Тогда оператор Лапласа в полярных координатах запишется следующим образом:

$$\nabla^2 \nabla^2 (W) = p, \quad (11.23)$$

или в развернутом виде

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) = p(r, \theta). \quad (11.24)$$

Изгибающие и крутящий моменты обозначаются в полярных координатах следующим образом: $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$ – а перерезывающие силы – Q_r и Q_θ . Выражения для изгибающих моментов, крутящих моментов и поперечных сил получаем, заменяя записи в декартовых координатах (11.2) на записи в полярных координатах.

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right]; \quad (11.25)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right); \quad (11.26)$$

$$M_{r\theta} = D(1 - \nu^2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right); \quad (11.27)$$

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 W; \quad (11.28)$$

$$Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 W. \quad (11.29)$$

Теперь осталось лишь сформулировать граничные условия при разных способах закрепления краев пластины:

– в случае защемления края пластины:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial r} = 0; \quad (11.30)$$

– в случае свободного опирания пластины:

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = 0; \quad (11.31)$$

– в случае свободного края пластины:

$$M_r = 0; \quad Q_r^* = \partial Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (11.32)$$

Напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ вычисляются так же, как и для прямоугольной пластины:

$$\sigma_r = \frac{M_r}{I} z; \quad \sigma_\theta = \frac{M_\theta}{I} z; \quad \tau_{r\theta} = D(1-\nu) \frac{M_{r\theta}}{I} z. \quad (11.33)$$

Полученные выражения дают возможность выполнить расчет круглых пластин при любом условии закрепления ее края.

11.10. Примеры к разделу 11

Пример 14. Пусть на прямоугольную пластину $5,5 \times 3,5$ м, опирающуюся на упругое основание с коэффициентом жесткости $k_0 = 15$ кН/м, действует сила $F = 100$ кН, приложенная на краю плиты (рис. 11.8).

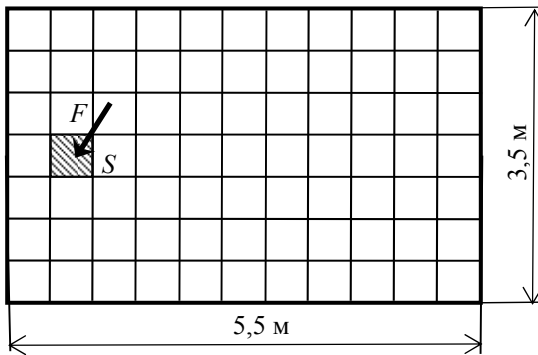


Рис. 11.8. Схема конечно-элементной модели плиты

Принимаем коэффициент Пуассона $\nu = 0,18$, опасное напряжение $\sigma_{\text{дан}} = \sigma_y = 22$ МПа, площадку приложения нагрузки F квадратной со стороной $a = 0,50$ м. Модуль упругости и толщина плиты соответственно равны $E = 29$ ГПа и $t = 16$ см.

Требуется исследовать напряженное состояние в окрестности точки S , расположенной в месте приложения силы, и найти допускаемую нагрузку F_{adm} . Коэффициент запаса принимаем равным $n_0 = 1,5$.

Для расчета плиты на упругом основании может быть использована компьютерная программа (например, *Lira* или *Scad*). В данном примере используется разработанная на кафедре сопротивления материалов и теории упругости БНТУ компьютерная программа *Cross*. В результате расчета плиты на упругом основании по программе *Cross* получены изгибающие и крутящий моменты в окрестности расчетной точки S .

$$M_x = -10,80 \text{ кНм/м}; \quad M_y = -16,63 \text{ кНм/м}; \quad M_{xy} = 4,65 \text{ кНм/м}.$$

Определим давление местной нагрузки на поверхность пластины, принимая площадку приложения нагрузки квадратной со стороной равной $0,5$ м.

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{100 \cdot 10^3}{0,5^2} = 0,40 \text{ МПа}.$$

Определим поперечные силы от местной нагрузки F :

$$Q_{zx} = Q_{zy} = \frac{F}{4a} = \frac{100 \cdot 10^3}{4 \cdot 0,50} = 50 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Найдем момент инерции сечения шириной в один метр:

$$I = \frac{bt^3}{12} = \frac{100 \cdot 16^3}{12} = 34 \, 133 \text{ см}^4.$$

Вычислим максимальные нормальные напряжения от изгибающих моментов, которые появляются в точке S . Расчет выполняем для верхней точки сечения.

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_x}{I} z_{\max} = \frac{M_x}{I} \frac{t}{2} = \frac{-10,80 \cdot 10^3}{34\,133 \cdot 10^{-8}} \frac{0,16}{2} = -2,53 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{y,\max} = \frac{M_y}{I} z_{\max} = \frac{M_y}{I} \frac{t}{2} = \frac{-16,63 \cdot 10^3}{34\,133 \cdot 10^{-8}} \frac{0,16}{2} = -3,90 \text{ МПа}.$$

Вычислим касательные напряжения от крутящего момента в точке S:

$$\tau_{xy,\max} = \frac{M_{xy}}{I} z_{\max} = \frac{M_{xy}}{I} \frac{t}{2} = \frac{4,65 \cdot 10^3}{34\,133 \cdot 10^{-8}} \frac{0,16}{2} = 1,09 \text{ МПа}.$$

Определим максимальное нормальное напряжение от местной нагрузки:

$$\sigma_z = -p = -0,40 \text{ МПа}.$$

Вычислим максимальное касательное напряжение, вызванное поперечными силами Q_{zx} и Q_{zy} , согласно рис. 11.9:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \frac{Q_{zx} S_x}{I} = \frac{3Q_{zx}}{2t} = \frac{3 \cdot 50 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,16} = 0,47 \text{ МПа}.$$

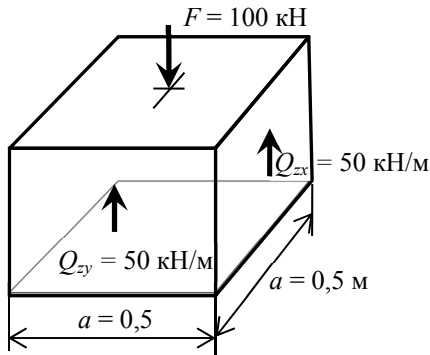


Рис. 11.9. Работа фрагмента плиты на продавливание

Построим эпюры нормальных и касательных напряжений, вызванные внутренними силами, в рассматриваемой расчетной точке S (рис. 11.10).

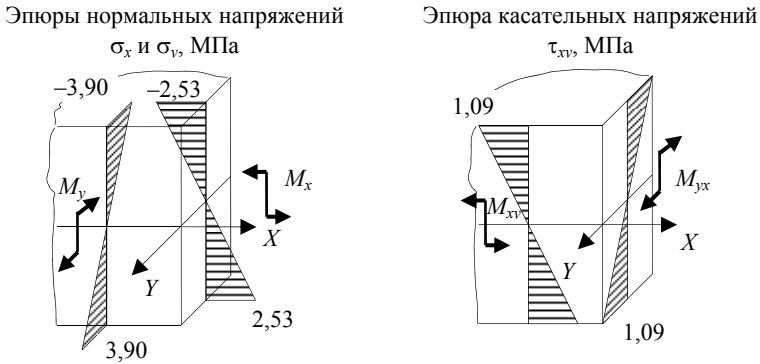


Рис. 11.10. Нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении пластины от изгибающих и крутящего моментов

Построим эпюры касательных напряжений, вызванные поперечными силами от продавливания (рис. 11.11).

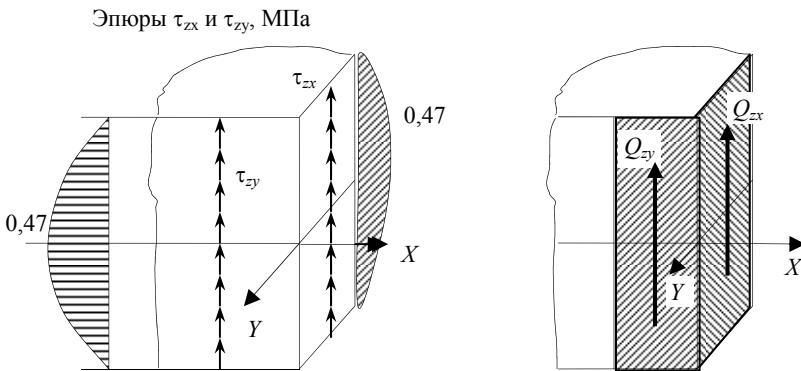


Рис. 11.11. Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} в поперечных сечениях пластины в окрестности точки S

Эпюра нормальных напряжений от местной нагрузки показана на рис. 11.12.

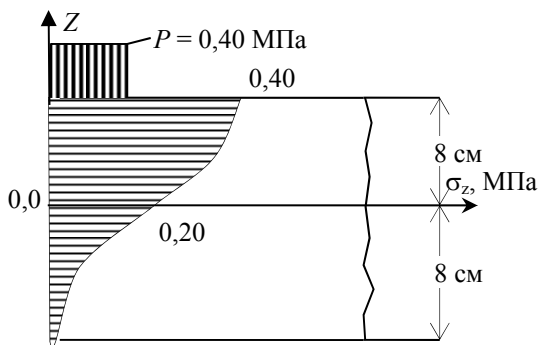


Рис. 11.12. Эпюра вертикальных нормальных напряжений от местной нагрузки, МПа

В окрестности выбранной точки S , на верхней поверхности пластины, вырежем элементарный объем в форме кубика (рис. 11.12), покажем все напряжения, действующие на его площадках, и запишем тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,53 & 1,09 & 0 \\ 1,09 & -3,90 & 0 \\ 0 & 0 & -0,40 \end{bmatrix}, \text{ МПа.}$$

На всех площадках элемента (рис. 11.13) действуют напряжения. Поэтому материал в окрестности исследуемой точки испытывает объемное напряженное состояние.

Вычислим инварианты тензора напряжений

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -2,53 - 3,90 - 0,40 = -6,83 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} \sigma^{II} &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= -2,53 \cdot (-3,90) - 3,90 \cdot (-0,40) - 0,40 \cdot (-2,53) - 1,09^2 - 0^2 - 0^2 = \\ &= 11,25 (\text{МПа})^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{III}} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= -2,53 \cdot (-3,90) \cdot (-0,40) + 2 \cdot 1,09 \cdot 0 \cdot 0 + 2,53 \cdot 0^2 + 3,90 \cdot 0^2 + \\ &\quad + 0,40 \cdot 1,09^2 = -3,47 \text{ (МПа)}^3.\end{aligned}$$

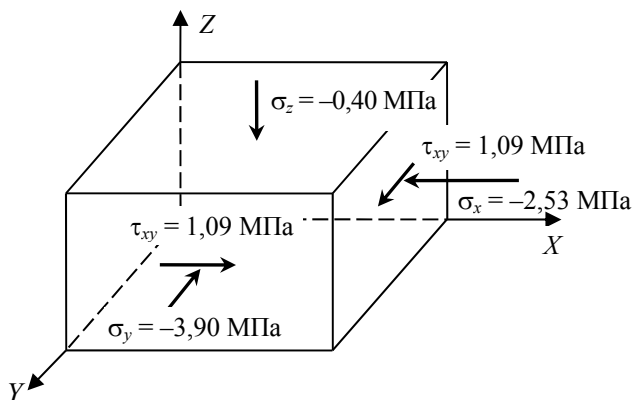


Рис. 11.13. Элементарный объем и напряжения на его площадках

Решим кубическое уравнение (3.23):

$$\sigma^3 - \sigma^{\text{I}} \sigma^2 + \sigma^{\text{II}} \sigma - \sigma^{\text{III}} = 0.$$

Сделаем подстановку $\sigma = y + \frac{\sigma^{\text{I}}}{3}$ и приведем уравнение к виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Здесь новые коэффициенты равны

$$p = \frac{1}{3} \left[\sigma^{\text{II}} - \frac{(\sigma^{\text{I}})^2}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[11,25 - \frac{(-6,83)^2}{3} \right] = -1,43 \text{ (МПа)}^2;$$

$$q = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{27} (\sigma^I)^3 + \frac{1}{3} \sigma^I \sigma^{II} - \sigma^{III} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{27} (-6,83)^3 + \frac{1}{3} (-6,83) \cdot 11,25 + 3,47 \right] = 0,73 (\text{МПа})^3.$$

Определим параметр $r = \pm \sqrt{|p|}$, знак которого должен совпадать со знаком q :

$$r = \sqrt{1,431} = 1,20 \text{ МПа}.$$

Вычислим вспомогательный угол φ :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{q}{r^3} \right) = \arccos \left(\frac{0,73}{1,20^3} \right) = 1,13.$$

Корни промежуточного уравнения равны

$$y_1 = -2r \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) = -2 \cdot 1,20 \cdot \cos \left(\frac{1,13}{3} \right) = -2,23 \text{ МПа};$$

$$y_2 = 2r \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 1,20 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1,13}{3} \right) = 1,88 \text{ МПа};$$

$$y_3 = 2r \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 1,20 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1,13}{3} \right) = 0,35 \text{ МПа}.$$

Проверим решение промежуточного уравнения:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -2,23 + 1,88 + 0,35 \approx 0.$$

Вычислим значения корней основного кубического уравнения:

$$\sigma_1 = y_1 + \frac{\sigma^I}{3} = -2,23 + \frac{-6,83}{3} = -4,50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = y_2 + \frac{\sigma^I}{3} = 1,88 + \frac{-6,83}{3} = -0,40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = y_3 + \frac{\sigma^I}{3} = 0,35 + \frac{-6,83}{3} = -1,93 \text{ МПа}.$$

Расставим индексы главных напряжений в соответствии с условием $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и получим

$$\sigma_1 = -0,40 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -1,93 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -4,50 \text{ МПа}.$$

Проверим полученные значения главных напряжений. Для этого вычислим инварианты тензора напряжений по значениям главных напряжений:

$$\sigma^I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -0,40 - 1,93 - 4,50 = -6,83 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} \sigma^{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = & -0,40 \cdot (-1,93) - 1,93 \cdot (-4,50) - \\ & - 4,50 \cdot (-0,40) = 11,25 (\text{МПа})^2; \end{aligned}$$

$$\sigma^{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -0,40 \cdot (-1,93) \cdot (-4,50) = -3,47 (\text{МПа})^3.$$

Используя теория прочности Губера – Мизеса – Генки, определим допускаемую нагрузку F_{adm} из условия наступления предельного состояния в окрестности расчетной точки S , расположенной вблизи верхней поверхности плиты:

$$\sigma_{eqw} = \sigma_i = \sigma_{dan},$$

где σ_{dan} – опасное напряжение, соответствующее предельному состоянию материала, полученное при испытании на осевое растяжение;

σ_i – интенсивность напряжения (3.43).

Вычислим интенсивность напряжения в окрестности исследуемой точки S :

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[(-0,40 + 1,93)^2 + (-1,93 + 4,50)^2 + (-4,50 + 0,40)^2 \right]} = 3,59 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Вычислим допускаемую нагрузку:

$$F_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{дан}} F}{\sigma_i n_0} = \frac{22 \cdot 100}{3,59 \cdot 1,5} = 408,6 \text{ кН.}$$

Заданную нагрузку можно увеличить в четыре раза.

12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

12.1. Основные положения и понятия

Наука, устанавливающая общие законы образования пластических деформаций и возникающие при этом напряжения, называется *теорией пластичности*.

Существует два подхода при изучении пластических деформаций. Один основан на *теории малых упруго пластических деформациях* (теории А. А. Ильюшина), а другой – на *теории пластического течения*.

Особо важным в теории пластичности являются понятия простого и сложного нагружения, активной и пассивной деформации.

Нагружение считается *простым*, если все внешние силы возрастают пропорционально общему параметру.

Если все внешние нагрузки убывают пропорционально общему параметру, то имеет место *простое разгружение*.

При *сложном напряженном состоянии*, отмечено А. А. Ильюшиным, *деформация* считается *активной*, если интенсивность напряжения для этой точки в данный момент времени имеет значение, превышающее все предыдущие его значения. Если интенсивность напряжения меньше предшествующего его значения, то *деформацию* считают *пассивной*.

12.2. Теория А. А. Ильюшина о простом нагружении и о разгрузке

В нелинейной теории упругости используется зависимость между напряжениями и деформациями следующего вида:

$$G' = \frac{E'}{3} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (12.1)$$

где σ_i, ε_i – соответственно, интенсивность напряжения и интенсивность деформации:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Здесь штрих означает, что отмеченная величина зависит от напряженно-деформированного состояния.

Если ограничиться активным процессом деформации и простым нагружением, то в теории пластичности можно использовать уравнения, которые характеризуют изменение формы в окрестности некоторой точки.

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_m); \\ \sigma_y - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_y - \varepsilon_m); \\ \sigma_z - \sigma_m &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}(\varepsilon_z - \varepsilon_m); \end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx},$$

Возникает вопрос: можно ли подобрать такое нагружение, при котором все элементы тела оказались бы в состоянии активной деформации? Оказывается, что такое нагружение возможно.

Теорема Ильюшина о простом нагружении по теории малых упруго-пластических деформаций получает правильные (согласующиеся с опытом) результаты в том случае, когда процесс нагружения является простым.

А. А. Ильюшиным это доказано для случая степенной зависимости между обобщенными напряжениями и деформациями:

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m. \tag{12.3}$$

Теорема Ильюшина о разгрузке. Рассмотрим стержень при простом растяжении. Пусть $\sigma_1 > \sigma_{pr}$. Разгрузим стержень до $\sigma_2 < \sigma_1$.

Тогда $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, где ε_2 – упругая часть деформации, для вычисления которой можно использовать зависимость:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma'}{E}, \quad (12.4)$$

где $\sigma' = \sigma_1 - \sigma_2$;

E – тангенс угла наклона к горизонту прямой разгрузки.

То есть для вычисления остаточной деформации стержня необходимо из полученной ранее деформации вычесть упругую деформацию, соответствующую значению той силы (или напряжения), на величину которой уменьшается первоначальная сила. Это положение характерно и для случая неоднородного (сложного) напряженного состояния при пассивной разгрузке.

12.3. Основные уравнения теории пластичности

Многочисленные теории пластичности можно разделить на два вида. Теории, основанные на связи напряжений и деформаций (*теории упруго-пластических деформаций*), и теории, основанные на связи между напряжениями и скоростью деформации (*теории пластического течения*).

Пока существует одна-единственная теория пластичности, которая достаточно достоверно описывает свойства твердых тел при малых упругих и пластических деформациях. Это теория малых упруго-пластических деформаций Ильюшина.

Математический аппарат теории пластичности составляют 18 уравнений с 18 неизвестными. Это статические уравнения; геометрические уравнения; физические уравнения; выражения для интенсивности напряжения и деформации; уравнение связи интенсивностей напряжения и деформации.

Дифференциальные уравнения равновесия и геометрические уравнения такие же, как и в классической теории упругости. Физические уравнения (эти уравнения мы не можем уже назвать законом Гука, так как зависимости между деформациями и напряжениями нелинейная) отличаются тем, что модуль сдвига не постоянная величина, а зависящая от деформаций или напряжений.

В теории пластичности закон изменения формы обычно записывают так

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G'\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= 2G'\frac{1}{2}\gamma_{zx}.\end{aligned}\quad (12.5)$$

Выражение для обобщенного модуля деформации имеет вид

$$G' = G[1 - \omega(\varepsilon_i)]. \quad (12.6)$$

Функцию $\omega(\varepsilon_i)$ можно записать в следующем виде:

$$\omega(\varepsilon_i) = 1 - \frac{\sigma_i}{3G\varepsilon_i}. \quad (12.7)$$

где G – это постоянный модуль сдвига при деформациях близких к нулю.

Выражения для обобщенной деформации и для интенсивности напряжения имеют такой же вид, как в классической теории упругости:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad (12.8)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (12.9)$$

Подводя итоги, можно отметить, что в теории пластичности имеется 18 уравнений с 18-ю неизвестными:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w, \varepsilon_i, \sigma_i, G'.$$

Поэтому задачи теории пластичности в принципе решаемы. Однако из-за математических трудностей практически решение получено для очень немногих задач. Решения теории пластичности используются для расчета строительных конструкций, деталей машин

и агрегатов, грунтовых оснований и др., работающих в экстремальных условиях: при больших температурах и давлениях.

При решении задач пластичности обычно используется общий метод – *метод упругих решений*. В первом приближении принимается $\omega_1 = 0$ и решается задача линейной теории упругости. В результате расчета определяются интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}$ и интенсивность деформаций $\varepsilon_{i(1)}$. Затем по формулам (12.6) и (12.7) определяется новое значение функции ω_2 и модуля сдвига G' , которые учитываются при выполнении второго приближения. Опять решается задача линейной теории упругости с учетом новых значений перечисленных величин. Этот процесс продолжается до тех пор, пока отличие результатов последующего решения и предыдущего будет меньше допускаемой величины. Для многих задач теории пластичности этот процесс быстро сходится, то есть для получения достаточно точного результата необходимо выполнить несколько приближений.

12.4. Понятие о теории пластического течения

В теории пластического течения положены в основу уравнения, связывающие напряжения и скорости деформаций.

Приведем основные уравнения теории пластического течения.

Связь перемещений и скоростей движения точек тела имеет вид

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (12.10)$$

Уравнения скоростей деформации:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}; & \dot{\varepsilon}_y &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}; & \dot{\varepsilon}_z &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}; \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}; & \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}; & \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}; \end{aligned} \quad (12.11)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)^2 + (\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)^2 + (\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1)^2}.$$

Точкой помечены те величины, которые зависят от времени.

Зависимости напряжений от компонентов скоростей деформаций

$$\begin{aligned}
 \sigma_x - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{xy} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}; \\
 \sigma_y - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{yz} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz}; \\
 \sigma_z - \sigma_m &= m(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_m); & \tau_{zx} &= m \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx},
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

где m – модуль (переменная величина, подлежащая определению).

Этот модуль отражает связь обобщенного напряжения с обобщенной скоростью деформации:

$$\sigma_i = m \dot{\epsilon}_i. \tag{12.13}$$

В приведенных уравнениях предполагается, что из опыта известна зависимость

$$m = f(\dot{\epsilon}_i). \tag{12.14}$$

Теория пластического течения используется для расчета параметров технологических процессов при штамповке, при волочении проволоки и др. При расчете строительных конструкций и инженерных сооружений теория пластического течения практически не применяется.

12.5. Примеры по разделу 12

Пример 15. Абсолютно жесткий стержень AC шарнирно опертый в точке C , удерживается тремя тязами в точках B , D и E , составленными из шести стержней с одинаковой площадью поперечных сечений A (рис. 12.1). Определить комбинацию стержней в тязях, при которой предельная нагрузка F будет самой большой, если материал деформируется по диаграмме Прандтля.

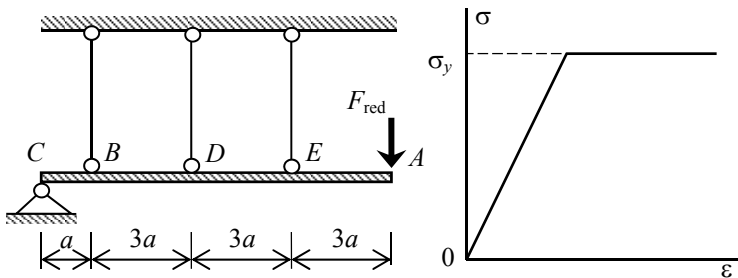


Рис. 12.1. Статически неопределимая система с учетом пластических деформаций материала тяжей

Обозначим количество стержней в тяжах B, D, E , соответственно, n_B, n_D, n_E . Согласно условию задачи при всех комбинациях расположения стержней суммарное их количество равно шести, то есть $n_B + n_D + n_E = 6$. Система потеряет прочность, то есть способность воспринимать сколь угодно малую дополнительную нагрузку, если во всех тяжах напряжения будут равными пределу текучести σ_y . Составим уравнение предельного равновесия заданной системы:

$$\sum M_C = \sigma_y n_B A \cdot a + \sigma_y n_D A \cdot 4a + \sigma_y n_E A \cdot 7a - F_{\text{red}} \cdot 10a = 0.$$

Из уравнения равновесия получим значение предельной нагрузки:

$$F_{\text{red}} = \frac{\sigma_y A}{10} (n_B + 4n_D + 7n_E).$$

Отсюда следует, что наибольшая нагрузка будет при наибольшем значении выражения в скобках. Составим возможные варианты расположения стержней в тяжах B, D, E и посчитаем выражение в скобках для каждого варианта (табл. 12.1).

Очевидно, что заданная система может нести наибольшую предельную нагрузку при варианте распределения стержней по тяжам, обозначенным номером 1. При этом наибольшая предельная нагрузка равна $F_{\text{red}} = 3\sigma_y A$.

Таблица 12.1

Результаты расчета статически неопределимой системы с учетом пластических деформаций материала тяжей

Вариант	Распределение стержней по тягам			Количество стержней	Значение $(n_B + 4n_D + 7n_E)$
	n_B	n_D	n_E		
1	1	2	3	6	30
2	1	3	2	6	27
3	2	1	3	6	27
4	2	2	2	6	24
5	2	3	1	6	21
6	3	1	2	6	21
7	3	2	1	6	18

Пример 16. Рассмотрим задачу об изгибе квадратной железобетонной плиты, шарнирно опирающейся по контуру, с размерами в плане $5,6 \times 5,6$ м от действия поперечной силы $F = 56$ кН, приложенной в середине плиты. Плита гладкая, с толщиной равной $h = 150$ мм, армирована сеткой, с площадью сечения $500 \text{ мм}^2/\text{м}$. Модуль упругости арматуры $E_s = 200$ ГПа, модуль упругости и коэффициент Пуассона бетона, соответственно, равны $E_b = 39$ ГПа, $\nu = 0,22$. Толщина защитного слоя арматуры принята равной $c = 30$ мм. Нормативные сопротивления бетона сжатию и арматурной сетки растяжению, соответственно, равны $f_{ck} = 20$ МПа, $f_{yks} = 500$ МПа. Приняты ограничения по прогибам и по ширине раскрытия трещин – $w_{lim} = 0,2$ мм и $a_{lim} = 28$ мм. Выполняем расчет с учетом упруго-пластических деформаций. В этом случае закон Гука не выполняется и диаграмма зависимости между напряжениями и деформациями имеет вид сложной кривой и описывается зависимостью, представленной на рис. 12.2.

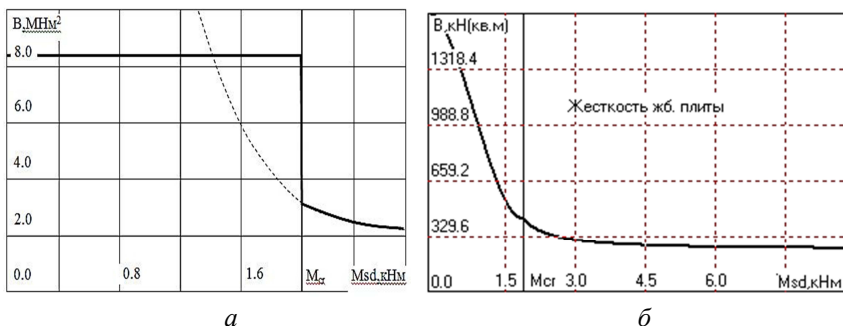


Рис. 12.2. Фактическая диаграмма (а) и аппроксимация диаграммы (б) изменения жесткости железобетонного сечения плиты

Так как получить решение этой задачи аналитическим методом или приближенным (с помощью рядов) невозможно, использован численный метод – метод конечных элементов, реализованный в компьютерной программе *Sturm*. Для этого построена конечно элементная сетка, с равномерным шагом узлов и содержащая 784 КЭ. Напрямую такого вида задача решена быть не может, поэтому применен метод последовательных приближений. На каждом приближении определяется напряженное состояние в каждом конечном элементе и уточняется его жесткость. Расчеты получены для десяти приближений и приведен график изменения изгибающего момента M_x , появляющегося в середине плиты в процессе выполнения итераций (рис. 12.3).

Из графика (рис. 12.3), очевидно, что по мере выполнения приближений изгибающий момент уменьшается. Уменьшение изгибающего момента на десятой итерации по отношению к первому приближению составляет примерно 39 %. Понятно, что решение подобных задач может быть получено только с помощью численных методов, как, например, метода конечных элементов.

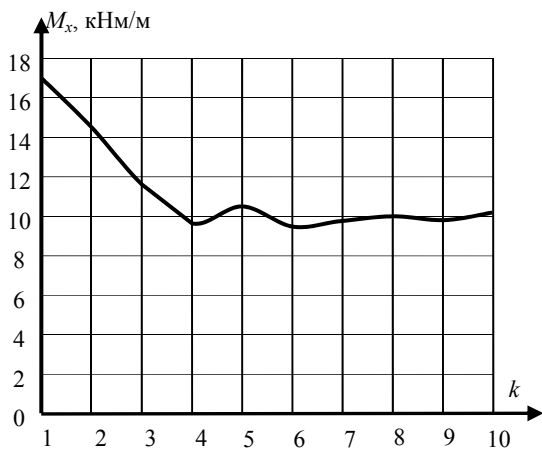


Рис. 12.3. Закон изменения изгибающего момента M_x в середине плиты в ходе приближений итерационного расчета

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое место и значимость имеет теория упругости среди других наук механики твердого тела?
2. Какие основные гипотезы приняты в классической теории упругости?
3. Как обозначаются и как определяются полное, нормальное и касательное напряжения? По каким правилам расставляются индексы и знаки напряжений?
4. Как записывается и какие особенности имеет тензор напряжений?
5. Что следует понимать под напряженным состоянием в точке? Какие частные случаи напряженного состояния выделяют в теории упругости и как записываются соответствующие им тензоры напряжений?
6. Какими уравнениями выражаются условия на границе тела? Как обозначаются и как определяются направляющие косинусы площадки?
7. Как выражаются нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке?
8. Какие напряжения и площадки называются главными? Как определить значения главных напряжений?
9. Как выражаются инварианты тензора напряжений через напряжения на координатных площадках?
10. Как найти значения максимальных (экстремальных) касательных напряжений при объемном напряженном состоянии?
11. Какие площадки и напряжения называются октаэдрическими?
12. Как выражаются октаэдрические напряжения через главные напряжения?
13. Как записывается шаровой тензор напряжения и тензор-девиатор напряжения?
14. Как записывается тензор деформации? Как обозначаются и какие знаки принимаются для линейных и угловых деформаций?
15. Как выражается относительная линейная деформация волокна по произвольному направлению через компоненты тензора деформации?
16. Как вычислить значения главных деформаций?

17. Как выражаются инварианты тензора деформаций через его компоненты?

18. Как записывается шаровой тензор деформации и тензор-девиатор деформации?

19. Как записывается дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)?

20. Как записываются геометрические уравнения (уравнения Коши)?

21. Как записываются и что выражают уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана)? Их физический и энергетический смысл?

22. Как записываются физические уравнения (закон Гука) для объемного напряженного состояния?

23. Как записываются закон изменения объема и закон изменения формы?

24. Как формулируются гипотезы наступления предельного состояния Кулона и Губера – Мизеса – Генки?

25. Как формулируется решение задачи теории упругости в перемещениях?

26. Как формулируется решение задачи теории упругости в напряжениях?

27. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости: плоское напряженное состояние?

28. Как записываются основные уравнения для плоской задачи теории упругости: плоское деформированное состояние?

29. Как получить решение плоских задач теории упругости с использованием функции напряжений (функции Эри)?

30. Какие понятия и допущения приняты в теории тонких пластин?

31. Какие классические модели грунтовых оснований применяются для расчета строительных сооружений?

32. Как записывается уравнение упругой поверхности тонкой пластины (уравнение Софи Жермен)?

33. Как выражаются внутренние силы в поперечно изогнутой пластине через разрешающую функцию прогибов W ?

34. Как выражаются граничные условия для тонких прямоугольных пластин?

35. Как вычисляются нормальные и касательные напряжения в тонкой пластине от изгибающих моментов и поперечных сил?

36. Как выражаются напряжения, вызванные действием местной нагрузки?
37. Какая модель принимается для расчета тонкой пластины методом конечных элементов (суть метода)?
38. Как обозначаются напряжения и деформации в полярной системе координат?
39. Как записываются основные уравнения теории упругости в полярной системе координат?
40. В каких случаях используется цилиндрическая система координатных осей при решении задач теории упругости?
41. Как записываются основные уравнения теории упругости в цилиндрических координатах?
42. Какие понятия принимаются в теории пластичности?
43. Что заложено в понятиях о простых нагружении и разгрузении?
44. Какие основные постулаты приняты в теории малых упруго пластических деформаций А. А. Ильюшина?
45. Как записываются основные уравнения в теории пластичности?

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
3. Безухов, Н. И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов – М. : Высшая школа, 1965. – 320 с.
4. Хечумов, Р. А. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: учебное пособие для технических вузов / Р. А. Хечумов, Х. Кепплер, В. И. Прокопьев. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1994. – 353 с.
5. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
6. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
7. Шевчук, Л. И. Методические указания к контрольным (расчетно-графическим) работам по теории упругости и пластичности / Л. И. Шевчук, О. Л. Вербицкая, А. Е. Кончиц. – Минск : БНТУ, 2003. – 42 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ЕЕ МЕСТО СРЕДИ ДРУГИХ НАУК МЕХАНИКИ.....	10
2. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	12
3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ.....	14
3.1. Обозначения напряжений. Тензор напряжений. Шаровой тензор и девиатор тензора напряжений.....	14
3.2. Напряженное состояние в точке. Частные случаи напряженных состояний.....	18
3.3. Условия на контуре. Граничные условия.....	19
3.4. Исследование напряженного состояния в точке.....	21
3.5. Главные напряжения и главные площадки. Инварианты.....	22
3.6. Октаэдрические площадки и напряжения.....	27
3.7. Примеры к разделу 3.....	30
4. ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ....	35
4.1. Обозначения компонент деформации. Тензор деформации. Шаровой тензор и девиатор тензора деформаций.....	35
4.2. Исследование деформированного состояния в окрестности точки. Главные деформации и главные оси деформации. Инварианты тензора деформации.....	38
4.3. Примеры к разделу 4.....	40
5. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	44
5.1. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).....	44
5.2. Геометрические уравнения (уравнения Коши).....	45
5.3. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана).....	47
5.4. Примеры к разделу 5.....	50
6. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	54
6.1. Обобщенный закон Гука.....	54
6.2. Законы изменения объема и изменения формы.....	55

6.3. Удельная потенциальная энергия	57
6.4. Примеры к разделу 6	58
7. ГИПОТЕЗЫ НАСТУПЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНО УПРУГОГО И ПРЕДЕЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЙ	64
7.1. Теории прочности Кулона	64
7.2. Теория прочности Губера – Мизеса – Генки	65
7.3. Примеры к разделу 7	65
8. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	67
8.1. Постановка задачи в теории упругости	67
8.2. Решение задач теории упругости в перемещениях	68
8.3. Решение задач теории упругости в напряжениях	68
9. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ	70
9.1. Плоское напряженное состояние	70
9.2. Плоское деформированное состояние	71
9.3. Использование функции напряжений (функции Эри) для решения плоских задач теории упругости	73
9.4. Пример к разделу 9	75
10. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ	83
10.1. Обозначения перемещений, напряжений и деформаций	83
10.2. Основные уравнения теории упругости в полярных координатах	84
10.3. Понятия и основные уравнения для осесимметричных задач в цилиндрических координатах	86
11. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ И КРУГЛЫХ ПЛАСТИН	89
11.1. Основные понятия	89
11.2. Уравнение упругой поверхности прямоугольной пластины	90
11.3. Связь между прогибами пластины и внутренними силами	90
11.4. Граничные условия для прямоугольных пластин	91
11.5. Напряжения в сечениях пластины	91
11.6. Классические модели упругого основания	94

11.7. Уравнение упругой поверхности пластины на упругом основании Винклера	95
11.8. Использование метода конечных элементов для расчета прямоугольных пластин.....	96
11.9. Расчет круглых пластин.....	100
11.10. Примеры к разделу 11.....	103
12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	112
12.1. Основные положения и понятия	112
12.2. Теория А. А. Ильюшина о простом нагружении и разгрузке	112
12.3. Основные уравнения теории пластичности.....	114
12.4. Понятие о теории пластического течения.....	116
12.5. Примеры по разделу 12.....	117
Контрольные вопросы.....	122
Литература	125

Учебное издание

ВЕРБИЦКАЯ Ольга Леонидовна
ЗИНЕВИЧ Сергей Иванович
ШЕВЧУК Леонид Иванович

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебно-методическое пособие
для строительных специальностей

Редактор *Е. И. Бенищевич*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 26.10.2021. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 7,50. Уч.-изд. л. 5,86. Тираж 100. Заказ 873.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.