МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

О. А. Бояршинова

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию в области автоматизации технологических процессов, производств и управления

М и н с к
Б Н Т У
2 0 2 2

УДК 531(075.4)
ББК 22.2я7
Б86

Р е ц е н з е н т ы:
главный научный сотрудник ОИПИ НАН Республики Беларусь
д-р техн. наук, профессор *В. В. Старовойтов*;
кафедра общей и теоретической физики
УО «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина»
(зав. каф., канд. физ.-мат. наук, доцент *А. В. Демидчик*);
доцент кафедры, канд. физ.-мат. наук *П. Б. Кац*

Бояршинова, О. А.
Б86 Физика : учебно-методическое пособие для студентов специальностей 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств», 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» / О. А. Бояршинова. – Минск : БНТУ, 2022. – 113 с.
ISBN 978-985-583-695-8.

В пособии представлены основные теоретические сведения по дисциплине «Физика», раздел «Механика», излагаются следующие темы: кинематика, динамика поступательного и вращательного движения механических систем, законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии, колебательные процессы в механических системах, элементы механики сплошных сред, специальная теория относительности и др.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей, однако может быть использовано всеми, кто интересуется механикой.

УДК 531(075.4)
ББК 22.2я7

ISBN 978-985-583-695-8

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые студенты! Данное пособие содержит теоретический материал по одному из разделов физики, а именно механике. Здесь также приведены некоторые сведения об используемом математическом инструментарии. Пособие создано Вам в помощь: для работы на занятиях, для выполнения Вами контрольной работы и подготовки к текущему и итоговому контролю по дисциплине. Полученные знания пригодятся Вам в профессиональной деятельности и в Вашей повседневной жизни.

В первом разделе пособия рассмотрены основные этапы становления физики, ее связи с другими науками, единицы измерения физических величин, введены понятия скалярной и векторной физической величины.

В следующих разделах рассматриваются различные темы механики, с которой начинается изучение вузовского курса физики. К ним относятся кинематика и динамика поступательного и вращательного движения механических систем, законы сохранения импульса, момента импульса и механической энергии, а также колебательные процессы в механических системах и др.

Каждый раздел содержит краткое теоретическое описание, позволяющее читателю понять суть используемых физических законов.

Учебное пособие предназначено для студентов младших курсов вузов, технических специальностей, приступающих к изучению физики в рамках бакалаврской подготовки. Оно может быть интересно учителям школ и преподавателям вузов, а также всем, кто увлекается физикой.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Предмет физики. Важнейшие этапы развития физики

Аристотель
4 век до н.э.

Фи́зика (φύσις – «природа») – наука о наиболее общих законах природы, о материи, ее структуре, движении и правилах трансформации.

Термин «физика» впервые фигурирует в сочинениях Аристотеля – одного из величайших мыслителей древности (IV век до нашей эры). Первоначально термины «физика» и «философия» были синонимами, так как в основе обеих дисциплин лежало стремление объяснить законы функционирования Вселенной. Однако в результате научной революции XVI века физика развилась в самостоятельную научную отрасль.

Период от древнейших времен до начала XVII в. – это период накопления физических знаний об отдельных явлениях природы, возникновения отдельных учений. В соответствии с этапами развития общества, в нем выделяют эпоху античности, средние века, эпоху Возрождения.

Физика как наука берет начало от Г. Галилея, основоположника точного естествознания. Период от Г. Галилея до И. Ньютона представляет начальную фазу физики, период ее становления. Последующий период начинается И. Ньютоном, заложившим основы той совокупности законов природы, которые дают возможность понять закономерности большого круга явлений. И. Ньютон построил первую физическую картину мира (механическую картину природы) как завершенную систему механики. Возведенная И. Ньютоном и его последователями – Л. Эйлером, Ж. Даламбером, Ж. Лагранжем, П. Лапласом и другими – грандиозная система классической физики просуществовала незыблемо два века и только в конце XIX в. начала рушиться под напором новых фактов, не укладывающихся в ее рамки. Первый ощутимый удар по физике Ньютона нанесла еще в 60-х годах XIX в. теория электромагнитного поля Максвелла – вторая после ньютоновской механики великая физическая теория, дальнейшее развитие которой углубило ее противоречия с классической механикой и привело к революционным изменениям в физике. Поэтому период классической физики в принятой схеме делится на три этапа: от И. Ньютона до Дж. Максвелла (1687–1859), от Дж. Максвелла до В. Рентгена (1860–1894) и от В. Рентгена до А. Эйнштейна (1895–1904).

Первый этап проходит под знаком полного господства механики Ньютона, его механическая картина мира совершенствуется и уточняется, физика представляется уже целостной наукой. Второй этап начинается с создания в 1860–1865 гг. Дж. Максвеллом общей строгой теории электромагнитных процессов. Используя концепцию поля М. Фарадея, он дал точные пространственно-временные законы электромагнитных явлений в виде системы известных уравнений: уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Теория Максвелла получила дальнейшее развитие в трудах Г. Герца и Х. Лоренца, в результате чего была создана электродинамическая картина мира.

Этап с 1895 г. по 1904 г. является периодом революционных открытий и изменений в физике, этап преобразований, обновлений, перехода к новой, современной физике, фундамент которой заложили специальная теория относительности и квантовая теория. Начало ее целесообразно отнести к 1905 г., году создания А. Эйнштейном специальной теории относительности и превращения идеи кванта М. Планка в теорию квантов света, которые ярко продемонстрировали отход от классических представлений и понятий и положили начало созданию новой физической картины мира – квантово-релятивистской. При этом переход от классической физики к современной характеризовался не только возникновением новых идей, открытием новых неожиданных фактов и явлений, но и преобразованием ее духа в целом, возникновением нового способа физического мышления, глубоким изменением методологических принципов физики.

В периоде современной физики целесообразно выделить три этапа: первый этап (1905–1931), который характеризуется широким использованием идей релятивизма и квантов и завершается созданием и становлением квантовой механики – четвертой после И. Ньютона фундаментальной физической теории; второй этап – этап субатомной физики (1932–1954), когда физики проникли на новый уровень материи, в мир атомного ядра; и, наконец, третий этап – этап субъядерной физики и физики космоса, отличительной особенностью которого является изучение явлений в новых пространственно-временных масштабах. При этом за начало отсчета условно можно взять 1955 г., когда физики начали исследовать структуру нуклона, что знаменовало проникновение в новую область пространственно-временных масштабов, на субъядерный уровень. Этот этап совпал во времени с развернувшейся научно-технической революцией, начало ему дали новый уровень производительных сил, новые условия развития человеческого общества.

1.2. Физика и другие науки

Ричард Фейнман, читая свои знаменитые лекции по физике, говорил: «*Физика – это самая фундаментальная из всех наук, самая всеобъемлющая; огромным было ее влияние на все развитие науки. Действительно, ведь нынешняя физика вполне равноценна давнишней натуральной философии, из которой возникло большинство современных наук. Не зря физику вынуждены изучать студенты всевозможных специальностей; во множестве явлений она играет основную роль*».

Химия (неорганическая) испытывает на себе влияние физики более чем любая другая наука. Все химические процессы – это образование или разрушение связи между валентными электронами. В сущности, теоретическая химия – это физика.

Астрономия старше физики, но как наука она встала на ноги только тогда, когда физики смогли объяснить, почему планеты и звезды движутся именно так, а не иначе. Самым поразительным открытием астрономии был тот факт, что звезды состоят из тех же атомов, что и Земля. Доказано это было физиками-спектроскопистами. Откуда звезды черпают свою энергию? Ясно это стало только к 1940 г., после открытия физиками реакции деления и термоядерного синтеза. Астрономия столь близка к физике, что трудно провести грань между ними.

Биология. Механизм всех биологических процессов можно понять только на молекулярном и внутриклеточном уровне. И здесь биологам не обойтись без знания физики и без физической аппаратуры, например, электронных микроскопов, с помощью которых была открыта структура ДНК. А сложнейшие процессы нервной деятельности? По сути это электромагнитные явления.

Здесь взяты примеры из областей науки, казалось бы, далеких от физики. А все предметы, которые изучаются в техническом университете (кроме истории, иностранных языков и т. д.), являются частными случаями различных разделов физики. Например, электротехника началась с чисто физических исследований Эрстеда, Ампера, Фарадея, Максвелла. Электроника – это синтез нескольких разделов физики: электромагнетизма, физики твердого тела, физики вакуума и газов и т. д. И даже королева наук – математика – является инструментом для физических исследований.

1.3. Физические величины и единицы измерения

Вопрос, связанный с необходимостью произвести измерения возник достаточно давно. По мнению историков, производить измерения начали примерно в 3000 году до нашей эры в Древнем Египте. Река Нил обычно разливалась, и поля погружались под воду. Затем возникала проблема поиска прежних границ полей после того, как паводок отступал. Вы можете легко догадаться, как они решали эту проблему: сначала определяли неподвижный камень или дерево, а затем договорились о единице длины. Измеряли и записывали расстояние от границ поля до начала координат. Естественно данные измерения не были систематизированы и имели приблизительный характер. Постепенно человечество пришло к тому, что необходимо унифицировать процесс измерения, и сегодня всеми учеными используется единый стандарт, реализованный в Международной системе единиц – СИ. Система СИ не является статичной системой, а развивается с учетом возрастающих требований к измерениям всех уровней точности в науке, технике и других областях человеческой деятельности.

Семь основных единиц СИ, приведенных в табл. 1.1, создают основу для определения всех остальных единиц измерений Международной системы. По мере развития науки и совершенствования измерительной техники определения единиц пересматриваются. Чем выше точность измерений, тем более тщательно должны быть реализованы единицы измерений.

Таблица 1.1

Основные единицы системы СИ

Величина	**Единица, символ, определение единицы**
Длина	**Метр** (1 м): Метр – это длина пути, проходимого светом в вакууме за промежуток времени 1/299 792 458 доли секунды. Из определения следует, что скорость света в вакууме, $C_0 = 299\,792\,458$ м/с
Масса	**Килограмм** (1 кг): Килограмм – это единица массы, равная массе международного прототипа килограмма
Время	**Секунда** (1 с): Секунда – это интервал времени, равный 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Из определения следует, что величина сверхтонкого расщепления основного состояния атома цезия-133, ν(hfs Cs), равна 9 192 631 770 Гц
Сила электрического тока	**Ампер** (1 А): Ампер – это сила постоянного тока, который, при прохождении по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и пренебрежимо малого кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, вызывает силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ ньютонов, на каждом участке проводника длиной в 1 метр. Из определения следует, что магнитная постоянная (вакуума), μ_0, также известная как магнитная проницаемость вакуума, равна $\mu_0 = 2\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Температура	**Кельвин** (1 К): Кельвин – это единица термодинамической температуры, равная 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды. Из определения следует, что термодинамическая температура тройной точки воды, T_{tpw}, равна 273,16 К
Количество вещества	**Моль** (1 моль): 1. Моль – это количество вещества системы, которая содержит столько же частиц, сколько атомов содержится в 0,012 килограммах углерода-12. 2. При использовании моля частицы должны быть указаны; это могут быть атомы, молекулы, ионы, электроны и другие частицы или определенные группы таких частиц. Из определения следует, что молярная масса углерода-12, $M(^{12}C)$, равна 12 г/моль
Сила света	**Кандела** (1 кд): Кандела – это сила света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц (герц), энергетическая сила которого в этом направлении составляет 1/683 ватт на стерадиан. Из определения следует, что спектральная эффективность свечения, монохроматического излучения частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц равна 683 лм/Вт

Остальные физические величины могут быть выражены через основные единицы системы СИ. Например, скорость выражается через единицу расстояния и времени – м/с.

В системе СИ принят набор приставок к единицам, используемых в случае, когда значения измеряемых величин много больше, либо много меньше, чем единица СИ, используемая без приставки. Приставки СИ перечислены в табл. 1.2. Они могут использоваться с любыми основными единицами и производными единицами, имеющими специальное наименование.

Таблица 1.2

Таблица приставок и множителей

Приставка	Обозначение	Множитель	Приставка	Обозначение	Множитель
тера	Т	10^{12}	деци	д	10^{-1}
гига	Г	10^{9}	санти	с	10^{-2}
мега	М	10^{6}	милли	м	10^{-3}
кило	к	10^{3}	микро	мк	10^{-6}
гекта	г	10^{2}	нано	н	10^{-9}
дека	да	10^{1}	пико	п	10^{-12}

1.4. Скалярные и векторные величины

В процессе изучения физики мы встречаем в основном два типа величин: скалярные и векторные. Скалярная величина, или скаляр, – это физическая величина, для задания которой (в подходящих единицах измерения) достаточно одного числа.

Скаляров очень много в физике. Масса тела равна 3 кг, температура воздуха – 12 ^{O}C, напряжение в сети – 220 В… Во всех этих случаях интересующая нас величина задается одним единственным числом и данные величины не имеют направления. Следовательно, масса, температура и электрическое напряжение являются скалярами. Однако важно помнить, что, производя действия над скалярами, например, сложения (вычитания), мы имеем право складывать лишь те скаляры, которые обладают одинаковой размерностью (массу с массой, напряжение с напряжением и т. д.).

Векторная величина, или вектор, – это физическая величина, характеризуемая: 1) неотрицательным скаляром; 2) направлением в пространстве. При этом скаляр называется модулем вектора, или его абсолютной величиной.

Предположим, что автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Однако это неполная информация о движении. Может оказаться важным и то, куда едет автомобиль, в каком именно направлении. Поэтому важно знать не только модуль (абсолютную величину) скорости автомобиля – в данном случае это 60 км/ч – но и ее направление в пространстве. Значит, скорость является вектором.

Мы будем обозначать векторы буквами со стрелкой. Так, вектор скорости можно обозначить через $\vec{\vartheta}$, а вектор силы – через $\vec{F}$. Собственно, вектор – это и есть стрелка или, как еще говорят, направленный отрезок (рис. 1.1).

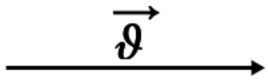


Рис. 1.1. Вектор

Начальная точка стрелки называется началом вектора, а конечная точка (острие стрелки) – концом вектора.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 1.2).

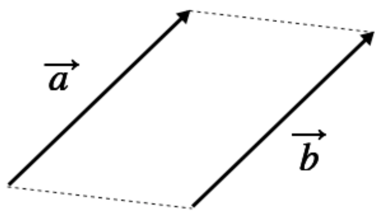


Рис. 1.2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$)

Два вектора называются *равными,* если они сонаправлены и имеют равные модули.

В физике можно складывать только векторы, обладающие одинаковой размерностью. Можно складывать скорость со скоростью, силу с силой, но нельзя сложить вектор скорости с вектором силы.

Правило треугольника. Поместим начало вектора $\vec{B}$ в конец вектора $\vec{A}$. Тогда вектор $\vec{A} + \vec{B}$ соединяет начало вектора $\vec{A}$ с концом вектора (рис. 1.3).

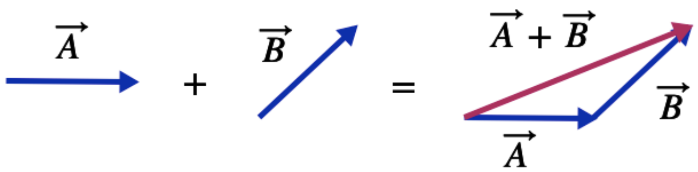


Рис. 1.3. Сложение векторов (правило треугольника)

Правило параллелограмма. Поместим начала векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в одну точку. Тогда вектор $\vec{A} + \vec{B}$, имея начало в той же точке, является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (рис. 1.4).

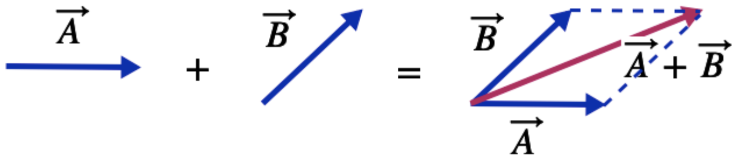


Рис. 1.4. Сложение векторов (правило параллелограмма)

Алгебраические свойства сложения векторов:

1. От перестановки слагаемых сумма не меняется (математики называют это коммутативностью сложения):

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}.$$

2. Свойство ассоциативности:

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}).$$

Можно показать, что сумма любого конечного числа векторов не зависит от того, в каком порядке мы складываем векторы. Например, для нахождения суммарного вектора можно воспользоваться правилом многоугольника (рис. 1.5).

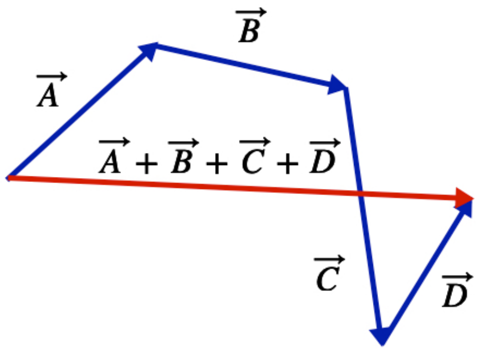


Рис. 1.5. Сложение векторов (правило многоугольника)

Вычитание вектора – это прибавление противоположного вектора. Другими словами, разностью векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется сумма $\vec{A} + (-\vec{B})$.

2. КИНЕМАТИКА

Раздел физики, изучающий закономерности механического движения и взаимодействия тел, называется механикой. *Механическое движение* – всякое изменение положения тела или его частей с течением времени относительно других тел.

В нерелятивистской (ньютоновской) механике рассматривают механические движения макроскопических тел со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме. При этом выделяют следующие разделы:

1. *Кинематику*, которая изучает движение тел, не вникая в причины, вызывающие это движение. Основная задача кинематики – определить положение тела в любой момент времени.

2. *Динамику*, которая изучает законы движения тел и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

3. *Статику*, которая изучает условия равновесия механических систем под действием приложенных к ним сил и моментов.

Механика для описания движения тел, в зависимости от условий конкретных задач, использует упрощенные *физические модели*.

Примером такой упрощенной физической модели является, например, *материальная точка* – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, считая массу тела сосредоточенной в данной точке. Всякое тело имеет определенные размеры, однако если размеры тела малы по сравнению с расстояниями до других тел, то данное тело можно считать материальной точкой. Так при движении автомобиля на большие расстояния можно пренебречь его длиной, так как длина автомобиля мала по сравнению с расстояниями, которое автомобиль проходит.

Абсолютно твердое тело – тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

Абсолютно упругое тело – тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Абсолютно неупругое тело – тело, которое после прекращения внешнего силового воздействия полностью сохраняет деформированное состояние, вызванное этим воздействием.

2.1. Система отсчета. Траектория. Путь. Перемещение

Определим, что необходимо знать для того, чтобы полностью описать движение тела в пространстве. Прежде всего необходимо определиться относительно чего (какой точки) рассматривается движение исследуемого тела. Для этого следует ввести такое понятие, как *тело отсчета* – тело, относительно которого рассматривается движение, данное тело может покоиться или двигаться относительно других тел, однако в новой системе отсчета, связанной с ним, данное тело будет считаться условно неподвижным.

Чтобы определить положение исследуемого тела, с телом отсчета жестко связывают систему координат, снабженную часами. Совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов, отсчитывающих время, называется *системой отсчета* (рис. 2.1).

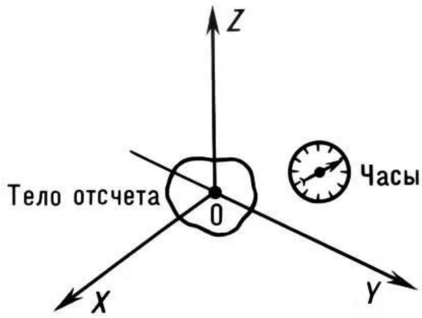


Рис. 2.1. Система отсчета

Способы задания положения тела в пространстве:

1. Координатный $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – данные уравнения называют кинематическими уравнениями движения.

2. Векторный – при помощи радиус-вектора $\vec{r}(t)$.

Радиус-вектор $\vec{r}(t)$ – это вектор, который соединяет начало координат (тело отсчета) с положением материальной точки на траектории:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad |\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2},$$

где величины $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ называются прямоугольными декартовыми координатами вектора $\vec{r}(t)$.

Линия, которую описывает движущееся точка в определенной системе отсчета, называется *траекторией***.** Уравнение вида $y = f(x)$ есть уравнение траектории.

Путь S – скалярная физическая величина, равная длине траектории, описанной телом за некоторый промежуток времени. Путь всегда положителен и может только расти.

Перемещение $\Delta\vec{r}$ тела за определенный промежуток времени – направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий начальное (точка *1*) и конечное (точка *2*) положение тела:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}(t + \Delta t)$ и $\vec{r}(t)$ – радиус-векторы тела в эти моменты времени (рис. 2.2).

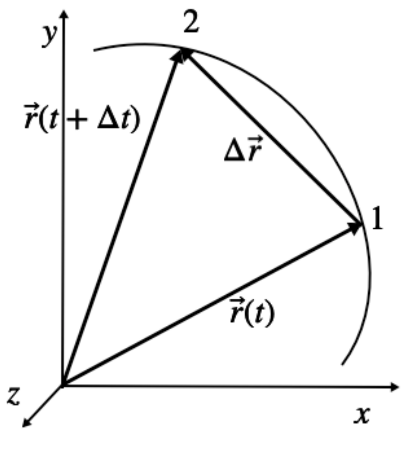


Рис. 2.2. Перемещение тела

Пример. Если Вы утром вышли из дома и прошли за день большой путь, ваше перемещение к моменту возвращения домой будет равно нулю. Поэтому модуль перемещения не может быть больше пути

$$|\Delta\vec{r}| \le S.$$

2.2. Кинематические характеристики. Скорость. Ускорение

Для характеристики быстроты изменения положения тела или частей тела в пространстве вводится понятие скорости. *Скорость* – вектор, а значит, характеризуется величиной, направлением и точкой приложения.

Выделяют мгновенную и среднюю скорости. Мгновенная скорость описывает движение в данный конкретный момент времени в данной конкретной точке пространства (например, показания спидометра при движении автомобиля), а средняя скорость характеризует все движение в целом, в общем, не описывая подробности движения на каждом конкретном участке.

Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории в то время как средняя скорость направлена вдоль перемещения (рис. 2.3).

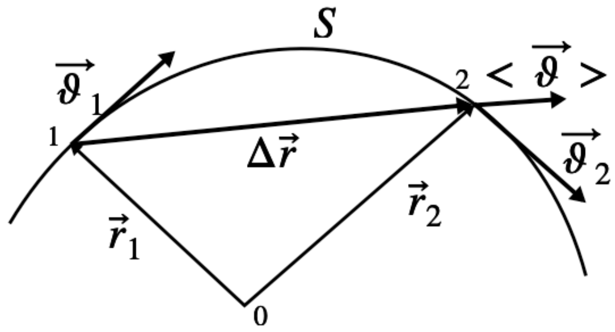


Рис. 2.3. Направление скоростей

Мгновенная скорость материальной точки – это средняя скорость за бесконечно малый интервал времени, определяемая как векторная величина, равная первой производной по времени от радиус-вектора $\vec{r}(t)$ рассматриваемой точки:

$$\vec{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1)$$

Проекции скорости ϑ_x, ϑ_y и ϑ_z на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным по времени от соответствующих координат движущейся точки:

$$\vartheta_x = \dot{x}, \vartheta_y = \dot{y}, \vartheta_z = \dot{z}.$$

Абсолютное значение вектора скорости можно определить следующим образом:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2} = \frac{dS}{dt}.$$

Средняя скорость $<\overrightarrow{\vartheta}>$ – векторная физическая величина, численно равная отношению перемещения к промежутку времени, за который оно произошло, и направленная вдоль перемещения:

$$<\overrightarrow{\vartheta}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Средняя скорость пути – скалярная физическая величина, которая равна отношению всего пути, пройденного телом, ко всему времени движения (учитывается даже то время, когда тело не двигалось)

$$\vartheta_s = \frac{S}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots},$$

$[\vartheta] = \frac{\text{м}}{c}$.

Из (1) можно найти выражение для пройденного пути S за промежуток времени от t_1 до t_2 в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vartheta(t)dt. \qquad (2)$$

Геометрический смысл этого интеграла в том, что площадь под кривой $\vartheta(t)$ есть путь тела за время $t = t_2 - t_1$ (рис. 2.4).

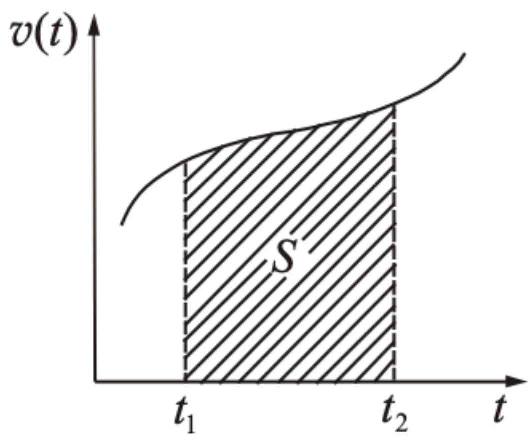


Рис. 2.4. Площадь S под кривой $\vartheta(t)$ есть путь, пройденный телом, за время t

Если направление вектора скорости не изменяется, то движение называется прямолинейным.

Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется равномерным:

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = const.$$

Равномерное прямолинейное движение – это движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения, т. е. это движение с постоянной по модулю и направлению скоростью: $\overrightarrow{\vartheta} = \overrightarrow{const}$ – уравнение скорости.

Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1 = t$ координата тела изменилась на величину $\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta r_x$ (рис. 2.5).

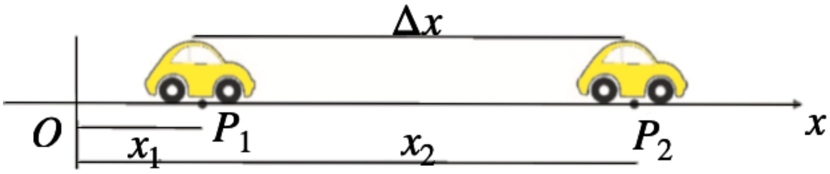


Рис. 2.5. Равномерное движение тела

Следовательно, проекция скорости тела

$$\vartheta_x = \frac{\Delta r_x}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t}.$$

Обозначим координату тела в момент времени $t = 0$ через x_0, тогда *кинематическое уравнение равномерного движения* (уравнение зависимости координаты тела от времени) будет иметь вид

$$x = x_0 + \vartheta_x t, \tag{3}$$

а

$$\Delta r_x = \vartheta_x t$$

– *уравнение перемещения*. При равномерном прямолинейном движении направление скорости не изменяется, поэтому путь

$$S = |\Delta r_x|.$$

Равноускоренное прямолинейное движение – это движение при котором скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково. Другими словами это движение с постоянным по модулю и направлению ускорением.

Пусть в момент времени t тело находилось в точке P_1, имея скорость $\vec{\vartheta}_1$. Через время Δt оно переместилось в точку P_2, при этом его скорость стала равной $\vec{\vartheta}_2$ (рис. 2.6).

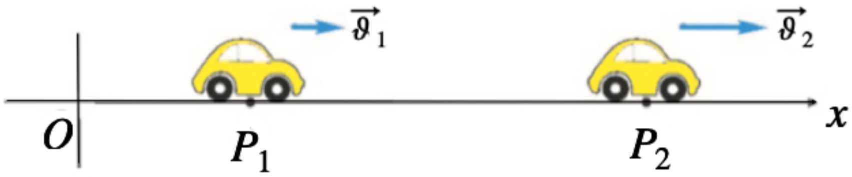


Рис. 2.6. Равноускоренное движение тела

Приращение вектора скорости равно

$$\Delta\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_2 - \vec{\vartheta}_1,$$

данная формула справедлива как в случае прямолинейного так и криволинейного движения (рис. 2.7).

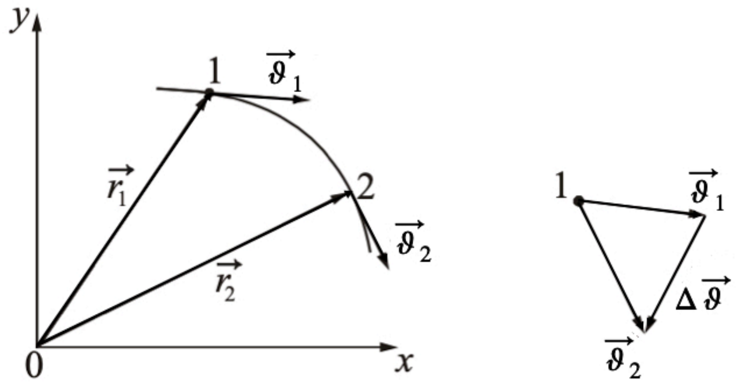


Рис. 2.7. Приращение вектора скорости

Чтобы охарактеризовать быстроту изменения скорости, введем величину:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{\vartheta}}. \qquad (4)$$

Ускорение ($\vec{a}$) – это векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора скорости и равная производной вектора скорости по времени.

Проекции ускорения a_x, a_y и a_z на оси прямоугольных декартовых координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости движущейся точки:

$$a_x = \dot{\vartheta}_x;\ a_y = \dot{\vartheta}_y;\ a_z = \dot{\vartheta}_z.$$

Абсолютное значение вектора ускорения можно определить следующим образом:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Ускорение направлено по вектору приращения скорости $\Delta\vec{\vartheta}$. При прямолинейном движении направление скорости остается постоянным, поэтому вектор ускорения $\overrightarrow{a}$ или совпадает с направлением скорости, или противоположен ему. Если модуль ускорения при этом не изменяется с течением времени, то в первом случае движение будет равноускоренным, во втором – равнозамедленным. Скорость движения в любой момент времени будет определятся соотношением

$$\vartheta(t) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt. \tag{5}$$

Если $a = const,\ t_1 = 0$, а $t_2 = t$ тогда

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \pm at, \tag{6}$$

где ϑ_0 – начальная скорость точки. Знак «плюс» и «минус» соответсвенно для равноускоренного и равнозамедленного движений. Воспользовавшись формулами (2) и (6), найдем формулу для расчета пройденного пути.

$$S = \int_0^t (\vartheta_0 \pm at)dt = \vartheta_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \tag{7}$$

Формула (7) дает правильный результат для пройденного пути только в том случае, если за время t направление движения точки (знак скорости) не изменяется. Иначе данная формула позволяет найти перемещение точки за время t:

$$\Delta r = \int_0^t (\vartheta_0 \pm at)dt = \vartheta_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \tag{8}$$

в проекциях на оси формулу (8) перепишем в виде

$$x = x_0 + \vartheta_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

– кинематическое уравнение равноускоренного движения (аналогично для других осей).

Исключая из уравнений скорости и перемещения t, получим

$$\Delta r_x = \frac{\vartheta_x^2 - \vartheta_{0x}^2}{2a_x} .$$

Из определения средней скорости:

$$\Delta r = \vartheta_{ср} t = \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2} t,$$

где $\vartheta_{ср} = \dfrac{\vartheta + \vartheta_0}{2}$ – применима только для участка с $\vec{a} = \overrightarrow{const}$.

Среднее ускорение – физическая величина, численно равная отношению изменения скорости тела $\Delta\vec{\vartheta}$ к промежутку времен Δt, в течении которого оно происходило:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}_0}{\Delta t}.$$

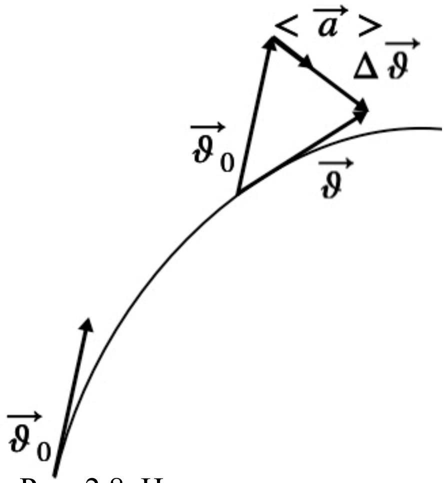


Рис. 2.8. Направление вектора среднего ускорения

Вектор среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ направлен параллельно вектору изменения скорости $\Delta\vec{\vartheta}$ ($\langle \vec{a} \rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{\vartheta}$) (рис. 2.8).

Единица измерения ускорения

$$[a] = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{1 м/с}{1 с} = 1\frac{м}{с^2}.$$

Таким образом, *прямая задача кинематики* – определить кинематические характеристики по известному закону движения. *Обратная задача кинематики* заключается в нахождении закона движения по известной скорости (ускорению) и начальному кинематическому состоянию.

2.3. Свободное падение

Свободным падением тел называют падение тел на Землю в отсутствие сопротивления воздуха (в пустоте). В конце XVI века знаменитый итальянский ученый Г. Галилей опытным путем с доступной для того времени точностью установил, что в отсутствие сопротивления воздуха все тела падают на Землю равноускоренно (рис. 2.9), и что в данной точке Земли *ускорение всех тел при падении одно и то же*. До этого в течение почти двух тысяч лет, начиная с Аристотеля, в науке было принято считать, что тяжелые тела падают на Землю быстрее легких.


Галилео Галилей (1564–1642)

Ускорение, с которым тела падают на Землю, называется *ускорением свободного падения*. Вектор ускорения свободного падения обозначается символом

$\vec{g}$, он направлен по вертикали вниз. В различных точках земного шара, в зависимости от географической широты и высоты над уровнем моря, абсолютное значение $\vec{g}$ оказывается неодинаковым, изменяясь примерно от 9,83 м/с^2 на полюсах до 9,78 м/с^2 на экваторе. Ускорение свободного падения также зависит от высоты h тела над поверхностью планеты.

Рис. 2.9. Свободное падение тел (справа трубка Ньютона)

Самым простым примером свободного падения является падение тела с некоторой высоты H без начальной скорости. Такое движение является частным случаем прямолинейного движения с постоянным ускорением. Следовательно, все ранее изученные формулы, применяемые в кинематике, работают и в данном случае, но вместо ускорения $\vec{a}$ будем писать $\vec{g}$: в векторном виде

$$\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}_0 + \vec{g}t$$

и скалярном

$$\vartheta_y = \vartheta_{0y} + gt,$$

где ϑ_y – скорость тела в момент времени t (ось OY направлена вниз), если начальная скорость $\vartheta_{0y}= 0$, то речь идет о свободном падении и $\vartheta_y = gt$. Однако следует понимать, что такое движение ограничено высотой H, с которой тело падает, а соответсвенно и скорость может быть определена через H. Известно, что

$$\Delta\vec{r} = \vec{\vartheta}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

или (в скалярном виде)

$$\Delta r_y = H = \frac{gt^2}{2} \;\Rightarrow\; t_{\text{падения}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \;\Rightarrow \vartheta_y = \sqrt{2gH}$$

помним, что в данном случае $\vartheta_{0y} = 0$.

Движение тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью ϑ_{0y}, описывается уравнениями (для удобства ось OY направлена вверх (рис. 2.10):

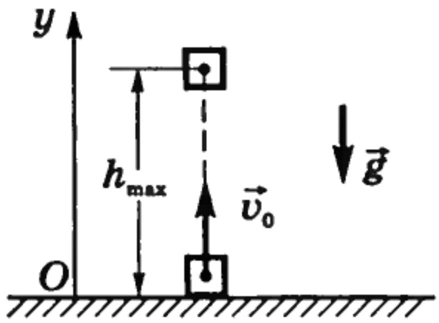


Рис. 2.10. Движение тела, брошенного вертикально

$$\vartheta_y = \vartheta_{0y} - gt,$$
$$y = \vartheta_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из уравнения скорости видно, что тело движется равнозамедленно вверх, достигает максимальной высоты, а затем движется равноускоренно вниз. Учитывая, что при $y = h_{max}$, скорость $\vartheta_y = 0$ и в момент достижения телом первоначального положения $y = 0$, можно найти:

$t_{\text{П}} = \dfrac{\vartheta_0}{g}$ – время подъема на максимальную высоту,

$t_{\text{полета}} = 2t_{\text{П}} = \dfrac{2\vartheta_0}{g}$ – время полета тела,

$h_{max} = \dfrac{\vartheta_0^2}{2g}$ – максимальная высота подъема тела.

2.4. Движение тела, брошенного горизонтально с начальной скоростью ϑ_0

Если скорость тела $\overrightarrow{\vartheta}_0$ направлена не вертикально, то движение тела будет криволинейным (рис. 2.11) – парабола. Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально с высоты H. Сопротивлением воздуха будем пренебрегать.

При движении такого тела, в связи с тем, что можно пренебречь сопротивлением воздуха, горизонтальная составляющая скорости $\vartheta_x = \vartheta_0 = const$ будет сохраняться, а значит движение вдоль оси OX является равномерным $x = \vartheta_0 t$.

В тоже время вертикальная составляющая скорости, в момент времени $t = 0$, равна $\vartheta_{0y} = 0$, а в любой другой момент времени $\vartheta_y = \vartheta_{0y} + gt$, аналогично движению тела, только в вертикальной плоскости. Дальность полета в произвольный момент времени $\Delta r_y = \frac{gt^2}{2}$.

Скорость тела в любой момент времени направлена по касательной к траектории (параболе). Модуль скорости рассчитывается по теореме Пифагора:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \sqrt{\vartheta_0^2 + (gt)^2}.$$

Зная высоту h, с которой брошено тело, можно найти время $t_{\text{падения}}$, через которое тело упадет на землю. А именно

$$\Delta r_y = h = \frac{gt^2}{2} \;\Rightarrow\; t_{\text{падения}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

За это время в горизонтальном направлении тело преодолеет расстояние

$$l = \vartheta_0 t_{\text{падения}} = \vartheta_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ – дальность полета тела.}$$

Угол между горизонтом и скоростью тела легко найти из соотношения:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{\vartheta_y}{\vartheta_0}\right| = \frac{gt}{\vartheta_0}.$$

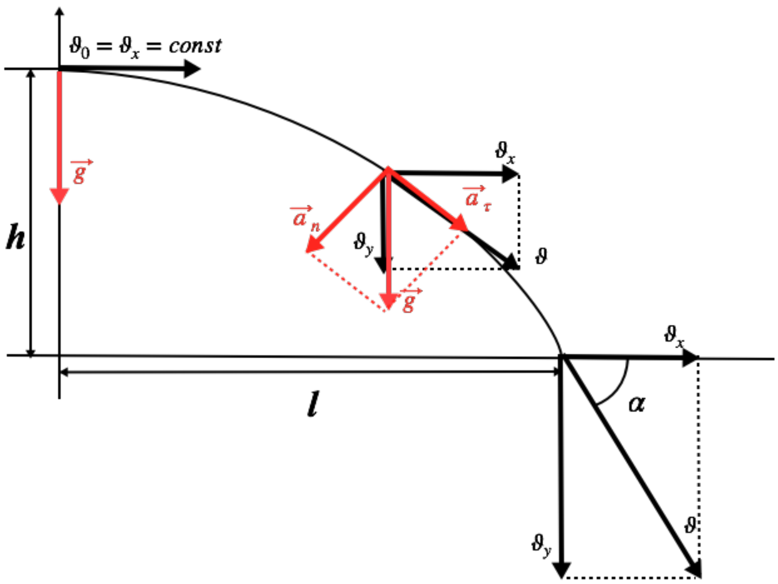


Рис. 2.11. Движение тела, брошенного горизонтально

2.5. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Пусть тело брошено под углом α к горизонту со скорость $\vec{\vartheta}_0$ (рис. 2.12).

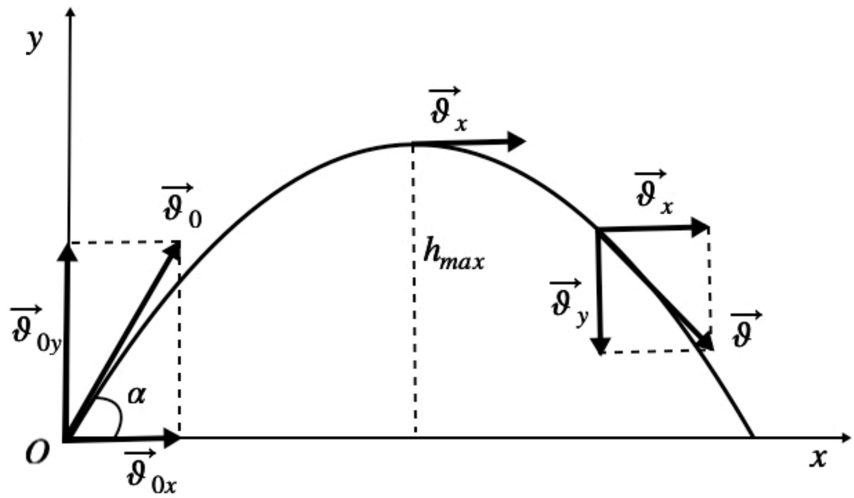


Рис. 2.12. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Проекции начальной скорости на оси OX и OY:

$$\vartheta_{0x} = \vartheta_0 \cos \alpha,$$
$$\vartheta_{0y} = \vartheta_0 \sin \alpha.$$

Тогда движение тела будет описываться уравнениями:

$$x = \vartheta_0 \cos \alpha t, \qquad \vartheta_x = \vartheta_0 \cos \alpha,$$
$$y = \vartheta_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}, \qquad \vartheta_y = \vartheta_0 \sin \alpha - gt.$$

Учитывая, что в верхней точке траектории $\vartheta_y = 0$, можно найти время подъема до верхней точки параболы:

$$0 = \vartheta_0 \sin \alpha - gt_{\text{П}} \Rightarrow \qquad t_{\text{П}} = \frac{\vartheta_0 \sin \alpha}{g}$$ – время подъема,

$$h_{max} = \frac{\vartheta_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$ – максимальная высота подъема тела.

Время полета тела

$$t_{\text{полета}} = 2t_{\text{П}} = \frac{2\vartheta_0 \sin \alpha}{g},$$

дальность полета тогда

$$l = \frac{\vartheta_0^2 \, sin\, 2\alpha}{g},$$

скорость в любой точке траектории

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}.$$

2.6. Вращение вокруг неподвижной оси

В зависимости от формы траектории можно выделить *прямолинейное* (движение вдоль одной прямой) и *криволинейное* движение точки (например, движение по окружности). Если речь идет о теле конечных размеров, говорят о поступательном и вращательном движении.

Поступательным называется движение тела при котором любая прямая, проходящая через любые точки тела, перемещается во время движения тела так, что остается параллельной самой себе (рис. 2.13). При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения.

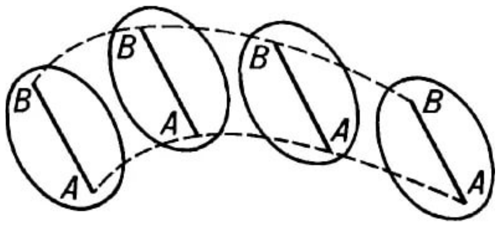


Рис. 2.13. Поступательное движение

Число степеней свободы твердого тела i – это число независимых координат, однозначно определяющих положение твердого тела в пространстве.

Вращательное движение – движение, при котором все точки абсолютно твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью вращения*. Окружности, по которым движутся точки тела, лежат в плоскостях, перпендикулярных этой оси.

Основными характеристиками вращательного движения являются:

Угловое перемещение $d\varphi$ (*или угол поворота радиус-вектора точки*) – вектор, модуль которого равен углу поворота, выраженному в радианах. Направлено угловое перемещение по оси вращения так, что если смотреть с конца вектора $d\varphi$, то направление вращения радиус-вектора происходит против часовой стрелки (рис. 2.14).

Угловая скорость (ω) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту вращения и равная первой производной углового перемещения по времени:

$$\overrightarrow{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} = \dot{\overrightarrow{\varphi}}, \qquad (9)$$

$[\omega] = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Направление вектора угловой скорости $\overrightarrow{\omega}$ совпадает с направлением вектора углового перемещения $d\overrightarrow{\varphi}$.

Изменение вектора $\overrightarrow{\omega}$ со временем характеризуют вектором углового ускорения $\overrightarrow{\varepsilon}$:

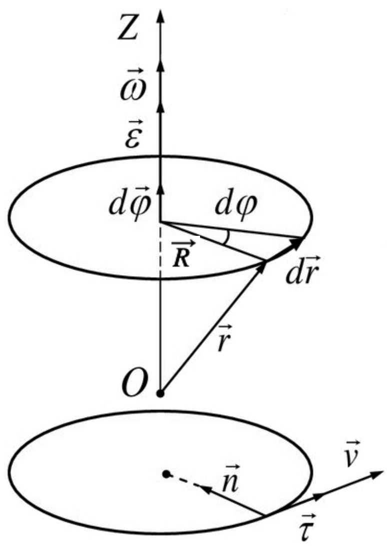


Рис. 2.14. Вращательное движение тела

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt} = \dot{\overrightarrow{\omega}}, \qquad (10)$$

$[\varepsilon] = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$.

Направление вектора углового ускорения $\overrightarrow{\varepsilon}$ совпадает с направлением $d\overrightarrow{\omega}$ – приращения вектора $\overrightarrow{\omega}$.

Из формул (9) и (10) можно получить кинематический закон изменения угловой скорости и углового перемещения. Пусть в момент времени $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_z = \omega_0$ и $\varphi = \varphi_0$, тогда

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon_z(t)dt, \;\; \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z(t)dt. \qquad (11)$$

При равноускоренном вращательном движении ($\varepsilon = const$) из формул (11), получим

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t, \;\; \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кроме угловой скорости и углового ускорения имеется ряд величин, которыми удобно характеризовать вращательное движение.

Период вращения (Т) – время за которое тело (точка) совершает один полный оборот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{12}$$

$[T] = 1c.$

Частота вращения (ν) – число полных оборотов, совершаемых телом при его равномерном вращении по окружности за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \tag{13}$$

$[\nu] = 1c^{-1} = 1$Гц.

2.7. Связь между угловыми и линейными скоростями и ускорениями

Найдем линейную скорость тела (размеры которого достаточно малы для того, чтобы можно было считать его точечным), движущегося по окружности. Положение тела относительно некоторой точки O (рис. 2.14) оси вращения характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$. Очевидно, что

$$d\vec{r} = [d\overrightarrow{\varphi}, \vec{r}],$$

разделим данное выражение на dt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = [\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt}, \vec{r}],$$

учтем, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{\vartheta}, \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} = \overrightarrow{\omega},$$

тогда

$$\overrightarrow{\vartheta} = [\overrightarrow{\omega}, \vec{r}],$$

т. е. линейная скорость $\overrightarrow{\vartheta}$ точки твердого тела равна векторному произведению угловой скорости $\overrightarrow{\omega}$ на радиус-вектор $\vec{r}$. Модуль вектора скорости тела, движущегося по окружности:

$$\vartheta = \omega R. \tag{14}$$

При криволинейном движении вектор скорости $\overrightarrow{\vartheta}$ изменяет свое направление. При этом может изменяться и его численное значение, т. е. модуль. В этом случае вектор ускорения $\overrightarrow{a}$ удобно раскладывать на две составляющие. Одна из них $\overrightarrow{a}_\tau$ – касательная к траектории (тангенциальное ускорение), вторая – $\overrightarrow{a}_n$, перпендикулярна этой касательной (нормальное или центростремительное ускорение) (рис. 2.15).

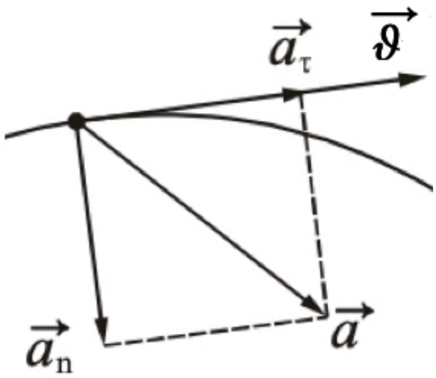


Рис. 2.15. Проекции ускорения

Продифференцируем выражение $\overrightarrow{\vartheta} = [\overrightarrow{\omega}, \vec{r}\,]$ по времени:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d[\overrightarrow{\omega}, \vec{r}\,]}{dt} = [\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}, \vec{r}\,] + [\overrightarrow{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}] = [\overrightarrow{\varepsilon}, \vec{r}\,] + [\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\vartheta}\,] =$$
$$= [\overrightarrow{\varepsilon}, \vec{r}\,] + [\overrightarrow{\omega}, [\omega, \vec{r}\,]], \qquad (15)$$

где

$$[\overrightarrow{\varepsilon}, \vec{r}\,] = \overrightarrow{a}_\tau,\ [\overrightarrow{\omega}, [\omega, \vec{r}\,]] = \overrightarrow{a}_n.$$

Как следует из формулы (15)

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_\tau + \overrightarrow{a}_n.$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где

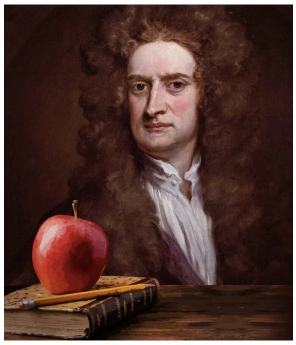
$$a_n = \frac{\vartheta^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R, a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R.$$

Если тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, то $a_\tau = 0$. Если абсолютное значение вектора скорости тела увеличивается, то ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено по вектору скорости, если же скорость тела уменьшается, то ускорение $\vec{a}_\tau$ направлено противоположно вектору скорости.

Вопросы

1. Что такое система отсчета? Тело отсчета?
2. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
3. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
4. Какое движение называется поступательным? Вращательным?
5. Дайте определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?
6. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?
7. Что называется угловой скоростью? Угловым ускорением? Как определяются их направления?
8. Какова связь между линейными и угловыми кинематическими параметрами?
9. Что такое период и частота вращения?

3. ДИНАМИКА



Исаак Ньютон
(1642–1727)

Изучая кинематику, нашей основной задачей было определить положение, скорость и ускорение точки. Однако, обсуждался ли вопрос о том, что заставляет объекты двигаться? Из нашей повседневной жизни мы знаем, что для приведения объектов в движение необходимо воздействие из вне – силы.

Изучением влияния сил занималось множество ученых, однако основоположником классической динамики является английский ученый Исаак Ньютон. Опираясь на результаты Галилея, Ньютон смог заложить основы современной науки о механике в своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687). Ньютоновская механика считалась абсолютной истиной около 200 лет. Примерно в 1900-х годах было обнаружено, что эти законы дают неправильные результаты как для частиц атомного масштаба, так и для частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Позже были разработаны две современные теории: одна для микроскопических масштабов (квантовая механика), а другая для больших скоростей (релятивистская механика). Однако ньютоновская механика продолжает оставаться актуальной для макроскопических объектов.

Динамика – раздел механики, который изучает взаимодействия тел, причины возникновения движения и тип возникающего движения.

Взаимодействие – процесс, в ходе которого тела оказывают взаимное действие друг на друга. В физике все взаимодействия обязательно парные. Это значит, что тела взаимодействуют друг с другом парами. То есть *всякое действие обязательно порождает противодействие.*

3.1. Законы Ньютона

Ньютоновская механика базируется на трех законах, которые были сформулированы как обобщение большого количества опытных фактов. Законы Ньютона являются основными законами механики и позволяют решить любую механическую задачу.

Сила $\vec{F}$ – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение, меняет форму и размеры. Сила полностью задана, если известны ее модуль, направление и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. Сила характеризуется тремя параметрами: точкой приложения, модулем (численным значением) и направлением. Силы делят на внутренние и внешние. *Внутренние силы* – это силы, с которыми взаимодействуют части одной системы (тела). Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, называются *внешними силами*.

В Международной системе единиц (СИ) сила измеряется в Ньютонах (Н).

$$1\text{Н} = 1\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Для измерения сил используют откалиброванные пружины. Такие откалиброванные пружины называются *динамометрами*. Сила измеряется по растяжению динамометра.

Сила, оказывающая на тело такое же действие, как и все силы, действующие на него, вместе взятые, называется *равнодействующей силой*. Она равна векторной сумма всех сил, действующих на тело:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \ldots. + \overrightarrow{F}_N. \tag{16}$$

Чтобы найти векторную сумму нескольких сил нужно выполнить чертеж, где правильно нарисовать все силы и их векторную сумму, и по данному чертежу с использованием знаний из геометрии (в основном это теорема Пифагора и теорема косинусов) найти длину результирующего вектора.

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых поступательно движущееся тело сохраняет свою скорость постоянной или находится в покое, если на него не действуют другие тела (или их действие компенсируется):

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i = 0, \overrightarrow{\vartheta} = const; \overrightarrow{a} = 0.$$

Таким образом, первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета. Если тело находится в покое, то равнодействующая сил равна нулю. Системы отсчета, движущиеся с постоянной скоростью относительно инерциальных систем отсчета, также являются инерциальными.

Масса – скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности точки (тела) при поступательном движении. Масса также является мерой количества вещества:

$$m = \rho V. \tag{17}$$

Плотность (ρ) – скалярная физическая величина, характеристика материала, численно равная массе единицы объема,

$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

Свойства массы:

1. Масса тела не зависит от скорости его движения.

2. Масса тела равна сумме масс всех частиц (или материальных точек), из которых оно состоит (свойство аддитивности).

3. Не зависит от выбора системы отсчета (свойство инвариантности).

Система тел, взаимодействующих только между собой, называется *замкнутой*. Рассмотрим замкнутую систему тел массами m_1 и m_2 (рис. 3.1).

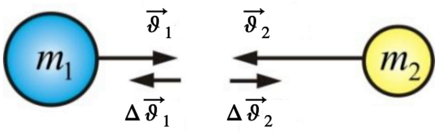


Рис. 3.1. Замкнутая система тел массами m_1 и m_2, сталкивающихся друг с другом со скоростями $\vec{\vartheta}_1$ и $\vec{\vartheta}_2$

Столкнем эти два тела. Опыт показывает, что приращенные скорости $\Delta\vec{\vartheta}_1$ и $\Delta\vec{\vartheta}_2$ всегда имеют противоположное направление, а модули приращений скорости относятся как

$$\frac{|\Delta\vec{\vartheta}_1|}{|\Delta\vec{\vartheta}_2|} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (18)$$

(тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость).

Приняв во внимание направление скоростей, запишем:

$$m_1\Delta\vec{\vartheta}_1 = -\,m_2\Delta\vec{\vartheta}_2.$$

При $\vartheta \ll c$, масса $m = const$ (ньютоновская, классическая механика), имеем

$$\Delta(m_1\vec{\vartheta}_1) = -\,\Delta(m_2\vec{\vartheta}_2).$$

Произведение массы тела m на скорость $\vec{\vartheta}$ называется *импульсом тела* $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{\vartheta}. \qquad (19)$$

Второй закон Ньютона: ускорение, приобретаемое телом в инерциальной системе отсчета, прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе этого тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (20)$$

Второй закон Ньютона можно получить в более общем виде:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d(m\vec{\vartheta})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Основной закон динамики материальной точки: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей силе

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{21}$$

Найдем изменение импульса тела за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$m\vec{\vartheta}_2 - m\vec{\vartheta}_1 = \vec{F}\Delta t,$$

или

$$\Delta(m\vec{\vartheta}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt, \tag{22}$$

т. е. изменение импульса тела равно импульсу силы.

Из второго закона Ньютона следует, что сила определяет направление ускорения, а не направление скорости.

Опыт показывает, что действие тел друг на друга является двусторонним. Нельзя обнаружить такого случая, чтобы какое-то тело действовало на другое тело и не испытывало бы при этом ответного действия.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми взаимодействуют два тела, одной природы, равны по модулю, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и приложены к разным телам:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{23}$$

Следует иметь в виду, что третий закон справедлив независимо от того, покоятся ли взаимодействующие тела или же они движутся, находятся они в непосредственном контакте друг с другом или разделены пространством.

Из (23) можно получить, что

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0,$$

что подтверждает справедливость закона сохранения импульса в инерциальных системах отсчета.

В любой системе частиц имеется точка C, называемая *центром инерции*, или *центром масс*, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение этой точки характеризует распределение масс этой системы. Радиус-вектор точки C (рис. 3.2) простой системы двух частиц, массами m_1 и m_2, можно найти по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (24)$$

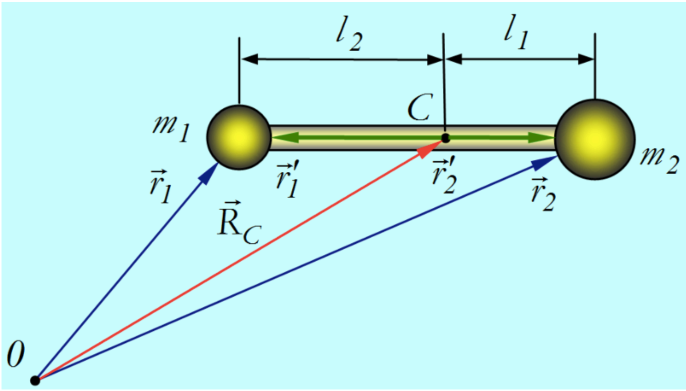


Рис. 3.2. Центр масс системы состоящей из двух тел массами m_1 и m_2

В общем случае положение радиус-вектор центра масс системы, состоящей из n материальных точек, можно найти по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i.$$

При этом не надо путать центр масс с центром тяжести системы – с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы. Кроме того центр масс вовсе не обязательно находится в самом теле.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если $\vec{g}$ (ускорение свободного падения) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

Скорость центра инерции системы $\vec{\vartheta}_c$ равна:

$$\vec{\vartheta}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\vartheta}_i. \qquad (25)$$

Отсюда импульс системы

$$\vec{p} = m\vec{\vartheta}_c.$$

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции. Центр масс замкнутой системы движется всегда с постоянной скоростью, поскольку импульс такой системы сохраняется. Если продифференцировать теперь (25) по времени и учесть, что производная импульса системы есть равнодействующая внешних сил, то получим уравнение движения центра масс системы в общем случае:

$$m\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{26}$$

Видно, что центр масс системы движется точно так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всех частиц системы, под действием суммы всех внешних сил, приложенных к системе.

3.2. Принцип относительности Галилея

Принцип относительности Галилея: все инерциальные системы отсчета (ИСО) по своим физическим свойствам эквивалентны, т. е. никакими механическими опытами, проводимыми внутри ИСО, нельзя установить, покоится ли эта система отсчета или движется равномерно и прямолинейно.

Это означает что, если в различных инерциальных системах отсчета проводить один и тот же механический эксперимент при одинаковых начальных условиях, то результат будет один и тот же.

Принцип относительности утверждает, что все законы механики (природы) инвариантны во всех ИСО. Рассмотрим две ИСО: K и $K^{/}$, изображенные на рис. 3.3.

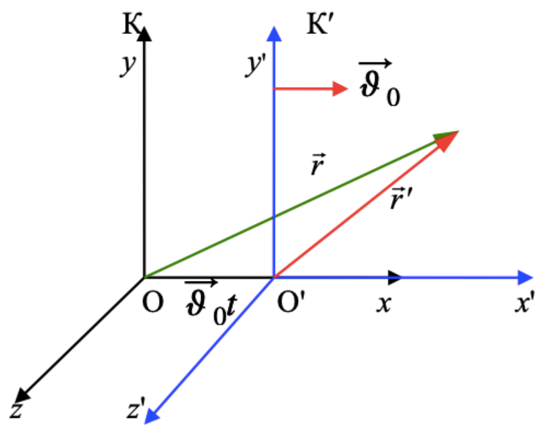


Рис. 3.3. Две ИСО K и $K^{/}$, $K^{/}$ движется относительно K

В каждой системе отсчета имеются свои тела отсчета в точках O и $O^{/}$ и свои часы. Любое событие с точки зрения наблюдателя из K системы характеризуется координатами и временем, пусть они равны (x, y, z, t). Пусть с точки зрения наблюдателя из $K^{/}$ системы эти величины равны «штрихованным» координатам $(x^{/}, y^{/}, z^{/}, t^{/})$. Найдем связь между «штрихованными» и «нештрихованными» координатами и временем. Рассмотрим преобразование координат и времени события при переходе от системы K к $K^{/}$, если скорость системы $K^{/}$ равна $\overrightarrow{\vartheta}_0$ и направлена вдоль OX:

$$x = x^{/} + \vartheta_0 t^{/}; y = y^{/}; z = z^{/}; t = t^{/}.$$

В общем виде формулу преобразования координат, при переходе от системы $K^{/}$ к системе K, можно записать в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}^{/} + \overrightarrow{\vartheta}_0 t^{/}. \tag{27}$$

Обратный переход от системы K к системе $K^{/}$ записывается

$$\vec{r}^{/} = \vec{r} - \overrightarrow{\vartheta}_0 t. \tag{28}$$

Согласно принципу относительности Галилея, все механические явления в ИСО K и $K^{/}$ происходят одинаково. Значит движения тел отсчета в точках O и $O^{/}$ друг относительно друга происходят с одной и той же скоростью в обеих K и $K^{/}$ системах.

Сравнивая (27) и (28), видим, что $t = t^{/}$, т. е. время «течет» одинаково во всех ИСО – время инвариантно во всех ИСО. Продифференцируем радиус-вектор материальной точки по времени t в системе K и по времени $t^{/}$ в системе $K^{/}$:

$$\overrightarrow{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \ \overrightarrow{V}^{/} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}^{/}}{\Delta t^{/}} = \frac{d\vec{r}^{/}}{dt^{/}}. \tag{29}$$

Учтем это в преобразованиях (27) и (28), тогда получим:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}^{/} + \overrightarrow{\vartheta}_0, \overrightarrow{V}^{/} = \overrightarrow{V} - \overrightarrow{\vartheta}_0. \tag{30}$$

Получим преобразования для ускорений

$$\overrightarrow{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta} V}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{d} V}{dt}, \ \overrightarrow{a}^{/} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{V}^{/}}{\Delta t^{/}} = \frac{d\overrightarrow{V}^{/}}{dt^{/}}.$$

Дифференцируя (30) получим, что $a = a^{/}$ – ускорение инвариантно относительной перехода от системы K к $K^{/}$.

Вопросы

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Неинерциальной?
2. Почему система отсчета, связанная с Землей, неинерциальная?
3. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
4. Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?
5. В чем физическая сущность первого закона Ньютона?

3.3. Виды взаимодействий

Согласно современным представлениям, все явления, протекающие во вселенной, обусловлены четырьмя типами сил или взаимодействий:

– гравитационные (проявляются в виде сил всемирного тяготения);

– электромагнитные (обусловливают существование атомов, молекул и макротел);

– сильные (ответственны за связь частиц в ядрах);

– слабые (ответственны за распад частиц).

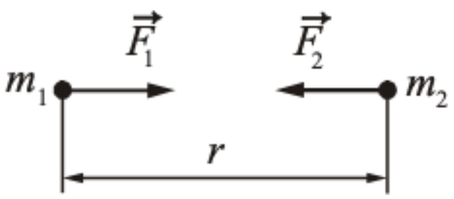
В рамках данного курса рассмотрим первые два из них.

1. *Гравитационное взаимодействие.*

Закон всемирного тяготения: две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (рис. 3.4)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{31}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\dfrac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравитационная постоянная.



$$|\vec{F}_{1\text{-}2}| = |\vec{F}_{2\text{-}1}| = F$$

Рис. 3.4. Гравитационно взаимодействие тел

Если одно из взаимодействующих тел – Земля, а тело массой m находится на высоте h от поверхности Земли, то закон всемирного тяготения записывается в виде

$$F = G\frac{Mm}{(R_{\text{Земли}} + h)^2}.$$

Если тело находится у поверхности Земли $h = 0$, тогда

$$F = G\frac{Mm}{R_{\text{Земли}}^2},$$

величина

$$G\frac{M}{R_{\text{Земли}}^2} = g$$

есть ускорение свободного падения. Отсюда величину

$$gm = F_g$$

называют силой тяжести.

Весом тела называется сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести, созданном небесным телом, например, Землей, *действует на опору или подвес*, препятствующие свободному падению тела. В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно некоторой инерциальной системы отсчета, вес тела по величине и направлению совпадает с силой тяжести.

Гравитационное взаимодействие − самое слабое из четырех фундаментальных взаимодействий. Величина $G^{1/2} \cdot m$ называется *гравитационным зарядом*. Гравитационный заряд пропорционален массе тела. Поэтому для нерелятивистского случая, согласно закону Ньютона, ускорение, вызываемое силой гравитационного взаимодействия F_g, не зависит от массы ускоряемого тела. Это утверждение составляет *принцип эквивалентности*.

Фундаментальное свойство гравитационного поля состоит в том, что оно определяет геометрию пространства-времени, в котором движется материя. По современным представлениям, взаимодействие между частицами происходит путем обмена между ними частицами – переносчиками взаимодействия. Считается, что переносчиком гравитационного взаимодействия является гравитон. Экспериментально гравитон не обнаружен. Квантовая теория гравитации пока не создана.

2. *Электромагнитное взаимодействие* – одно из фундаментальных взаимодействий, обусловленное электромагнитным полем. Частными случаями проявления электромагнитных взаимодействий являются силы упругости и силы трения. Для этих сил можно получить лишь приближенные, т. е. основанные на опыте, формулы.

Роберт Гук
(1635–1703)

Под действием внешних сил возникают деформации (т. е. изменение размеров и формы тел). *Упругая деформация* – деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил – тело полностью восстанавливает прежнюю форму и размер.

Для упругих деформаций справедлив *закон Гука*: сила упругости пропорциональна абсолютному удлинению:

$$F_x = -k\Delta x, \tag{32}$$

где F_x – проекция силы упругости на OX;

k – жесткость пружины;

Δx – абсолютное удлинение пружины.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется нормальным напряжением:

$$\sigma = \frac{F_\perp}{S},$$

где $F_\perp$ – сила, перпендикулярная к площадке (сечению), на которую она действует;

S – площадь поперечного сечения, например, стержня.

Для однородных стержней Р. Гук, экспериментально установил, что *механическое напряжение прямо пропорционально относительному удлинению*:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – Модуль Юнга (модуль упругих деформаций) – это физическая величина, характеризующая упругие свойства материала. Зависит от природы материала, $[E] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$;

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – относительное удлинение, где Δl – абсолютное удлинение, l_0 – первоначальная длина.

На рис. 3.5 показан график зависимости нормального напряжения $\sigma = \frac{F_\perp}{S}$ от относительного удлинения ε при растяжении тела.

В области *0–1* упругие деформации подчиняются закону Гука: напряжение $\sigma_\text{П}$ (предел пропорциональности), возникающее под действие внешних сил, прямо пропорционально относительной деформации ε:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\Delta l}{l_0}.$$

Максимальное напряжение, после снятия которого тело еще способно восстановить первоначальную форму и объем, называется *пределом упругости* $\sigma_{\text{у}}$ (точка *2*).

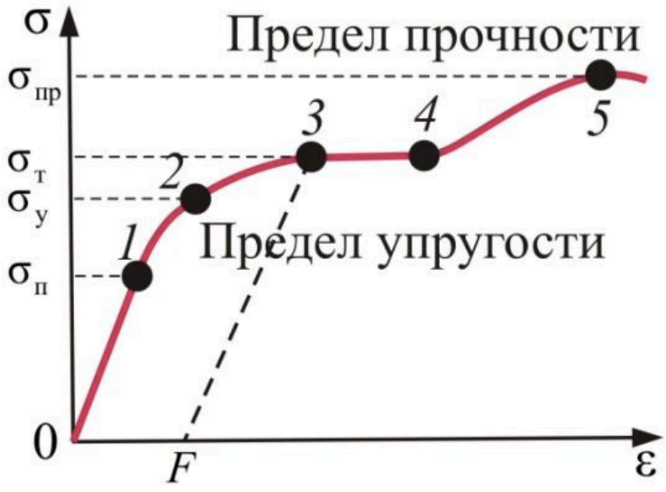


Рис. 3.5. График зависимости нормального напряжения от относительного удлинения

При дальнейшем увеличении напряжения возникают остаточные деформации (участок *2–3*). За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации, и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, будет представлен параллельной прямой $3F$. Затем удлинение деформированного тела происходит без увеличения внешней нагрузки (участок *3–4*). Точка *3* на графике соответствует пределу текучести $\sigma_{\text{Т}}$.

Наибольшее напряжение, которое выдерживает тело, не разрушаясь, называется пределом прочности $\sigma_{\text{пр}}$ (точка *5*). На практике, чтобы избежать разрушения какой-либо детали, ее проектируют с запасом прочности:

$$\frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{доп}}} = n,$$

где $\sigma_{\text{доп}}$ – допустимое напряжение.

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от многих факторов. Например, при кратковременном действии сил твердое тело может проявить себя как хрупкое, а при длительном воздействии слабых сил является текучим.

Некоторые японские производители получают углеродное волокно, способное выдерживать напряжение $\sigma_{\text{пр}}$ до $12 \cdot 10^{11}$ Па. Основное применение таких материалов – устройства для отвода тепла в авиационной и космической технике. Алмаз выдерживает напряжение $\sigma_{\text{пр}} = 0{,}79 \cdot 10^{11}$ Па при деформации растяжения, сталь 60С2А – $\sigma_{\text{пр}} = 1{,}6 \cdot 10^{9}$ Па, сталь Ст0 – $\sigma_{\text{пр}} = 0{,}3 \cdot 10^{9}$ Па.

3.4. Силы трения

Силой трения называют силу, которая возникает при движении одного тела по поверхности другого. Она всегда направлена противоположно направлению движения (рис. 3.6).

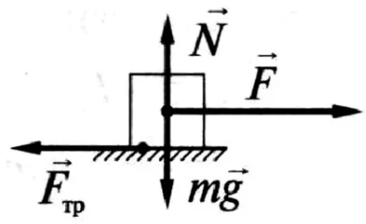


Рис. 3.6. Направление, действующих сил

Внешним трением называется взаимодействие между различными соприкасающимися телами, препятствующее их относительному перемещению. Если трение проявляется между частями одного и того же тела, то оно называется *внутренним трением.*

Трение между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется *жидким* или *вязким трением.* Трение между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел, при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки, называется *сухим трением*.

Типы сухого трения:

1. Трение покоя – трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел; препятствует возникновению движения одного тела по поверхности другого:

$$|\vec{F}_{\text{тр пок}_{max}}| = \mu_0 |\vec{N}|,$$

где μ_0 – коэффициент трения покоя.

2. Трение скольжения – трение, которое возникает при скольжении данного тела по поверхности другого тела и выражается как

$$|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu |\vec{N}|, \tag{33}$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей (в том числе от их шероховатости) и не зависящий от площади соприкосновения;

$\vec{N}$ – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Трение качения возникает между шарообразным или цилиндрическим телами и поверхностью, по которой они катятся. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{\mu N}{R},$$

где R – радиус катящегося тела.

Вязкое трение: на тело, движущееся в вязкой (жидкой или газообразной) среде, действует сила, тормозящая его движение. Эта сила называется *силой вязкого трения*

$$F = -\, r\vartheta,$$

где ϑ – скорость движения тела;

r – коэффициент сопротивления.

Коэффициент r зависит от формы и размеров тела, характера его поверхности, а также от свойств среды. Знак «–» указывает на то, что сила трения направлена противоположно скорости.

Закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости или газа:

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность жидкости или газа, в которое погружено тело;

V – объем погруженной части тела.

Вопросы

1. Какие типы сил (взаимодействий) вы знаете?
2. Чем характеризуется сила в каждый момент времени?
3. Что такое вес тела? В чем отличие веса тела от силы тяжести?
4. Сформулируйте закон Гука для пружины и для стержня.
5. Что такое модуль Юнга? Коэффициент Пуассона?
6. Каков физический смысл модуля Юнга?
7. Дайте объяснение диаграммы напряжений. Что такое переделы пропорциональности, упругости и прочности?
8. Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого?
9. Какие виды внешнего (сухого) трения вы знаете?

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

4.1. Закон сохранения импульса

Система называется *замкнутой*, если на нее не действуют внешние силы.

Запишем основное уравнение динамики:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}; \tag{34}$$

$$\vec{p} = m\vec{\vartheta} \Rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}dt,$$

где $\int_0^t \vec{F}dt$ – импульс силы.

Очевидно, что приращение импульса частицы за любой промежуток времени зависит не только от значения силы, но и от продолжительности ее действия.

Второй закон Ньютона, записанный для одного тела, можно применить и к системе тел. Импульс системы частиц есть векторная сумма импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i,$$

где $\vec{p}_i$ – импульс i-й частицы.

Приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответсвующий промежуток времени:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}_{\text{внеш}}dt.$$

Если система является замкнутой (внешних сил нет) $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$, то

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0 \Rightarrow \vec{p}_2 = \vec{p}_1.$$

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени, т. е. остается постоянным

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = const.$$

При этом импульсы отдельных частиц или частей замкнутой системы могут меняться со временем. Закон сохранения импульса выполняется и для незамкнутый систем в следующих частных случаях:

1. На систему действуют внешние силы, но их векторная сумма равна нулю.

2. Векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций этих сил на какое-либо направление, например, на направление оси *OX*. Полный импульс системы при этом не сохраняется, но сохраняется проекция импульса на направление оси *OX*.

3. Время действия сил очень мало. При этом изменение импульса $d\vec{p} \to 0$. Примером является взаимодействие тел при ударе, взрыве.

4.2. Энергия, работа, мощность

Энергия – это единая мера всех форм движения материи и типов взаимодействия материальных объектов. *Работа* является мерой превращения одного вида энергии в другой. Поэтому энергия и работа имеют одну размерность. В зависимости от формы движения, рассматривают различные виды энергии: механическую, внутреннюю, электромагнитную, ядерную. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетическая энергия (или энергия движения) – часть механической энергии, которая определяется массой и скоростью материальной точки (тела):

$$W_k = \frac{m\vartheta^2}{2}.$$

Кинетическая энергия скалярная величина, является функцией состояния системы. Она всегда положительна. В разных инерциальных системах отсчета кинетическая энергия неодинакова.

Пусть под действием силы $\vec{F}$ (в общем случае может быть переменной) частица совершает перемещение вдоль траектории *1–2*. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной. Действие силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ характеризуют величиной, равной скалярному произведению $\vec{F}d\vec{r}$, которую называют элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$:

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = (F\cos\alpha)dS = F_s dS, \qquad (35)$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$;

$dS = |d\vec{r}|$ – элементарный путь;

F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Проинтегрируем выражение (35):

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_s dS.$$

В случае прямолинейного движения тела под действием силы $\vec{F}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, работа этой силы равна

$$A = FS\cos\alpha,$$

$[A] =$ Н · м $=$ Дж.

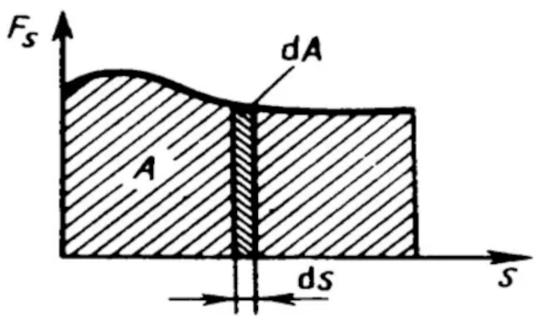


Рис. 4.1. Работа силы F_s

Если известна зависимость проекции силы на направление перемещения F_s, тогда очевидно, что совершенная работа может быть найдена как площадь фигуры под графиком (рис. 4.1)

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 F_s dS.$$

Мощность – это работа, совершаемая силой за единицу времени, характеризует скорость совершения работы:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = (\vec{F}, \vec{\vartheta}), \tag{36}$$

$[P] = \frac{\text{Дж}}{c}.$

Зная мощность силы $\vec{F}$, можно найти работу, которую совершает эта сила за промежуток времени t:

$$A = \int_0^t P dt.$$

Можно показать что элементарная работа силы $\vec{F}$ идет на приращение некоторой величины, а именно кинетической энергии:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = m\vec{a} d\vec{r} = m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} d\vec{r} = m\vec{\vartheta} d\vec{\vartheta},$$
$$\delta A = m\vec{\vartheta} d\vec{\vartheta} = d(m\vartheta^2/2) = dE_k.$$

Теорема о кинетической энергии: изменение кинетической энергии частицы при ее переходе из одного положения в другое равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении:

$$W_{k2} - W_{k1} = A_{12}. \tag{37}$$

Консервативной называют силу, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависит от формы и длины пути (от траектории точки приложения силы).

Консервативные силы действуют на тело (материальную точку) в потенциальных стационарных полях. Стационарное поле будет потенциальным, если работа по любому замкнутому пути в этом поле будет равна нулю:

$$A = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0. \tag{38}$$

Неконсервативные силы – это силы, работа которых зависит от формы траектории. При перемещении материальной точки или тела по замкнутой траектории работа неконсервативной силы не равна нулю. К неконсервативным силам относятся силы трения и сопротивления. Они называются *диссипативными силами*. Суммарная работа всех внутренних диссипативных сил системы всегда отрицательна.

4.3. Основные характеристики динамики вращательного движения

Рассмотрим материальную точку массой m_i, которая находится на расстоянии r_i от неподвижной оси (рис. 4.2).

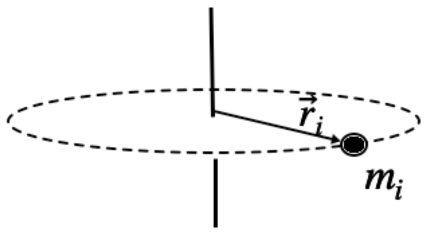


Рис. 4.2. Материальная точка массой m_i на расстоянии $\vec{r}_i$ от неподвижной оси

Моментом инерции (J) материальной точки относительно оси называется скалярная физическая величина, равная произведению массы m_i на квадрат расстояния r_i до этой оси:

$$J_i = m_i r_i^2. \tag{39}$$

Момент инерции системы материальных точек будет равен сумме моментов инерции отдельных точек:

$$J = \sum_i^N J_i = \sum_i^N m_i r_i^2.$$

В случае сплошного тела, масса которого непрерывно распределена по его объему, момент его инерции может быть найден следующим образом:

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV, \qquad (40)$$

где r – расстояние элементарной массы dm до оси вращения;

dm – масса малого элемента тела объема dV;

ρ – плотность вещества тела;

$[J] = $ кг · м^2.

Момент инерции – это мера инертных свойств твердого тела при вращательном движении, зависящая от распределения массы относительно оси вращения, и является величиной аддитивной.

В качестве примера выведем формулу для момента инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости диска. Для этого вырежем в диске обруч массой dm, радиусом r и толщиной dr (рис. 4.3).

Для нахождения момента инерции воспользуемся (40)

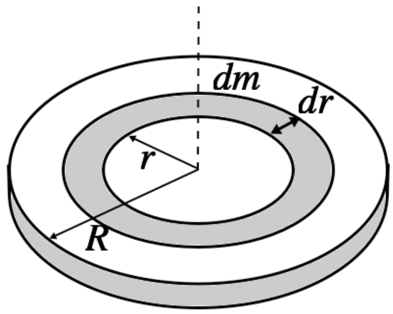


Рис. 4.3. Диск с выделенным в нем обручем

$$J = \int r^2 dm, \quad dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr \Rightarrow$$

$$J = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{V} h \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2 h} h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2 .$$

Можно найти моменты инерции и других тел. В табл. 4.1 приведены некоторые из них.

Таблица 4.1

Момент инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс

Пример тела правильной формы	Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс	Пример тела правильной формы	Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс
Диск	$J = \frac{1}{2} m R^2$	Стержень	$J = \frac{1}{12} m l^2$
Шар	$J = \frac{2}{5} m R^2$	Обруч	$J = m R^2$

Момент инерции тела относительно произвольной оси рассчитывается с помощью *теоремы Штейнера*: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$J = J_c + md^2. \tag{41}$$

Пример. Рассчитаем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня и перпендикулярно ему (рис. 4.4).

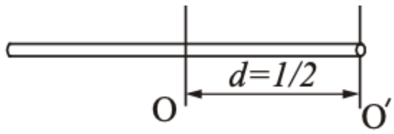


Рис. 4.4. Визуализация к примеру

$$J_{O'} = J_O + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции. Аналогично массе тела, момент инерции является величиной аддитивной.

Энергия, которой обладает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела, называется *кинетической энергией вращательного движения* этого тела. Эта энергия складывается из кинетических энергий материальных точек, составляющих тело, и определяется соотношением

$$W_k^{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Для вращательного движения также справедлива теорема об изменении кинетической энергии

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

При плоском движении тело участвует в двух движениях: поступательном и вращательном. В этом случае полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений и рассчитывается по формуле

$$W_k = W_k^{\text{пост}} + W_k^{\text{вр}} = \frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где ϑ – скорость движения центра масс;

ω – угловая скорость относительно оси, проходящей через центр масс.

Потенциальная энергия – это та часть механической энергии, которая зависит от взаимного расположения тел или частей тела, а также от природы сил, действующих между телами.

Работу консервативной силы можно представить как изменение (убыль) некоторой скалярной функции W_p, зависящей только от положения частицы (тела), которая называется потенциальной энергией частицы:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = -\, dW_p,$$

тогда работа сил поля при перемещении частицы из точки *1* в точку *2* может быть представлена как убыль потенциальной энергии dW_p частицы в данном поле:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\,(W_{p2} - W_{p1}). \tag{42}$$

Из формулы (42) следует, что потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Поскольку в физических явлениях природы рассматривается не сама величина потенциальной энергии, а только ее изменение, то роль константы несущественна. Начало отсчета потенциальной энергии ($W_p = 0$) выбирается из соображений удобства.

В курсе механики рассматривают следующие виды потенциальной энергии:

1. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины равна работе, совершенной над пружиной. Так как сила не постоянна, элементарная работа $dA = Fdx$, или $dA = -\,kxdx$.

Тогда полная работа, которая совершена пружиной, равна

$$A = \int dA = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Сравнивая с (42), очевидно, что

$$W_p = \frac{kx^2}{2},$$

где k – жесткость пружины (коэффициент жесткости);

x – абсолютное удлинение пружины (величина деформации).

2. Потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести Земли. Материальная точка (тело) массой m, находящееся на высоте h над поверхностью Земли, обладает потенциальной энергией $W_p = mgh$.

При перемещении тела в поле силы тяжести, силой тяжести совершается работа:

$$A = \vec{F}\Delta\vec{r} = mg\Delta r cos\alpha = mg(h_1 - h_2) = -\,mg(h_2 - h_1).$$

Работа силы тяжести не зависит от формы траектории, по которой движется тело, и определяется лишь начальным и конечным положением тела. При движении тела по замкнутой траектории работа силы тяжести равна нулю. Сила тяжести – консервативная сила.

4.4. Закон сохранения механической энергии

Материальная точка (тело) может одновременно обладать и кинетической, и потенциальной энергией. Сумма кинетической и потенциальной энергий точки называется ее *полной механической энергией*:

$$W = W_k + W_p.$$

Закон сохранения механической энергии системы: механическая энергия замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется, то есть не изменяется со временем. Может происходить лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем приращение одной из них в точности равно убыли другой.

Действие неконсервативных сил (например, сил трения) уменьшает механическую энергию системы. Такой процесс называется *диссипацией* энергии («диссипация» означает «рассеяние»). Силы, приводящие к диссипации энергии, называются *диссипативными*. При диссипации энергии механическая энергия системы преобразуется в другие виды энергии (например, во внутреннюю энергию). Преобразование идет в соответствии со всеобщим законом природы, а именно, *законом сохранения энергии*, который применим ко всем без исключения процессам в природе: энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой.

Сформулируем закон изменения полной механической энергии системы. Пусть система материальных точек (тел) не является замкнутой. На материальные точки, кроме внутренних консервативных сил, действуют любые другие силы, которые будем называть *сторонними*. Отнесем к сторонним силам все внешние силы (действующие со стороны тел не входящих в систему), а также все диссипативные силы (трения, сопротивления), как внутренние, так и внешние. Таким образом, сторонними силами будем называть все силы, кроме внутренних консервативных сил.

Если система материальных точек перешла из произвольного начального положения *1* в произвольное конечное положение *2*, то, согласно теореме о кинетической энергии, работа всех приложенных к материальным точкам сил равна приращению их кинетических энергий. И следовательно, работа всех сил действующих на систему и внутри системы равна приращению кинетической энергии системы материальных точек:

$$A_{12} = W_{k2} - W_{k1}, \tag{43}$$

где W_{k2} и W_{k1} – кинетические энергии системы материальных точек в конечном и начальном состояниях, соответственно.

Представим работу A_{12} как сумму работы $A_{12\text{конс}}$ консервативных внутренних сил и работы $A_{12\text{стор}}$ всех сторонник сил:

$$A_{12} = A_{12\text{конс}} + A_{12\text{стор}}. \tag{44}$$

Учтем, что $A_{12\text{конс}} = W_{p1} - W_{p2}$ и выражения (43) и (44), получим

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} + A_{12\text{стор}} \Rightarrow$$
$$A_{12\text{стор}} = (W_{k2} + W_{p2}) - (W_{k1} + W_{p1}) = W_2 - W_1,$$

где W_2 и W_1 полная механическая энергия системы материальных точек в положениях *2* и *1* соответсвенно.

Таким образом, работа сторонних сил $A_{12\text{стор}}$ при переходе системы материальных точек (тел) из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии системы:

$$A_{12\text{стор}} = W_2 - W_1.$$

Если в замкнутой системе, кроме консервативных сил, действуют еще диссипативные силы, например, сила трения, то полная механическая энергия не сохраняется (часть механической энергии превращается в тепло). В этом случае выполняется всеобщий закон природы.

4.5. Столкновение тел. Применение законов сохранения импульса и энергии

С помощью законов сохранения импульса и энергии исследуем движение сталкивающихся тел.

Ударом называется любое кратковременное взаимодействие тел, результатом которого является значительное изменение скорости их движения. Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел нормально к поверхности их соприкосновения, называется *линией удара*. Если линия удара проходит через центры масс соударяющихся тел, то удар называется *центральным*. Рассмотрим прямой удар шаров. При этом шары могут двигаться навстречу друг другу или первый шар может догонять второй. Различают абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

Абсолютно упругий удар – это удар, при котором механическая энергия системы соударяющихся тел не превращается в другие виды энергии. У взаимодействующих тел не остается никаких деформаций, вся кинетическая энергия, которая была у тел до взаимодействия, после удара снова превращается в кинетическую энергию (рис. 4.5).

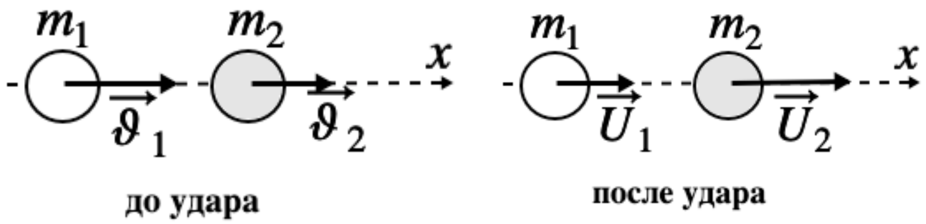


Рис. 4.5. Упругое столкновение тел

При абсолютно упругом ударе справедливы следующие уравнения:

$$m_1\vec{\vartheta}_1 + m_2\vec{\vartheta}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2, \tag{45}$$

которое получено из закона сохранения импульса и уравнение;

$$\frac{m_1\vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2\vartheta_2^2}{2} = \frac{m_1U_1^2}{2} + \frac{m_2U_2^2}{2} \tag{46}$$

– получено из закона сохранения энергии.

Решая систему из уравнений (45), (46), можно получить выражения для обеих скоростей после удара:

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vartheta_1 + 2m_2\vartheta_2}{m_1 + m_2},\ U_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vartheta_2 + 2m_1\vartheta_1}{m_1 + m_2},$$

если второй шар до удара покоился $\vartheta_2 = 0$, то

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vartheta_1}{m_1 + m_2},\ U_2 = \frac{2m_1\vartheta_1}{m_1 + m_2},$$

после удара второй шар движется в ту же сторону, куда двигался первый до удара. Скорости U_1, U_2 и поведение первого шара зависят от соотношения масс.

1. Если $m_1 > m_2$, то первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью. Скорость второго шара после удара U_2 больше, чем скорость первого до удара ϑ_1.

2. Если $m_1 < m_2$, то направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в сторону, в которую двигался первый до удара, но с меньшей скоростью.

3. Если массы одинаковы $m_1 = m_2$, тогда $U_1 = \vartheta_2, U_2 = \vartheta_1$, если $U_1 = 0$, то $\vartheta_2 = 0$.

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело. После столкновения образуется тело с массой $m_1 + m_2$ (рис. 4.6). Закон сохранения механической энергии при абсолютно неупругом ударе не выполняется. Часть кинетической энергии расходуется на работу деформации.

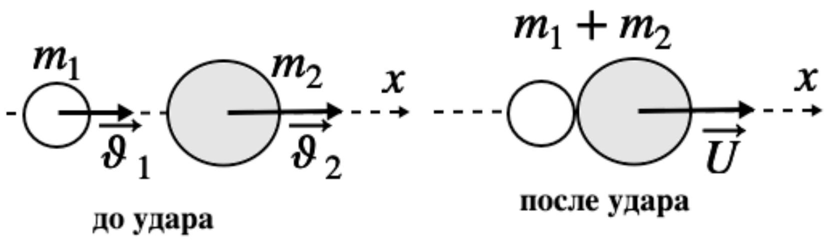


Рис. 4.6. Неупругое столкновение тел

Найдем скорость шаров после удара. Закон сохранения импульса можно записать в проекции на направление движения:

$$m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2 = (m_1 + m_2)U,$$

где U – скорость шаров после удара.

Тогда

$$U = \frac{m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2}{m_1 + m_2}. \tag{47}$$

Потерю кинетической энергии можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара

$$\Delta W_k = \frac{m_1\vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2\vartheta_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}, \tag{48}$$

подставим (47) в (48) и получим, что

$$\Delta W_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2.$$

Эта часть кинетической энергии превращается в тепловую энергию, т. е. в энергию беспорядочного хаотического движения молекул.

4.6. Динамика вращательного движения

Моментом импульса $(\vec{L})$ материальной точки относительно точки O называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в место нахождения материальной точки, на вектор ее импульса $\vec{p}$ (рис. 4.7)

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \tag{49}$$

$[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{c}$.

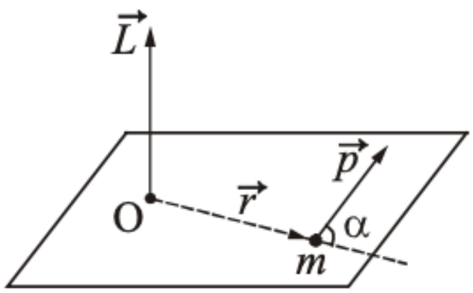


Рис. 4.7. Направление момента импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O

Модуль момента импульса материальной точки: $L = rpsin\alpha$. Направление $\vec{L}$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы.

Моментом импульса относительно некоторой оси называется проекция на эту ось момента импульса относительно любой точки, которая лежит на оси.

Момент импульса (L_z) тела относительно оси OZ будет равен сумме проекций моментов импульсов отдельных точек на эту ось:

$$L_z = \sum_i^N L_{iz}.$$

Для тела произвольной формы можно получить, что

$$L_z = J_z \omega. \tag{50}$$

Моментом силы ($\vec{M}$) относительно точки O называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (51)$$

Модуль момента силы определяется соотношением:

$$M = rF\,sin\,\alpha,$$

$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$.

Плечо силы – это длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $d = rsin\alpha$ (рис. 4.8).

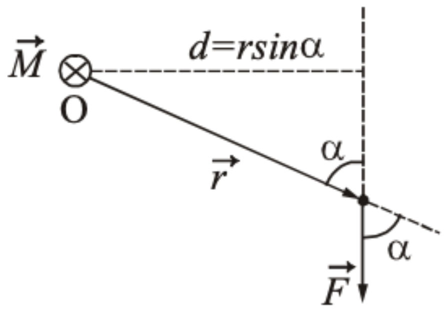


Рис. 4.8. Направление момента силы $\vec{M}$ материальной точки относительно точки O перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы

Момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он определяется. Можно показать, что производная по времени от момента импульса $\vec{L}$ частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту $\vec{M}$ равнодействующей силы $\vec{F}$ относительной той же точки O:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \text{ – уравнение моментов.} \quad (52)$$

Скорость изменения момента импульса материальной точки равна суммарному моменту сил, действующих точку.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси OZ называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

Две равные по модулю противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой, называются *парой сил*. Расстояние d между прямыми, вдоль которых действуют силы, называется *плечом пары*. Модуль момента пары сил равен произведению модуля силы на плечо пары (рис. 4.9):

$$M = rF\, sin\, \alpha = Fd.$$

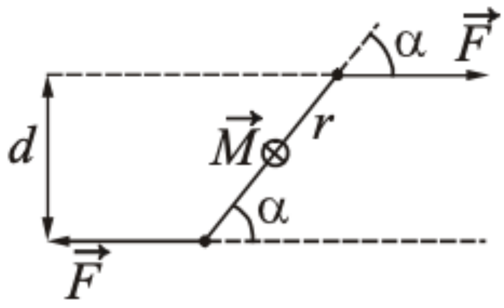


Рис. 4.9. Момент пары сил

4.7. Закон сохранения момента импульса системы

Рассмотрим произвольную систему частиц. Момент импульса такой системы можно определить как векторную сумму моментов импульса отдельных частиц

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \tag{53}$$

где все векторы определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета.

Продифференцируем (53) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\text{внутр}} + \sum_i \vec{M}_i^{\text{внешн}},$$

по третьему закону Ньютона внутренние силы парные соответсвенно:

$$\sum_i \vec{M}_i^{\text{внутр}} = 0.$$

Следовательно, момент импульса системы может изменяться только под действием суммарного момента всех внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i^{\text{внешн}} \tag{54}$$

– основное уравнение динамики вращательного движения.

Можно показать, что производная по времени от момента импульса системы относительно неподвижной оси равна суммарному моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно этой же оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}^{\text{внешн}}. \tag{55}$$

Приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени t равно

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}^{\text{внешн}} dt,$$

т. е. приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.

Закон сохранения момента импульса механической системы: момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, т. е. не изменяется со временем:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i(t) = const. \tag{56}$$

Закон сохранения момента импульса можно применять и для незамкнутый систем, если алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

Действительно, если момент внешних сил, действующих на твердое тело относительно некоторой оси, равен нулю ($\sum_i M_{zi}^{\text{внешн}} = 0$), то изменение момента импульса относительно этой же оси равно нулю:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \text{ откуда } L_z = const. \tag{57}$$

Пример. Рассмотрим случай вращательного движения человека, находящегося на скамье Жуковского (рис. 4.10). Скамья Жуковского представляет собой горизонтальную платформу (диск), которая может свободно вращаться без трения вокруг вертикальной оси OO_1. Человек сидит на скамье и держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамьей вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω_1.

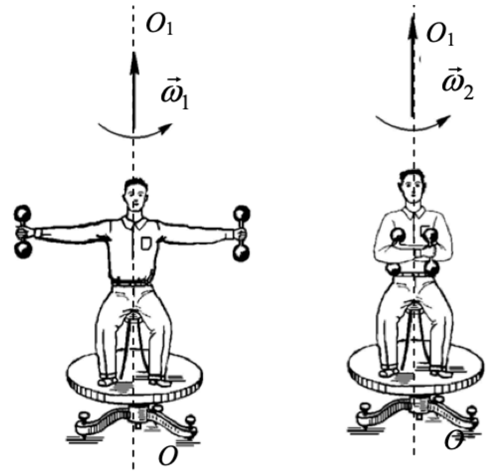


Рис. 4.10. Вращение человека на скамье Жуковского

Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил (сил тяжести и реакции подшипников) относительно оси OO_1 равен нулю, момент импульса системы относительно оси OO_1 сохраняется:

$$(J_o + 2mr_1^2)\omega_1 = (J_o + 2mr_2^2)\omega_2,$$

где J_o – момент инерции человека и скамьи относительно оси OO_1;

$2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ – моменты инерции гантелей в первом и втором положениях относительно OO_1;

m – масса одной гантели;

r_1 и r_2 – расстояния от гантелей до оси вращения;

ω_1 и ω_2 – угловые скорости вращения системы.

Если $r_2 < r_1, \omega_2 > \omega_1$.

Рассмотрим случай, когда человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси OO_1 вращения скамьи. Вначале колесо не вращается, а затем человек раскручивает его до угловой скорости $\overrightarrow{\omega}_1$. При этом он сам вместе со скамьей приходит во вращение в обратном направлении с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega}_2$, которая, как показывает опыт, находится в полном согласии с законом сохранения момента импульса системы относительно неподвижной оси OO_1: $\overrightarrow{L} = const$. Вначале скамья не вращается, поэтому суммарный момент импульса системы равен нулю ($\overrightarrow{L} = 0$), после того, как колесо раскрутили, суммарный момент импульса системы равен сумме моментов импульса колеса и скамьи:

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{L}_k + \overrightarrow{L}_{ck} = J_k\overrightarrow{\omega}_1 + J_{ck}\overrightarrow{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\omega}_2 = -\frac{J_k}{J_{ck}}\overrightarrow{\omega}_1.$$

Скамья вращается в противоположном направлении вращению колеса.

Подставим (50) в (55) $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = M_z$, учитывая, что $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, получим

$$J_z \varepsilon = M_z. \tag{58}$$

Уравнение (58) называется *основным законом динамики вращательного движения.*

Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса – это фундаментальные принципы физики. Закон сохранения энергии связан с однородностью времени – инвариантностью физических законов относительно выбора начала отсчета времени. Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства: при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого, ее физические свойства не изменяются (не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета). Закон сохранения момента импульса связан соответственно с изотропностью пространства – инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Вопросы

1. В чем заключается закон сохранения механической энергии?

2. С каким фундаментальным свойством времени связан закон сохранения энергии? В чем состоит это свойство?

3. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого удара?

4. Запишите законы сохранения для абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

5. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Приведите пример.

6. С каким фундаментальным свойством пространства связан закон сохранения момента импульса? В чем состоит это свойство?

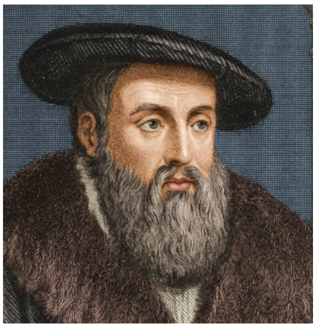
5. ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

5.1. Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения


Николай Коперник (1473–1543)

К началу XVII столетия большинством была признана справедливость гелиоцентрической системы мира. Согласно этой системе, предложенной Николаем Коперником, Земля и все остальные планеты движутся вокруг Солнца, которое является центром нашей планетарной системы. Иоган Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге и им самим, получил *законы движения планет* вокруг Солнца:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.


Иоган Кеплер (1571–1630)

Чтобы объяснить законы сформулированные Кеплером, необходимо было установить то, как планеты взаимодействуют. Это удалось И. Ньютонону, а именно, он сформулировал закон всемирного тяготения: сила, с которой две материальные точки притягивают друг друга, пропорциональна массам этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где G – универсальная гравитационная постоянная. Сила гравитационного взаимодействия направлена вдоль линии, соединяющей материальные точки (если речь идет о планетах, то вдоль линии соединяющей центры планет), и является силой притяжения (выше о гравитационном взаимодействии мы уже говорили).

Следует отметить, что масса фигурирует в двух различных законах: во втором законе Ньютона и в законе всемирного тяготения. В первом случае она характеризует инертные свойства тела, во втором – гравитационные свойства, т. е. способность тел притягивать друг друга. В связи с этим возникает вопрос: не следует ли различать инертную и гравитационную массы? В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу.

Английский физик Кавендиш поставил опыт, позволивший измерить силу тяготения в лабораторных условиях и тем самым определить гравитационную постоянную. На тонкой нити подвешен легкий стержень, а на нити жестко закреплено небольшое зеркальце. Луч света, падая на зеркальце, отражается от него и попадает на шкалу. При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале, регистрируя тем самым угол закручивания нити. На концах стержня закреплены два свинцовых шарика с массами m_1 каждый. К ним подносят два симметрично расположенных свинцовых шара с массами M. В результате взаимодействия, нить закручивается на некоторый угол до тех пор, пока сила упругости деформированной нити не уравновешивает силу гравитационного взаимодействия между шарами (рис. 5.1). Измерив силу взаимодействия по углу закручивания нити, зная массы шаров и расстояния между их центрами, можно определить гравитационную постоянную. Значения $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ с такой силой притягиваются друг к другу два тела массой по 1 кг, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга.

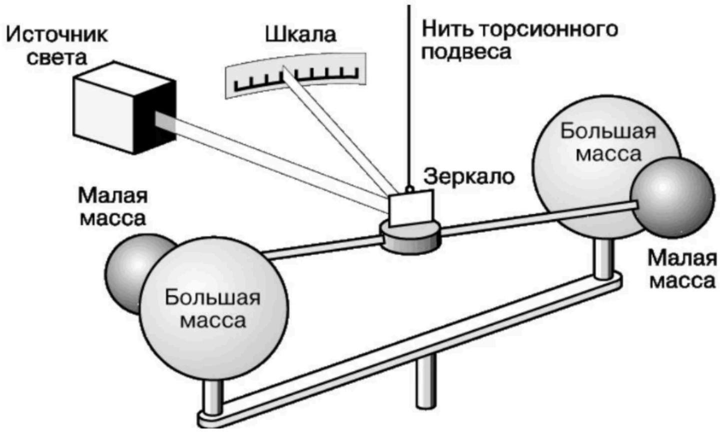


Рис. 5.1. Опыт Кавендиша

5.2. Космические скорости

Первой космической скоростью ϑ_1 называется такая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вблизи поверхности Земли (небесного тела) по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. Найдем значение первой космической скорости, используя второй закон Ньютона: $F = ma$,

$$G\frac{mM}{R^2} = m\frac{\vartheta^2}{R},$$

или

$$G\frac{mM}{(R_з + h)^2} = m\frac{\vartheta^2}{R_з + h}.$$

Учтем, что спутник движется вблизи поверхности Земли, $h \ll R_З$:

$$G\frac{M}{R_З} = \vartheta^2,$$

с другой стороны

$$F = mg = G\frac{mM}{R_З^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{R_З^2} = \frac{\vartheta^2}{R_З} \Rightarrow \vartheta_1 = \sqrt{gR_З} = 7{,}9 \text{ км/с}.$$

Этой скорости недостаточно, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения.

Второй космической скоростью ϑ_2 называется такая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли (небесного тела) и уйти в космическое пространство (фактически стать спутником Солнца). Эту скорость найдем из равенства кинетической энергии тела работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{m\vartheta^2}{2} = G\frac{mM}{R^2}R = G\frac{mM}{R}, \Rightarrow$$

$$\vartheta = \sqrt{2G\frac{M}{R^2}R} = \sqrt{2gR} = \vartheta_1\sqrt{2} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Третьей космической скоростью ϑ_3 называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно могло преодолеть притяжение Солнца (звезды) и покинуть пределы Солнечной системы. Если наилучшим образом использовать орбитальное движение планеты при взлете с поверхности Земли, минимальное значение третьей космической скорости, которое должно иметь тело, – $\vartheta_3 = 16{,}6$ км/с, а при старте с Земли в самом неблагоприятном направлении его необходимо разогнать до скорости $\vartheta_3 = 72{,}8$ км/с.

Четвертая космическая скорость ϑ_4 – минимально необходимая скорость тела без двигателя, позволяющая преодолеть притяжение галактики Млечный Путь. Она используется довольно редко. Четвертая космическая скорость не постоянна для всех точек Галактики, а зависит от расстояния до центральной массы.

Вопросы

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Что такое первая, вторая и третья космические скорости?
3. Как вычисляются первая и вторая космические скорости?

6. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

6.1. Основые положения механики неинерциальных систем отсчета

Основные положения механики Ньютона и вытекающие из них следствия могут быть справедливы только для инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Всякая система, которая движется с ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета, является *неинерциальной*.

Примером неинерциальной системы отсчета является геоцентрическая система отсчета, жестко связанная с Землей, вследствие суточного вращения Земли. Однако максимальное ускорение точек поверхности Земли не превышает 0,5 % g, поэтому в большинстве практических задач геоцентрическую систему отсчета считают инерциальной. В неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются.

Пример. Поезд движется с ускорением $\overrightarrow{a}$, шарик у стенки, на него действует сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$, но шарик находится в покое (рис. 6.1).

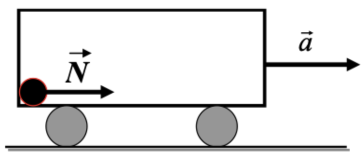


Рис. 6.1. Шарик в движущемся поезде

В данной неинерциальной системе отсчета второй закон Ньютона нарушается: при наличии взаимодействия тело не получает ускорение.

Основные положения в механике неинерциальных систем отсчета:

1. Ускорения тел вызываются силами, однако силы не обязательно обусловлены действием тел друг на друга.

2. В неинерциальных системах отсчета на тела действуют силы инерции – силы, обусловленные тем, что система отсчета обладает ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета. Они не вызваны взаимодействием тел. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется.

3. Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Всем телам, независимо от их массы, силы инерции сообщают одинаковое ускорение.

Рассмотрим движение неинерциальной системы отсчета $K^{/}$ относительно инерциальной системы отсчета K. Ускорение системы $K^{/}$ относительно K – $\overrightarrow{a}$, скорость движения $\overrightarrow{\vartheta}^{/} = \overrightarrow{a}t$. Пусть $\vec{r}_i$ – радиус-вектор материальной точки в системе K, $\vec{r}_{ni}$ – радиус-вектор материальной точки в системе $K^{/}$, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начала координат системы $K^{/}$ в системе K:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_{ni}, \tag{59}$$

продифференцируем (59) по времени

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_{ni}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\vartheta}_i = \vec{\vartheta}_0 + \vec{\vartheta}_{ni}, \tag{60}$$

продифференцируем еще раз

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\vartheta}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{d\vec{\vartheta}_0}{dt} + \frac{d\vec{\vartheta}_{ni}}{dt} \Rightarrow \vec{a}_i = \vec{a} + \vec{a}_{ni} \Rightarrow \vec{a}_{ni} = \vec{a}_i - \vec{a}, \tag{61}$$

где $\vec{a}_{ni}$ – ускорение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета;

$\vec{a}_i$ – ускорение материальной точки относительно инерциальной системы отсчета;

$\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета.

Умножим (61) на массу

$$m\vec{a}_{ni} = m\vec{a}_i - m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a}_{ni} = \vec{F} + \vec{F}_i, \tag{62}$$

– это *уравнение движения относительно неинерциальной системы отсчета*,

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}$$

– сила инерции.

Сила инерции – это векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ускорение неинерциальной системы отсчета и направленная противоположно ускорению.

6.2. Центробежная сила инерции и сила Кориолиса

Система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\vec{\omega}$, является неинерциальной системой отсчета.

Представим себе диск, равномерно вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Вместе с диском вращается надетый на спицу шарик, соединенный с центром диска пружиной (рис. 6.2).

Шарик покоится относительно диска и занимает на спице такое положение, при котором сила натяжения пружины $\vec{F}_{\text{пр}}$ оказывается равной произведению массы шарика m на нормальное (центростремительное) ускорение $\vec{a}_n$:

$$\vec{F}_{\text{пр}} = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный к шарику из центра диска.

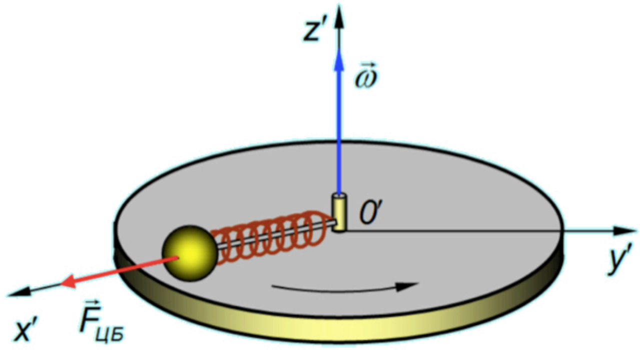


Рис. 6.2. Вращение диска с шариком

Но так рассуждает наблюдатель, смотрящий на вращение диска из инерциальной системы отсчета. Свяжем с диском вращающуюся неинерциальную систему отсчета $K^{/}$, в которой диск вместе с шариком покоится. Условие равновесия шарика в этой системе имеет вид

$$\vec{F}_{\text{пр}} + \vec{F}_{\text{ц}} = 0,$$

наблюдатель во вращающейся системе отсчета объясняет равновесие шарика наличием силы инерции

$$\vec{F}_{\text{ц}} = -\vec{F}_{\text{пр}} = m\omega^2\vec{r},$$

направленной от центра диска $O^{/}$ по радиусу $\vec{r}$. Сила инерции, действующая на материальную точку в равномерно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ системе отсчета, называется *центробежной силой инерции*.

При произвольном положении начала отсчета на оси вращения, радиус-вектор некоторой материальной точки всегда можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_{||} + \vec{r}_{\perp},$$

где $\vec{r}_{||}$ – параллельная оси вращения;

$\vec{r}_{\perp}$ – перпендикулярная к оси вращения его составляющая, начинающаяся на оси вращения, в центре той окружности, по которой движется рассматриваемая точка.

С помощью известной формулы

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$$

можно показать, что выражение для центробежной силы инерции можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{ц}} = m\omega^2\vec{r} = m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}_{||}]] = m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}]].$$

Если во вращающейся системе отсчета тело движется, то, помимо центробежной силы, на него будет действовать еще одна сила инерции, называемая *силой Кориолиса,* или *кориолисовой силой инерции*.

Пусть шарик массой m движется без трения вдоль радиуса диска (рис. 6.3) с постоянной скоростью $\vec{\vartheta}$, направленной в некую точку A на краю диска. Если диск не вращается, то шарик движется по радиусу и попадает в точку A. Если же диск привести во вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то к моменту достижения шариком края диска на месте точки A окажется другая точка B. Если шарик оставляет след, то он прочертит свою траекторию относительно диска: кривую линию OB. При этом на шарик не действуют никакие видимые силы, и относительно инерциальной системы он по-прежнему движется с постоянной скоростью $\vec{\vartheta}$. Скорость же шарика относительно диска $\vec{\vartheta}'$ изменяла свое направление. Значит, в системе отсчета, связанной с вращающимся диском, на шарик действовала сила инерции, не параллельная скорости $\vec{\vartheta}'$. Стало быть, она не была направлена по радиусу, откуда следует, что эта сила отлична от рассмотренной выше центробежной силы инерции. Ее и называют силой *Кориолиса.*

$$\vec{F}_{\text{к}} = 2m[\vec{\vartheta}, \vec{\omega}].$$

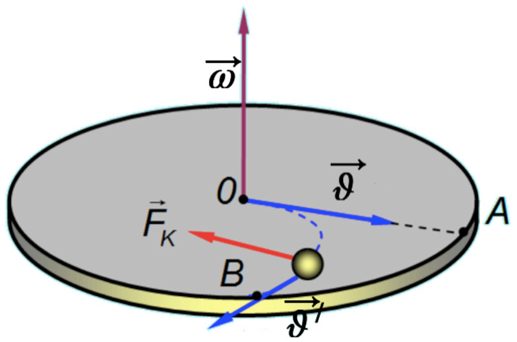


Рис. 6.3. Сила Кориолиса

Французский физик-экспериментатор Жан Фуко (1819–1868), наблюдая за колебаниями специально сконструированного маятника, в 1851 г. экспериментально доказал, что система координат, связанная с Солнцем, инерциальна, а Земля совершает суточное вращение вокруг своей оси. Этот маятник, состоящий из подвеса длиной 67 м и железного шара массой 28 кг, названный маятником Фуко, был сконструирован в парижском Пантеоне. В настоящее время известно около 20 действующих конструкций маятника Фуко.

Рассмотрим маятник, который находится на Северном полюсе (рис. 6.4). Выведем маятник из состояния равновесия и дадим ему возможность свободно колебаться. В гелиоцентрической системе отсчета на маятник действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{T}$. Обе силы лежат в плоскости качаний маятника, следовательно, плоскость качаний должна сохранять свое положение в пространстве относительно этой системы. В то же время проекция плоскости качаний маятника поворачивается в направлении, противоположном вращению Земли, со скоростью 15° в час. Наблюдаемый поворот плоскости качаний маятника может быть обусловлен только лишь суточным вращением Земли. В системе отсчета, связанной с Землей, поворот плоскости качаний маятника объясняется действием силы Кориолиса. На полюсе скорость маятника $\vec{\vartheta}'$ при большой длине его подвеса можно считать перпендикулярной вектору угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$. Воспользовавшись правилом буравчика можно определить направление силы Кориолиса, которая в данном случае направлена вправо по отношению к относительной скорости движения маятника. Поскольку сила Кориолиса никакой другой силой не уравновешивается, то в результате ее действия происходит поворот плоскости качаний маятника. Траектория движения маятника будет иметь вид розетки (рис. 6.5).

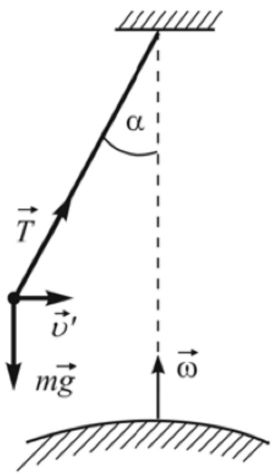


Рис. 6.4. Маятник, расположенный на полюсе Земли

Большую роль играют кориолисовы силы в метеорологических явлениях. Так, отклоняющее влияние кориолисовой силы заставляет мощное океаническое течение Гольфстрим, выходящее из Мексиканского залива через Флоридский пролив в направлении, близком к меридианному, отойти от берегов Америки, пересечь Атлантический океан и выйти в Баренцево море у берегов Скандинавии. Действием кориолисовых сил объясняется и направление ветров-пассатов. Массы холодного атмосферного воздуха приходят в движение в направлении от полюса к экватору, где давление атмосферного воздуха вследствие нагревания несколько ниже, чем у полюса. Под влиянием силы Кориолиса, которая в данном случае будет направлена на запад, пассаты в северном полушарии Земли дуют с северо-востока на юго-запад, а в южном – на северо-запад. При движении тел на Земле проявление кориолисовых сил не очень заметно, поскольку в обычных условиях малы и скорости движения тел, и угловая скорость вращения Земли.

Продолжительное действие кориолисовых сил объясняет тот факт, что правый берег рек в северном полушарии всегда более крутой, чем левый, в южном полушарии более крутой – левый берег (закон Бера). Сила Кориолиса прижимает воду к правому берегу, и она подмывает его. Поскольку сила Кориолиса, как отмечалось ранее, в северном полушарии всегда направлена в правую сторону от направления движения тела, то этим объясняется преждевременный износ правого рельса на двухколейной железной дороге.

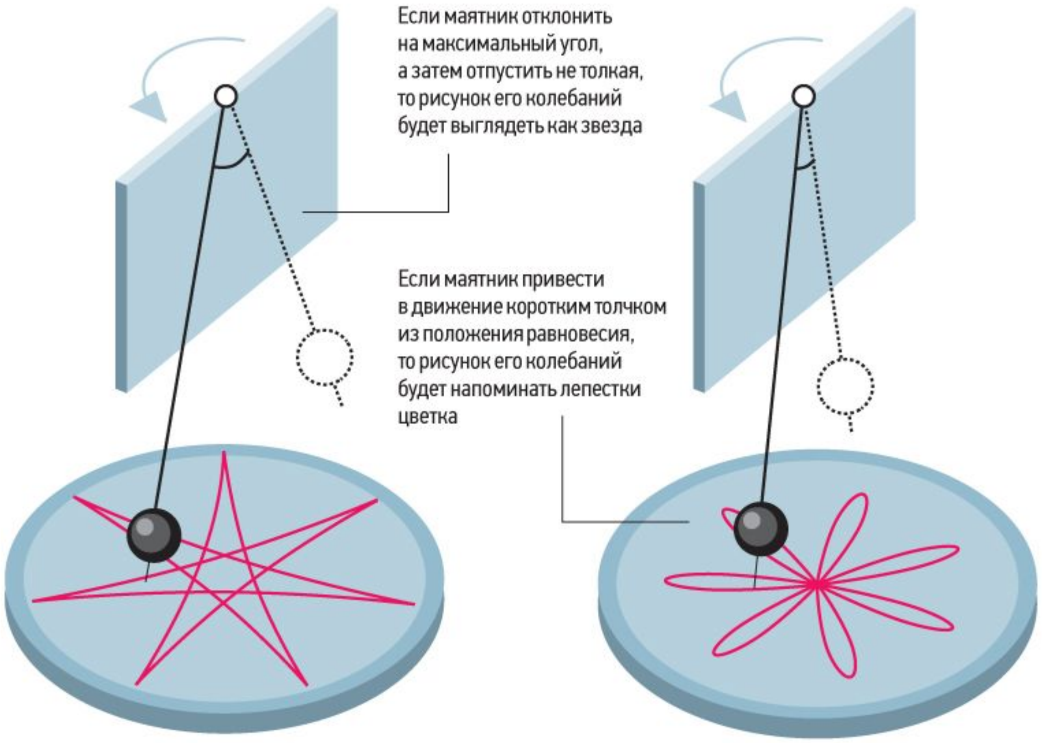


Рис. 6.5. Траектория движения маятника Фуко

6.3. Гироскопы. Гироскопический эффект. Прецессия гироскопа

Тело может вращаться не только вокруг закрепленной оси, но и вокруг оси, которая не закреплена. В любом теле можно выбрать такие оси, направление которых при вращении вокруг них будет сохраняться без каких либо специальных устройств (например, подшипников). Такие оси называют свободными.

Свободные оси – оси, которые без специального закрепления сохраняют свое направление в пространстве.

Пример. Ось вращения Земли и волчка, ось всякого брошенного и свободно вращающегося тела.

Можно доказать, что в любом теле имеется не менее трех взаимно перпендикулярных свободных осей вращения, эти оси называются *главными осями инерции.* При этом оказывается, что при отсутствии внешних воздействий устойчивым является вращение тела только вокруг двух осей, относительно которых оно имеет наибольший или наименьший момент инерции. Например, если, подбросив тело, привести его во вращение относительно произвольной оси, то, падая, оно само по себе перейдет к вращению вокруг оси, которой соответствует или наибольший, или наименьший момент инерции. В некоторых случаях, когда тело вращается около свободной оси с малым моментом инерции, оно самопроизвольно изменяет эту ось на ось с наибольшим моментом.

Можно показать, что вращение вокруг главных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции оказывается устойчивым, а вращение вокруг других осей и оси со средним моментом – неустойчивым.

Гироскоп – это массивное аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии. В этом случае моменты всех внешних сил, включая и силу тяжести, относительно центра масс гироскопа равны нулю. Это можно реализовать, например, поместив гироскоп в карданов подвес (рис. 6.6). При этом

$$\vec{M} = 0, \; \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Рис. 6.6. Гироскоп

Первый гироскоп изобрел Иоанн Боненбергер в 1817 году. Термин «гироскоп» был введен Жаном Фуко в 1852 году. Классифицируются по количеству степеней свободы (двухстепенные, трехстепенные) и по принципу действия (механические, оптические).

Первыми появились механические приборы, от которых и пошло изучение гироскопического эффекта. Однако сфера использования таких устройств ограничена и не позволяет их интегрировать в современную технику, которая нуждается в ориентире для определения положения в пространстве. Вследствие этого появилась оптическая группа гироскопов.

Гироскопы широко используется в авиации, автомобилестроении, мобильных устройствах, системах стабилизации видеокамер, навигации.

По характеру движения под действием внешних сил выделяют в основном два типа гироскопов: гироскопы с двумя и тремя вращательными степенями свободы.

Типичным примером конструкции гироскопа с тремя степенями свободы является игрушка «юла». Один из концов оси такой игрушки закреплен, а центр масс меняет свое положение в пространстве (движется вокруг вертикальной оси) под действием момента силы тяжести. Другим примером свободного гироскопа является трехосевой гироскоп.

Динамические свойства гироскопа определяются такими основными параметрами, как угловая скорость собственного вращения $\vec{\omega}_0$ (угловая скорость гироскопа), момент инерции I_0 и собственный момент импульса гироскопа $\vec{L}$. Поскольку для симметричных тел, вращающихся вокруг главной оси, момент импульса равен произведению момента инерции тела на угловую скорость его вращения, то для гироскопа

$$\vec{L} = I_0 \vec{\omega}_0.$$

Величина вектора $\vec{L}$ определяет точность работы гироскопических приборов. Чем она больше, тем устойчивее и точнее работают эти приборы.

Движение гироскопа, как твердого тела, определяется уравнением динамики вращательного движения: скорость изменения момента импульса вращающегося тела равняется суммарному моменту внешних сил, действующих на него:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{63}$$

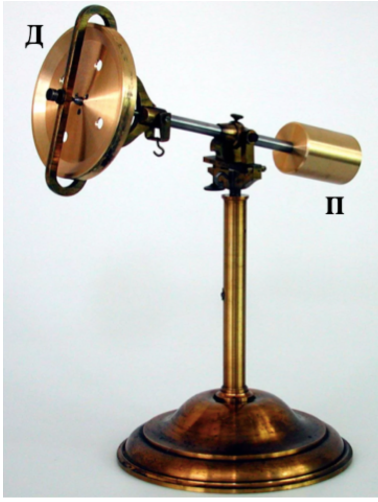


Рис. 6.7. Общий вид свободного гироскопа

Пусть противовес П уравновешивает диск Д, изображенный на рис. 6.7, то есть гироскоп является свободным. Тогда результирующий момент сил, действующий на рассматриваемую систему, равен нулю. Следовательно, согласно закону сохранения момента импульса и основному уравнению динамики вращательного движения (63), момент импульса уравновешенного гироскопа $\vec{L}$ сохраняется.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = const. \tag{64}$$

В зависимости от начальных условий и наличия внешнего воздействия, оказываемого на ось гироскопа с тремя степенями свободы, возможны три варианта его поведения:

1. Сохранение направления оси свободного гироскопа в пространстве. В однородном поле силы тяжести ось свободного гироскопа (главная ось) сохраняет первоначально заданное ей направление – *первое свойство свободного гироскопа*. Если гироскоп раскручен вокруг оси симметрии (главной оси симметрии), то направления момента импульса и угловой скорости совпадают. Тогда, согласно уравнению (64), направление оси симметрии свободного гироскопа остается неизменным при любых попытках развернуть подставку, в которой закреплен гироскоп. Устойчивость главной оси тем больше, чем точнее центр масс системы совпадает с точкой крепления гироскопа. В «кардановом подвесе» гироскоп закреплен в центре масс и обладает высокой устойчивостью. Устойчивость гироскопа возрастает с уменьшением силы трения в осях «карданова подвеса» и увеличением веса гироскопа, диаметра и скорости вращения диска вокруг главной оси. Для повышения устойчивости в современных гирокомпасах используются роторы гиромоторов, имеющие скорость вращения от 6000 до 30000 об/мин. В соответствии с уравнением (63) гироскоп представляется жестким по отношению к импульсному внешнему воздействию. Он не реагирует

на кратковременные ударные воздействия (*второе свойство свободного гироскопа:* свободный гироскоп устойчив к ударным воздействиям).

2. Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Раскрутим гироскоп и приложим к его оси силу $\vec{F}$ в направлении, перпендикулярном к оси вращения. Если бы гироскоп не вращался, то его ось наклонилась бы в направлении действия силы $\vec{F}$. Наличие вращения приводит к тому, что вектор $\vec{L}$ меняет свое направление необычным образом. Ось гироскопа движется в плоскости, перпендикулярной линии действия силы. Поворот оси вращения гироскопа происходит под действием внешнего момента силы $\vec{M}$ и называется прецессией (*третье свойство свободного гироскопа*: если внешняя сила стремиться повернуть гироскоп вокруг данной оси, то он поворачивается вокруг другой, ей перпендикулярной). Направление прецессии задается векторным уравнением

$$\vec{M} = [\vec{\omega}_{\text{пр}}, \vec{L}], \tag{65}$$

где $\vec{\omega}_{\text{пр}}$– вектор угловой скорости прецессии гироскопа.

Воспользуемся элементарной теорией гироскопа, вычислим значение угловой скорости прецессии. Будем считать, что $\omega \gg \omega_{\text{пр}}$, то есть вектор $\vec{L}$ совпадает с вектором угловой скорости $\vec{\omega}_0$ и направлен вдоль главной оси гироскопа x, что изображено на рис. 6.8. Применим основное уравнение динамики вращательного движения (63). В результате действия силы $\vec{F}$ в течение времени dt начальный момент импульса $\vec{L}_0$ получит приращение

$$d\vec{L} = \vec{M}dt, \tag{66}$$

где $\vec{M}$ – момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Новый момент импульса $\vec{L} = \vec{L}_0 + d\vec{L}$ отклонится относительно первоначального направления на некоторый угол $d\alpha$ в горизонтальной плоскости (произойдет поворот вектора момента импульса вокруг OZ). Поскольку при больших угловых скоростях $\vec{\omega}_0$ вектор $\vec{L}$ направлен вдоль оси гироскопа, то вместе с $\vec{L}$ на угол $d\alpha$ повернется и сама ось:

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{67}$$

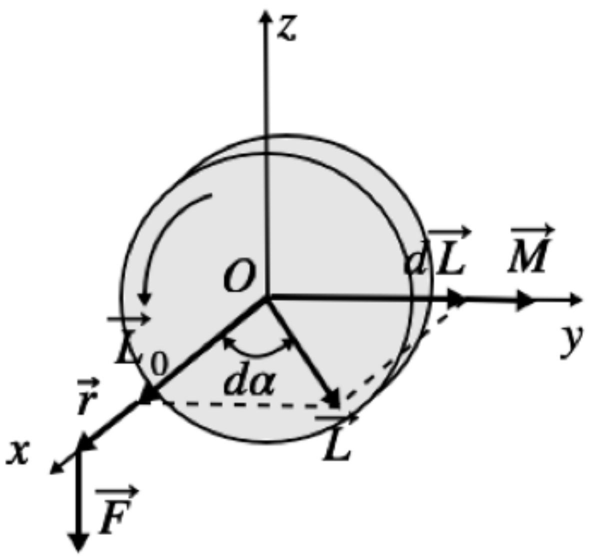


Рис. 6.8. Схема изменения момента импульса гироскопа
под действием момента внешней силы

Из рис. 6.7 следует, что приращение dL момента импульса можно выразить как:

$$dL = Ld\alpha, \tag{68}$$

где L – проекция вектора $\overrightarrow{L}$ на горизонтальную плоскость.

Из (63), (67) и (68), угловую скорость прецессии $\omega_{\text{пр}}$ гироскопа можно найти, как

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{dL}{Ldt}\frac{M}{L} = \frac{rF}{I_0\omega_0},$$

где r – плечо силы F.

Если для создания силы F использовать груз известной массы m, то

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{rmg}{I_0\omega_0}. \tag{69}$$

В ходе прецессии ось гироскопа поворачивается вокруг вертикальной оси OZ, проходящей через точку опоры O, с угловой скоростью прецессии $\omega_{\text{пр}}$. Угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона оси гироскопа по отношению к вертикали. При больших скоростях вращения гироскопа ω_0 скорость прецессии $\omega_{\text{пр}}$ очень мала (69) и ось гироскопа поворачивается столь медленно, что на некотором интервале времени таким движением можно пренебречь, а сам гироскоп использовать в качестве указателя неизменного направления в пространстве. Характерной особенностью прецессии является ее безынерционность (*четвертое свойство свободного гироскопа*): прецессионное движение существует в течение времени действия внешней силы и мгновенно прекращается с ее исчезновением.

3. Если гироскоп не очень быстро вращается вокруг своей оси и при этом на нее оказывается внешнее воздействие, то вектор мгновенной угловой скорости и ось симметрии гироскопа не совпадают. В данном случае помимо прецессии наблюдается движение, называемое *нутацией* (от лат. nutatio – колебание). Другими словами, нутационное движение возникает при силовом воздействии на ось прецессирующего гироскопа. При этом чем сильнее раскручен гироскоп, тем меньше период нутации и их амплитуда («мельче» дрожания конца оси гироскопа). Пример прецессии – движение оси детской игрушки – юлы с заостренным концом, т. е. гироскопа, имеющего одну точку опоры. Юла, раскрученная вокруг своей оси и поставленная на горизонтальную плоскость слегка наклонно, начинает прецессировать вокруг вертикальной оси под действием момента пары сил тяжести и нормальной реакции опоры: $\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{g}\,]$ (рис. 6.9).

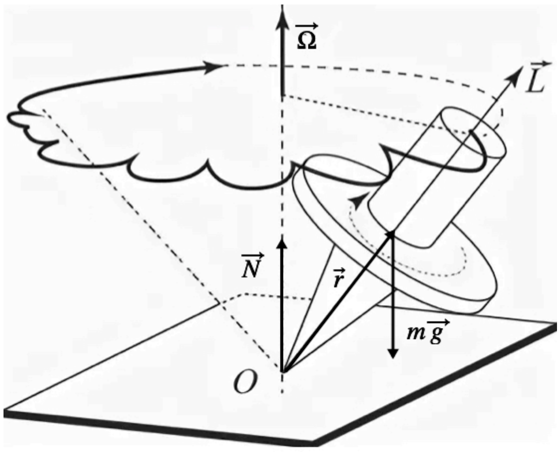


Рис. 6.9. Процессия вокруг вертикальной оси

Наша Земля – своего рода гироскоп, и ей тоже свойственно нутационное движение. Это связано с тем, что Земля несколько приплюснута с полюсов, в силу чего моменты инерции относительно оси симметрии J_x и относительно оси, лежащей в экваториальной плоскости, различаются. В системе отсчета, связанной с Землей, ось вращения движется по поверхности конуса вокруг оси симметрии Земли с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то есть она совершает один оборот примерно за 300 дней.

Прецессия Земли – это медленное движение оси вращения Земли по круговому конусу, ось симметрии которого перпендикулярна к плоскости орбиты. Полный цикл прецессии составляет около 25 800 лет.

7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

7.1. Основные понятия и термины

В технике и окружающем нас мире часто приходится сталкиваться с периодическими (или почти периодическими) процессами, которые повторяются через одинаковые промежутки времени. Такие процессы называют колебательными.

Колебания – один из самых распространенных процессов в природе и технике. Крылья насекомых и птиц в полете, высотные здания и высоковольтные провода под действием ветра, маятник заведенных часов и автомобиль на рессорах во время движения, уровень реки в течение года и температура человеческого тела при болезни, звук – это колебания плотности и давления воздуха, радиоволны – периодические изменения напряженностей электрического и магнитного полей, видимый свет – электромагнитные колебания, только с несколько иными длиной волны и частотой, землетрясения – колебания почвы, биение пульса – периодические сокращения сердечной мышцы человека и т. д.

Система, совершающая колебания, называется *колебательной системой,* или *осциллятором*.

Виды колебаний: *свободные* (собственные) колебания – происходят в системе, которая предоставлена себе после того, как она выведена из положения равновесия; *вынужденные* – колебания, которые происходят под действием периодически изменяющейся внешней силы.

Параметрические колебания – колебания, происходящие при периодическом изменении за счет внешнего воздействия какого-либо параметра колебательной системы, например, положения центра масс системы (самостоятельные колебания ребенка на качели).

Автоколебания – незатухающие колебания, возникающие и поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой (часы с маятником).

Гармонические колебания – это колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса:

$$x(t) = A\,cos\,(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{70}$$

где $x(t)$ – отклонение колеблющейся физической величины от равновесного значения (в случае колебания маятника от положения равновесия);

A – амплитуда гармонических колебаний (максимальное значение колеблющейся величины);

ω_0 – циклическая (круговая) частота колебаний;

φ_0 – начальная фаза колебаний в момент времени t_0;

$\varphi(t) = (\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t, выраженная в радианах.

Период колебаний T – наименьший промежуток времени, за который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно. При этом

$$\omega_0(t+T)+\varphi_0=(\omega_0 t+\varphi_0)+2\pi \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (71)$$

Частотой колебаний ν называется величина, обратная периоду колебаний; число полных колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega_0}{2\pi}, \qquad (72)$$

$[\nu]=c^{-1}=$ Гц (герц).

1 Гц – это частота периодического процесса, при котором за 1 с совершается одно полное колебание.

Графически гармонические колебания можно изображать, используя метод вращающегося вектора амплитуды. Для этого из произвольной точки O на оси OX под углом φ_0 (начальная фаза колебания) откладывается вектор $\overrightarrow{A}$, модуль которого равен амплитуде рассматриваемого колебания (рис. 7.1). Приводя вектор $\overrightarrow{A}$ во вращение с угловой скоростью ω, равной циклической частоте колебания, получаем, что проекция конца вектора будет перемещаться по оси OX и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина изменяться со временем по закону

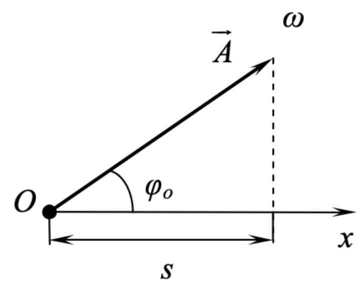


Рис. 7.1. Метод вращающегося вектора

$$s=A\,cos\,(\omega t+\varphi_0).$$

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси OX около положения равновесия, принятого за начало координат. Определим для колеблющейся точки следующие величины:

1. Скорость движения тела

$$\vartheta=\frac{dx}{dt}=-A\omega\,sin\,(\omega t+\varphi_0)=A\omega\,cos\,(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}). \qquad (73)$$

Появление слагаемого $+\frac{\pi}{2}$ в аргументе косинуса означает изменение начальной фазы. Максимальные по модулю значения скорости

$$\vartheta_{max}=A\omega$$

достигаются в те моменты времени, когда тело проходит через положения равновесия ($x = 0$).

2. Аналогичным образом определяется ускорение тела при гармонических колебаниях

$$a = \frac{d\vartheta}{dt} = -A\omega^2 cos\,(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 cos\,(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\,\omega^2 x(t). \quad (74)$$

Знак минус справа в (74) означает, что ускорение $a(t)$ всегда имеет знак, противоположный знаку смещения $x(t)$, и, следовательно, по второму закону Ньютона сила, заставляющая тело совершать гармонические колебания, направлена всегда в сторону положения равновесия ($x = 0$). Фаза скорости отличается от фазы смещения на $\pi/2$, а фаза ускорения – на π. В моменты времени, когда $x = 0$, скорость ϑ приобретает наибольшие значения; когда же x достигает максимального отрицательного значения, то ускорение приобретает наибольшее положительное значение (рис. 7.2)

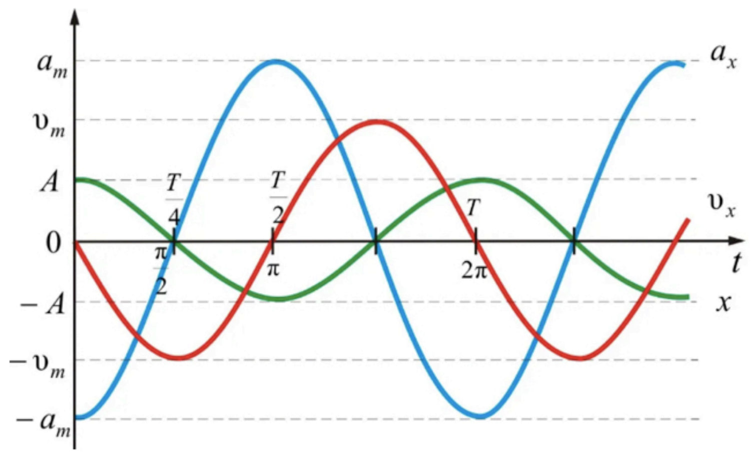


Рис. 47. Изменение физических величин в колебательном процессе

Сила, действующая на колеблющуюся точку, пропорциональна смещению материальной точки и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия):

$$F(t) = ma(t) = -\,m\omega^2 x(t).$$

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая гармонические колебания, описываемые дифференциальным уравнением, имеющим вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (75)$$

– уравнение гармонических колебаний, которое следует из (74).

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, математический и физический маятники.

Пружинный маятник – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине, массой которой можно пренебречь, и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы (рис. 7.3):

$$F_x = -\,kx,$$

где k – жесткость пружины.

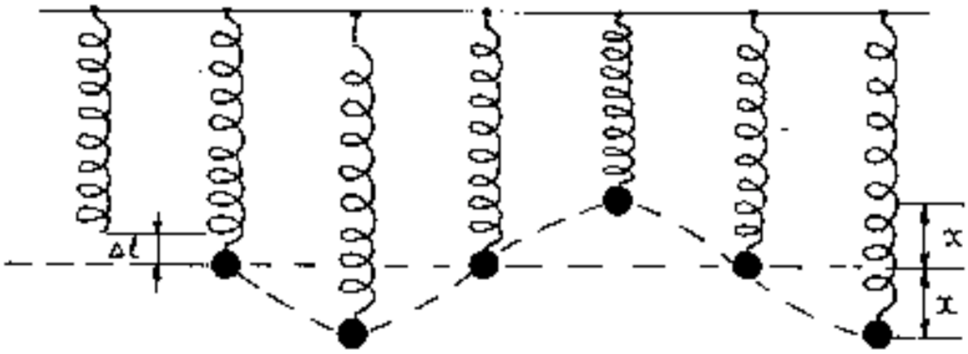


Рис. 7.3. Колебания пружинного маятника

Можно получить следующее уравнение движения пружинного маятника

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Кинетическая энергия пружинного маятника $E_k = \dfrac{1}{2}m\vartheta^2$, а потенциальная – $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$.

Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой нити длиной l и колеблющейся под действием силы тяжести без трения.

Небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити, когда размерами тела по сравнению с длиной нити можно пренебречь, является хорошим приближением математического маятника.

Уравнение колебаний математического маятника:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0,$$

с периодом колебаний $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной неподвижной оси, не проходящей через центр масс тела и называемой осью подвеса маятника (рис. 7.4).

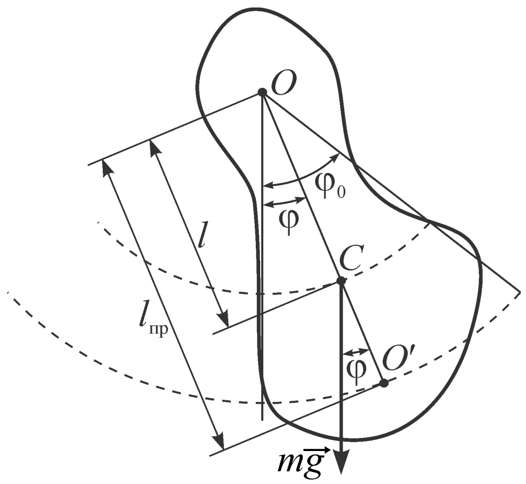


Рис. 7.4. Физический маятник

В данном случае тело нельзя рассматривать как материальную точку. Ось вращения жестко связана с телом.

При отклонении маятника на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся возвратить маятник в положение равновесия

$$M = -(mg\,sin\,\varphi)l, \tag{76}$$

где l – расстояние между осью вращения и центром масс C.

Знак «минус» в формуле (76) означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению из положения равновесия. При малых углах φ, когда $sin\,\varphi \approx \varphi$, физический маятник способен совершать свободные гармонические колебания, тогда

$$M = -mg\varphi l$$

и основное уравнение динамики

$$J\varepsilon = M = -mg\varphi l, \tag{77}$$

где ε – угловое ускорение маятника;

J – момент инерции маятника относительно оси вращения O.

Модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением равен квадрату круговой частоты

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}.$$

Следовательно,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}.$$

Из (77) получим уравнение свободных гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0,$$

где

$$J = J_c + ml^2.$$

Физический маятник можно рассматривать как математический, если считать, что вся масса маятника, сосредоточена в точке расположенном на расстоянии $l_{пр} = \dfrac{J}{ml}$ (приведенная длина физического маятника) от точки подвеса маятника. Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, который колеблется с физическим маятником синхронно. Точка $O^{/}$ на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстоянии $l_{пр}$, называется *центром качания физического маятника* (см. рис. 7.4).

7.2. Энергия гармонических колебаний

Полная энергия гармонического колебания W определяется суммой кинетической W_k и потенциальной W_p энергии:

$$W = W_k + W_p = \frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \tag{78}$$

Подставляя в (78) выражение для скорости из (73), а для смещения – из (70), получим:

$$W = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2[\,cos^2\,(\omega_0 t + \varphi_0) + sin^2\,(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}mA_0^2\omega_0^2.$$

При свободных механических колебаниях кинетическая и потенциальная энергии периодически изменяются. При максимальном отклонении тела от положения равновесия его скорость и кинетическая энергия обращаются в нуль. В этом положении потенциальная энергия колеблющегося тела достигает максимального значения.

Для груза на пружине потенциальная энергия – это энергия упругих деформаций пружины. Для математического маятника – это энергия в поле тяготения Земли.

Когда тело при своем движении проходит через положение равновесия, его скорость максимальна. Тело проскакивает положение равновесия по закону инерции. В этот момент оно обладает максимальной кинетической и минимальной потенциальной энергией. Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии. При дальнейшем движении начинает увеличиваться потенциальная энергия за счет убыли кинетической энергии и так далее.

Таким образом, при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Если в колебательной системе отсутствует трение, то полная механическая энергия при свободных колебаниях остается неизменной.

7.3. Сложение колебаний одного направления и одинаковой частоты

Сложим два колебания, которые определяются уравнениями

$$x_1 = A_1 \, cos \, (\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \, cos \, (\omega t + \varphi_2).$$

Воспользуемся методом вращающейся амплитуды (рис. 7.5)

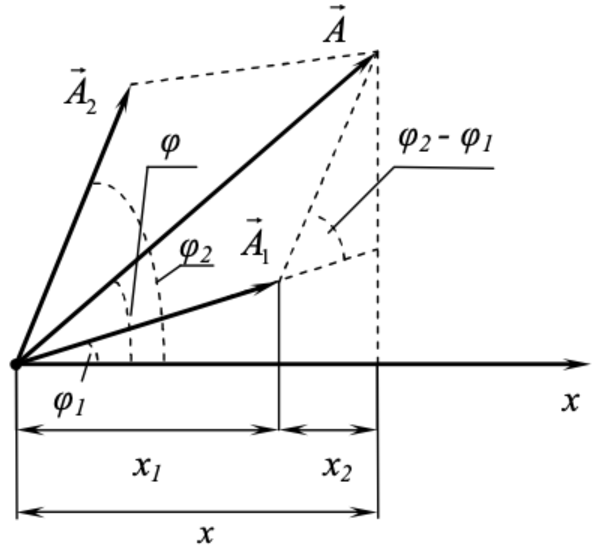


Рис. 7.5. Метод вращающейся амплитуды

Результирующее колебание равно сумме складываемых колебаний:

$$x = x_1 + x_2 = A \, cos \, (\omega t + \varphi).$$

Воспользовавшись рис. 7.5 и теоремой косинусов, можно получить, что амплитуда результирующего колебания

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\,cos\,[\pi - (\varphi_1 - \varphi_2] \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\,cos\,(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

При $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm\, 2m\pi$, $m = 0{,}1{,}2...$, амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний $A = A_1 + A_2$.

При $(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm\,(2m + 1)\pi$, $m = 0{,}1{,}2...$, амплитуда результирующего колебания равна модулю разности амплитуд складываемых колебаний $A = |A_1 - A_2|$.

Начальная фаза результирующих колебаний

$$tg\,\varphi = \frac{A_1\,sin\,\varphi_1 + A_2\,sin\,\varphi_2}{A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,\varphi_2}.$$

Приведенный подход для нахождения результирующей амплитуды и начальной фазы при сложении колебаний лежит в основе описания такого оптического явления как интерференция света.

Биения – периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами (рис. 7.6)

$$x_1 = A\,cos\,(\omega t),$$

$$x_2 = A\,cos\,(\omega + \Delta\omega)t,\ \Delta\omega \ll \omega.$$

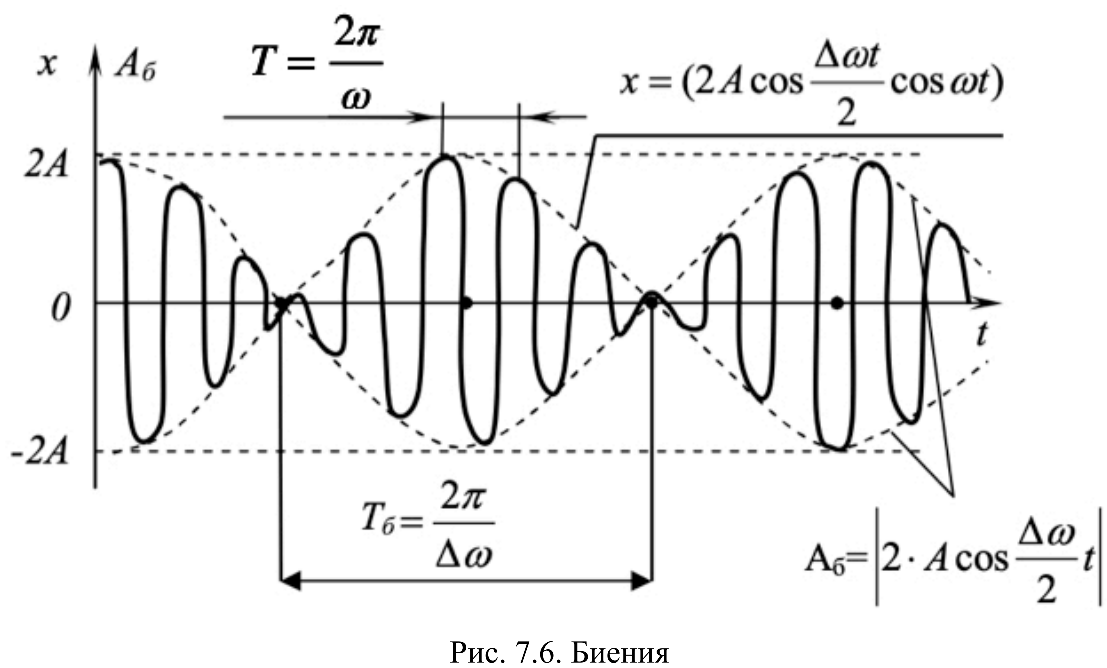


Рис. 7.6. Биения

Можно получить, что результирующее колебание

$$x = (2A\, cos\, \frac{\Delta\omega}{2} t)\, cos\,(\omega t),$$

где амплитуда $A_б = 2A\, cos\, \frac{\Delta\omega}{2} t$ зависит от времени, период колебаний

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

7.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты ω_0. Пусть материальная точка участвует в двух колебаниях, которые совершаются вдоль координатных осей OX и OY. Уравнения колебаний будут

$$x = A\, cos\,(\omega_0 t + \varphi_1),$$
$$y = B\, cos\,(\omega_0 t + \varphi_2). \tag{79}$$

Найдем уравнение траектории результирующего движения точки, для чего из приведенных уравнений (79) исключим время t. Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{x}{A} = cos\,(\omega_0 t)\, cos\, \varphi_1 - sin\,(\omega_0 t)\, sin\, \varphi_1, \tag{80}$$

$$\frac{y}{B} = cos\,(\omega_0 t)\, cos\, \varphi_2 - sin\,(\omega_0 t)\, sin\, \varphi_2. \tag{81}$$

Из (80) и (81) можно получить уравнение траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} cos\,(\varphi_2 - \varphi_1) = sin^2\,(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{82}$$

Траекторией результирующего движения является эллипс. Характеристики этого эллипса зависят от разности фаз слагаемых колебаний.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть разность фаз слагаемых колебаний $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Уравнение траектории результирующего колебания в этом случае из (82):

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}=0,$$

откуда $x = y\dfrac{A}{B}$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат. Вдоль этой прямой точка совершает гармоническое колебание с циклической частотой ω_0, и амплитудой $C=\sqrt{A^2+B^2}$. Такие колебания называются линейно поляризованными (рис. 7.7, *а*).

2. Рассмотрим случай, когда разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=\pi$. Уравнение траектории будет

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{2xy}{AB}=0,$$

откуда $x=-y\dfrac{A}{B}$ (рис. 7.7, *б*).

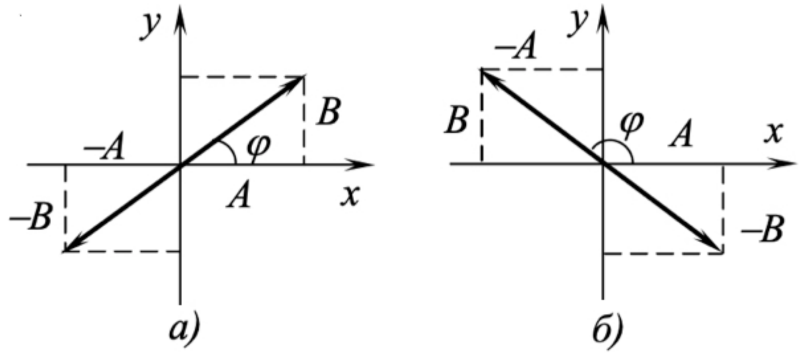


Рис. 7.7. Результат сложения взаимно перпендикулярных колебаний при разности фаз $\varphi_2-\varphi_1=0$

3. Фазы слагаемых колебаний отличаются на $\pi/2$ или $3\pi/2$, тогда уравнение траектории имеет вид

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Получили каноническую формулу уравнения эллипса (оси координат совпадают с осями эллипса). В этом случае колебательное движение происходит по эллипсу с полуосями A и B (рис. 7.8).

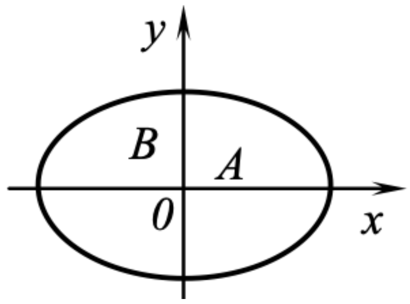


Рис. 7.8. Результат сложения взаимно перпендикулярных колебаний при разности фаз $\pi/2$

Причем можно указать, что движение совершается по часовой стрелке, если $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, и против нее, если $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$. Такие колебания называются *эллиптически поляризованными*.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу* (рис. 7.9). Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний.

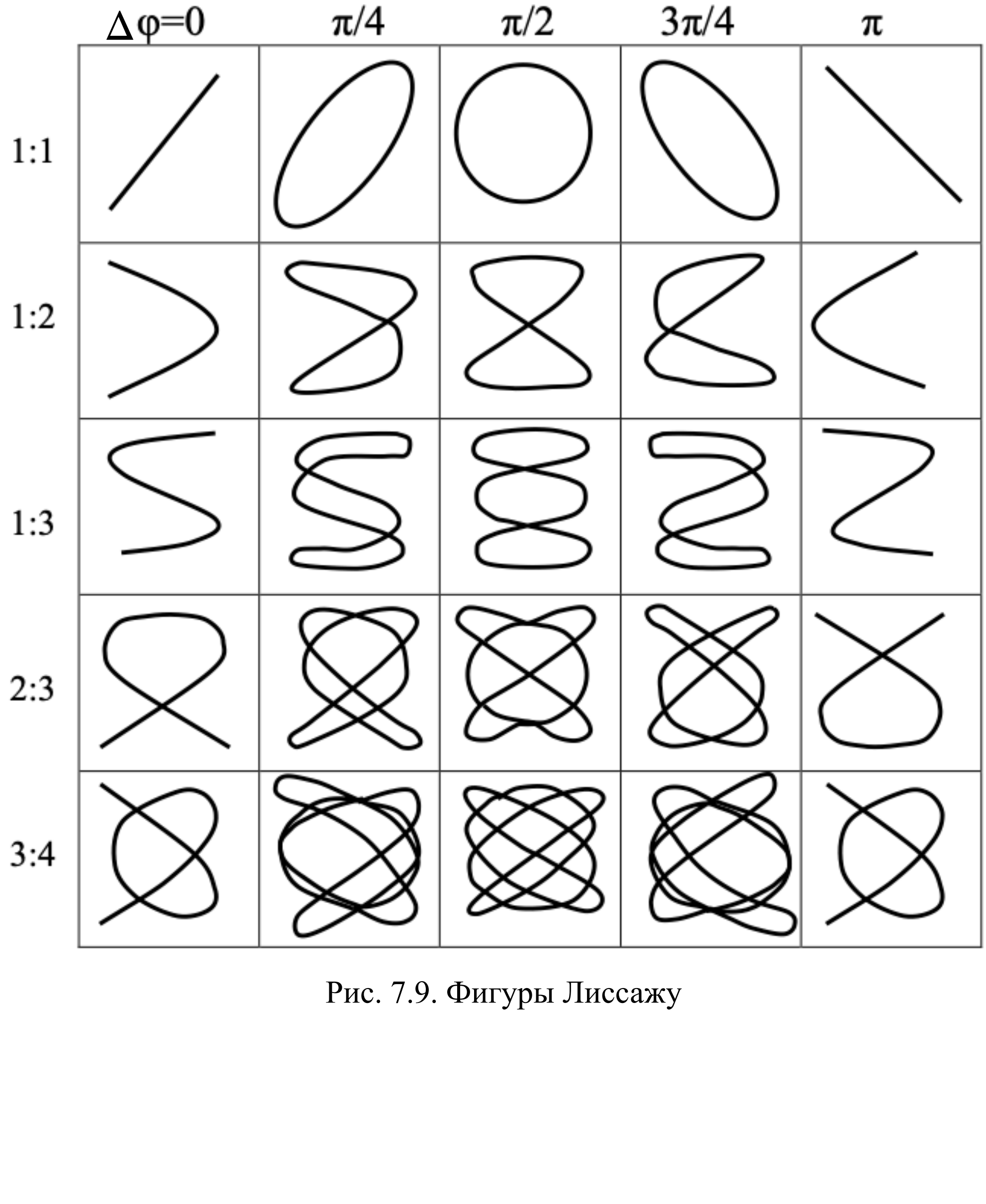


Рис. 7.9. Фигуры Лиссажу

7.5. Затухающие колебаний

Затухающими колебаниями называются свободные колебания механической системы при наличии сил трения или сил сопротивления среды.

Скорость затухания колебаний зависит от величины сил трения. Интервал времени τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2{,}7$ раз, называется *временем релаксации*

$$\tau = \frac{1}{\beta},$$

где β – коэффициент затухания колебаний.

Частота свободных колебаний зависит от скорости затухания колебаний. При возрастании сил трения собственная частота уменьшается. Однако изменение собственной частоты становится заметным лишь при больших силах трения, когда собственные колебания быстро затухают.

Рассмотрим пружинный маятник. Выведем тело из положения равновесия, растянув или сжав пружину, после чего предоставим механическую систему самой себе. В процессе движения на тело действует сила упругости пружины и сила сопротивления среды, которая в простейшем случае пропорциональна модулю скорости тела и направлена противоположно скорости:

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

$$F_{\text{сопр}} = -r\vartheta,$$

где r – коэффициент сопротивления среды. Уравнение движения тела тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (83)$$

где

$$2\beta = \frac{r}{m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

ω_0 – частота колебаний, с которой бы совершались колебания в отсутсвие сопротивления среды (собственная частота системы). Выражение (83) называется *дифференциальным уравнением затухающих колебаний.*

Решение уравнения (83):

$$x = A_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi_0),$$

где амплитуда колебаний $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ убывает с течение времени (рис. 7.10);

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

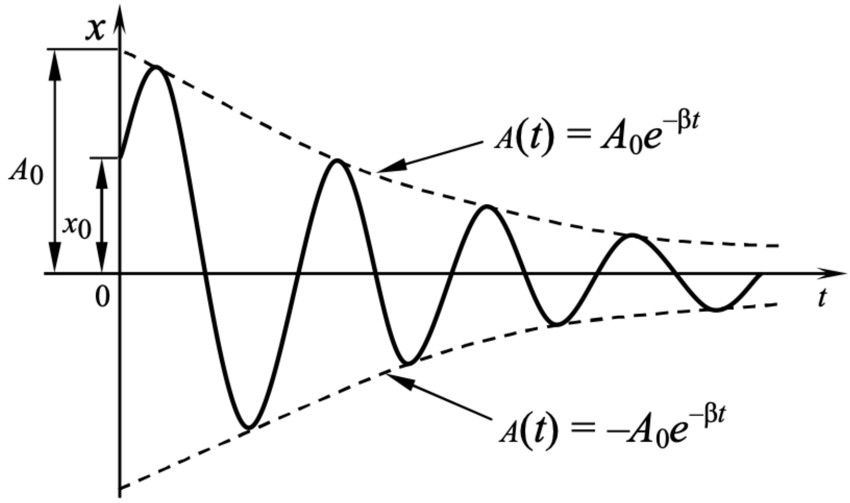


Рис. 7.10. Затухающие колебания

В случае малых затуханий можно условно использовать понятие периода затухающих колебаний как промежутка времени между двумя последующими максимумами колеблющейся физической величины:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных затухающих колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

называется *декрементом затухания*, а его логарифм

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд колебаний через один период. N_e – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз.

7.6. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – колебания, совершающиеся под воздействием внешней периодической силы, например, $F = F_0 \cos \omega t$.

В результате воздействия внешней силы колебания будут незатухающими (рис. 7.11). Тогда второй закон Ньютона, учитывая силу трения (сопротивления) и возмущающую силу, будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\beta\frac{dx}{dt} - \omega_0^2 x + F_0 \cos \omega t \quad (84)$$

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

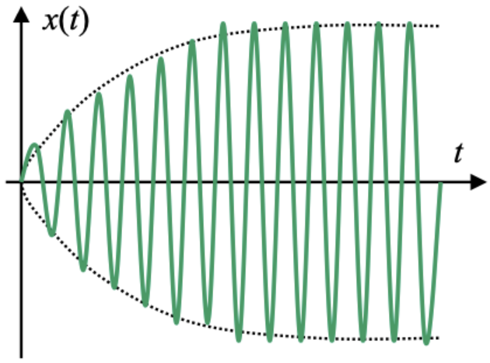


Рис. 7.11. Вынужденные колебания

Дифференциальное уравнение (84) является линейным неоднородным уравнением.

Решение данного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0),$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – собственная частота затухающих колебаний.

Частное решение имеет вид $x_2 = A\cos(\omega t - \varphi)$, где A – амплитуда вынужденных колебаний. Общее решение есть сумма $x = x_1 + x_2$. Со временем в системе установятся колебания, частота которых равны частоте вынуждающей силы.

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой к собственной частоте колебательной системы, рис. 7.12. Резонансная частота

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

максимальная амплитуда колебаний

$$A_{рез} = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

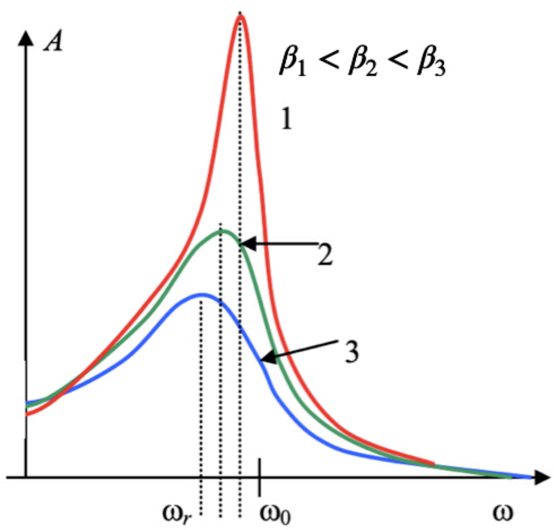


Рис. 7.12. Резонанс

Чем меньше β, тем больше $A_{\text{рез}}$.

Резонанс, как и любое другое физическое явление, имеет как положительные, так и отрицательные последствия. Среди положительных можно выделить использование резонанса в музыкальных инструментах. Особенная форма скрипки, виолончели, контрабаса, гитары способствует резонансу стоячих звуковых волн внутри корпуса инструмента, составляющих гармонику, и музыкальный инструмент дарит любителям музыки необыкновенное звучание. Известнейшие мастера музыкальных инструментов такие, как Николо Амати, Антонио Страдивари и Андреа Гварнери, совершенствовали форму, подбирали редкие породы древесины и изготавливали специальный лак, чтобы усилить резонирующий эффект, сохранив при этом мягкость и нежность тембра. Именно поэтому каждый такой инструмент имеет свой особенный, неповторимый звук.

Помимо этого, известен способ резонансного разрушения при дроблении и измельчении горных пород и материалов. Это происходит так: при движении дробимого материала с ускорением силы инерции будут вызывать напряжения и деформации, периодически меняющие свой знак, – так называемые вынужденные колебания. Совпадение соответствующих частот вызовет резонанс, а силы трения и сопротивления воздуха будут сдерживать рост амплитуды колебаний, однако все равно она может достичь величины, значительно превышающей деформации при ускорениях, не меняющих знак. Резонанс сделает дробление и измельчение горных пород и материалов существенно эффективнее. Такую же роль резонанс играет при сверлении отверстий в бетонных стенах при помощи электрической дрели с перфоратором.

Явление резонанса мы также используем в различных устройствах, использующих радиоволны таких, как телевизоры, радиоприемники, мобильные телефоны и так далее. Радио- или телесигнал, транслируемый передающей станцией, имеет очень маленькую амплитуду. Поэтому, чтобы увидеть изображение или услышать звук, необходимо их усилить и, вместе с тем, понизить уровень шума. Это и достигается при помощи явления резонанса. Для этого нужно настроить собственную частоту приемника, в основе представляющего собой электромагнитный колебательный контур, на частоту передающей станции. При совпадении частот наступит резонанс, и амплитуда радио- или телесигнала существенно вырастет, а сопутствующие ему шумы останутся практически без изменений. Это обеспечит достаточно качественную трансляцию.

Один из видов магнитного резонанса – электронный парамагнитный резонанс – открытый в 1944 году русским физиком Е. К. Завойским, применяется при исследовании кристаллической структуры элементов, химии живых клеток, химических связей в веществах и т. д. Электроны в веществах ведут себя как микроскопические магниты. В разных веществах они переориентируются по-разному, если поместить вещество в постоянное внешнее магнитное поле и воздействовать на него радиочастотным полем. Возврат электронов к исходной ориентации сопровождается радиочастотным сигналом, который несет информацию о свойствах электронов и их окружении. Этот метод представляет собой один из видов спектроскопии.

Несмотря на все преимущества, которые можно получить при помощи резонанса, не следует забывать и об опасности, которую он способен принести: землетрясения или сейсмические волны, работа сильно вибрирующих технических устройств может вызвать разрушения части зданий или даже зданий целиком. Кроме того, землетрясения могут привести к образованию огромных резонансных волн: цунами с очень большой разрушительной силой.

Также резонанс может стать причиной разрушения мостов. Существует версия, что один из деревянных мостов Санкт-Петербурга (сейчас он каменный) действительно был разрушен воинским соединением. Как сообщали газеты того времени, подразделение двигалось на лошадях, которых пришлось впоследствие извлекать из воды. Естественно, что лошади гвардейцев двигались строем, а не как попало.

В наше время резонансные колебания, вызванные ветром, чуть не стали причиной обрушения волгоградского моста, теперь неофициально называемого «Танцующим мостом». 20 мая 2010 года ветер и волны раскачали его до такой степени, что его пришлось закрыть. При этом был слышен оглушающий скрежет многотонных металлических конструкций. Дорожное покрытие моста через Волгу в течение часа было похоже на развивающееся на ветру полотнище. Бетонные волны, по словам очевидцев, были высотой около метра. Когда мост «затанцевал», по нему ехало несколько десятков автомашин. К счастью, мост устоял, и никто не пострадал.

8. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

8.1. Общая характеристика волновых процессов. Продольные и поперечные волны. Фазовая скорость. Уравнение волны. Интерференция волн

При рассмотрении причин затухания колебаний в колебательных системах ранее мы считали, что это происходит в результате действия сил сопротивления. Однако, строго говоря, взаимодействие системы со средой не сводится лишь к потерям энергии под действием сил трения (сопротивления), так как это вызывало бы лишь нагревание среды. В действительности среда не только нагревается, но и приходит в движение, совершая вынужденные колебания. Например, при разговоре мы слышим речь, звуковые колебания, передаваемые воздушной газовой средой.

Среда (тело) называется упругой, а ее деформации упругими, если при снятии внешнего воздействия она возвращается в исходное состояние. В первом приближении все среды, за исключением разреженных газов, можно считать упругими. Распространение упругих деформаций в среде называется *упругой волной*. Волна, в отличие от колебаний, характеризуется периодичностью не только во времени, но и в пространстве.

Волны называются продольными, если колебания (возмущения) в них совершаются в направлении распространения колебаний (вдоль направления распространения волны). Такие волны характерны для газов, но могут возникать и в более плотных средах, например, жидкостях, причем, чем выше плотность среды, тем больше скорость распространения колебаний в ней, больше скорость волны.

Волны называются поперечными, если колебания в них совершаются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Такие волны наблюдаются в колеблющихся струнах музыкальных инструментов.

В твердых телах могут наблюдаться и те, и другие волны. Особый случай – волны на поверхности жидкости: в этом случае имеет место сложение взаимноперпендикулярных колебаний, в результате точки среды колеблются по сложной, например, эллиптической, траектории (фигуры Лиссажу).

Дадим ряд определений понятий, которыми будем широко пользоваться в дальнейшем.

Уравнением волны называют закон, по которому определяются значения какой-либо физической характеристики колебаний в любой момент времени на любом расстоянии от источников возбуждения колебаний.

Волна называется гармонической, если колебания в ней происходят по гармоническому закону.

Распространение волны в однородной изотропной непоглощающей среде описывается дифференциальным уравнением в частных производных – волновым уравнением

$$\nabla^2 s - \frac{1}{\vartheta_{\text{ф}}^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0, \qquad (85)$$

где $\vartheta_{\text{ф}}$ – фазовая скорость волны;

$$\nabla^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа.

Если волна распространяется в среде со скоростью $\vartheta_{\text{ф}}$ и колебания в ней осуществляются по какому-либо закону, то любая частица среды, находящаяся на расстоянии x от источника, будет совершать колебания, согласно такому же закону, спустя время

$$\tau = x/\vartheta_{\text{ф}},$$

называемое временем запаздывания. Считая волну одномерной, можно подстановкой показать, что решением уравнения (85) является функция, сходная по виду с выражением, описывающим рассмотренные ранее гармонические колебания:

$$s(x,t) = A\,sin\,(\omega t - \omega\frac{x}{\vartheta_{\text{ф}}} + \varphi_0), \qquad (86)$$

или

$$s(x,t) = A\,cos\,(\omega t - \omega\frac{x}{\vartheta_{\text{ф}}} + \varphi_0).$$

Если волновой процесс сопровождается переносом энергии, то волна называется *бегущей*, в противном случае – *стоячей,* образующейся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Лучом волны называют прямую, в каждой точке пространства совпадающую с направлением распространения волны. *Волновой поверхностью* называется геометрическое место точек, в которых колебания совпадают по фазе (рис. 8.1). Переднюю из волновых поверхностей называют *волновым фронтом. Плоская волна* – это волна, волновые поверхности которой представляют собой совокупность параллельных друг другу плоскостей.

Рис. 8.1. Волновые поверхности

Длиной волны λ называют путь, который проходит возмущение (волна) за период колебаний T:

$$\lambda = \vartheta_{\text{ф}} T.$$

Волновым вектором называется вектор $\overrightarrow{k}$, совпадающий по направлению с лучом волны и по модулю равный волновому числу $k = 2\pi/\lambda$. Волновое число показывает, сколько длин волн λ укладывается на отрезке 2π. С учетом сказанного формулу (79) можно переписать в виде

$$s(x,t) = A\,sin\,(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{87}$$

– *уравнение плоской бегущей волны.*

Фазовой скоростью волны $\vartheta_{\text{ф}}$ называют скорость перемещения точек пространства, в которых фаза постоянна:

$$\Phi(t) = \omega t - kx + \varphi_0 = const;$$

отсюда

$$kx = \omega t + \varphi_0,\ \vartheta_{\text{ф}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Фазовая скорость – это скорость «перемещения фазы», а не материальных частиц; в общем случае она может быть больше скорости света c. Согласно другому определению, *фазовая скорость* – скорость распространения синусоидальной волны, так как она равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы синусоидальной волны.

В стержне, по которому распространяется продольная упругая гармоническая волна, фазовая скорость $\vartheta_{ф}$ определяется выражением

$$\vartheta_{ф} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга материала стержня;

ρ – плотность материала недеформированного стержня, т. е. невозмущенного волновым процессом.

Для поперечных упругих волн фазовая скорость равна

$$\vartheta_{ф} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига;

ρ – плотность неограниченной изотропной твердой среды.

Скорость поперечных волн в струне, например в натянутой нити, зависит от натяжения струны:

$$\vartheta_{ф} = \sqrt{\frac{F}{S\rho}},$$

где F – сила натяжения струны;

ρ и S – соответственно плотность материала струны и площадь ее поперечного сечения.

Уравнение сферической волны:

$$s(r,t) = \frac{A}{r} cos\,(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где r – расстояние от источника волны до рассматриваемой точки среды.

Амплитуда колебаний в сферической волне убывает с расстоянием по закону $\frac{1}{r}$.

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, линейна, то скорость волн не зависит от их интенсивности и к этим волнам применим *принцип суперпозиции (наложения) волн*: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее возмущение в любой момент времени в любой точке пространства равно сумме возмущений, соответствующих каждой из этих волн порознь.

Когерентностью называется согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Две волны называются когерентными, если разность их фаз не зависит от времени.

Интерференцией волн называется явление наложения волн, при котором колебания в одних точках пространства усиливают, а в других ослабляют друг друга, в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Необходимым условием интерференции является когерентность складывающихся волн.

Особым случаем интерференции являются *стоячие волны* – волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами (рис. 8.2).

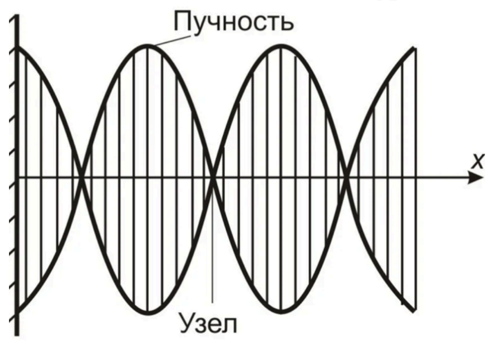


Рис. 8.2. Стоячая волна

Если рассмотреть две плоские бегущие волны (87) с одинаковыми амплитудами и частотами, которые распространяются вдоль OX навстречу друг другу, то можно получить уравнение стоячей волны:

$$s = s_1 + s_2 = 2A\,cos\,kx\,cos\,\omega t = 2A\,cos\,\frac{2\pi x}{\lambda}\,cos\,\omega t,$$

где $|2A\,cos\,\frac{2\pi x}{\lambda}|$ – амплитуда стоячей волны.

Пучностями стоячей волны называются точки среды, где амплитуда стоячей волны достигает максимального значения $2A$. Их координаты x_m определяются из уравнения

$$\frac{2\pi x_m}{\lambda} = \pm\, m\pi,\ (m = 0,1,2,...).$$

Узлами стоячей волны называются те точки среды, в которых амплитуда стоячей волны обращается в нуль (в них отсутствуют колебания). Координаты узлов x_m находят из уравнения

$$\frac{2\pi x_m}{\lambda} = \pm\,(m + \frac{1}{2})\pi,\ (m = 0,1,2,...).$$

Если среда, от которой происходит отражение, менее плотная, то на границе сред образуется пучность стоячей волны. Иначе, если среда более плотная, то на границе сред образуется узел стоячей волны.

Понятие энергии волны трактуется неоднозначно. Под энергией волны будем понимать сумму кинетической энергии колеблющихся частиц и потенциальной энергии деформации среды. Если $\vartheta_{ч}$ – скорость колебаний частиц среды плотностью ρ, $\vartheta_{ф}$ – фазовая скорость волны, а ε – относительная деформация среды, то объемная плотность энергии упругих волн в данной (упругой) среде

$$\varpi = \varpi_k + \varpi_p = \frac{dW_k}{dV} + \frac{dW_p}{dV} = \frac{1}{2}\rho(\vartheta_{ч}^2 + \vartheta_{ф}^2\varepsilon^2). \qquad (88)$$

Для плоской продольной волны, распространяющейся в среде, где s – смещение частиц

$$\vartheta_{ч} = \partial S/\partial t, \vartheta_{ф} = \partial x/\partial t, \varepsilon = -\,\partial s/\partial x = -\,\vartheta_{ч}/\vartheta_{ф}.$$

Скоростью переноса волной энергии называется скорость перемещения в пространстве поверхности, соответствующей максимальному значению объемной плотности энергии. Для синусоидальных волн эта скорость равна их фазовой скорости.

Вектор плотности потока энергии называется вектором Умова (Умова–Пойтинга)

$$\overrightarrow{U} = \varpi\overrightarrow{\vartheta}_1,$$

где ϑ_1 – скорость переноса энергии волной.

Вектор Умова направлен в сторону переноса энергии волной, а по модулю равен отношению потока энергии $d\Phi_{\varpi}$сквозь малую площадку dS к площади проекции этой площадки $dS_{\perp}$ на плоскость, перпендикулярную направлению переноса энергии (рис. 8.3).

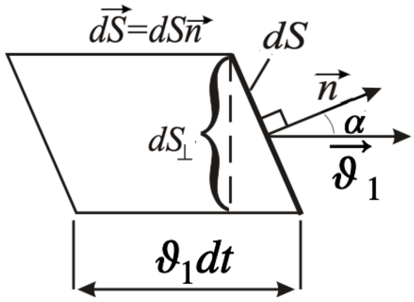


Рис. 8.3. Энергия dW, переносимая волной за время dt через площадку среды dS

Скалярная величина, равная модулю среднего значения вектора Умова, называется интенсивностью волны $I = |<U>|$. Интенсивность и амплитуда плоской волны не изменяются, если не происходит поглощения в среде.

8.2. Эффект Доплера

Кристиан Доплер
(1803–1853)

Эффектом Доплера называют изменение частоты ν (длины λ) волны, воспринимаемой приемником сигнала при движении источника сигнала и приемника друг относительно друга. Например, понижение тона (частоты) воспринимаемого человеком гудка тепловоза, удаляющегося от перрона.

Пусть источник и приемник движутся вдоль соединяющей их прямой со скоростями источника и приемника $\vartheta_{\text{И}}$ и $\vartheta_{\text{П}}$ (положительны при сближении и отрицательны при удалении источника и приемника); $\nu_{\text{И}}$ – частота колебаний источника; $\vartheta_{\text{зв}}$ – скорость распространения звука в данной среде. Если направления $\vartheta_{\text{И}}$ и $\vartheta_{\text{П}}$ не совпадают с проходящей через источник и приемник прямой, то берут их проекцию на направление этой прямой.

В общем случае частота колебаний ν, воспринимаемых приемником, равна

$$\nu = \frac{\vartheta_{\text{зв}} \pm \vartheta_{\text{П}}}{\vartheta_{\text{зв}} \mp \vartheta_{\text{И}}} \nu_{\text{И}}. \qquad (89)$$

Верхние знаки в выражении (89) берутся, если при движении источник и приемник сближаются, следовательно, $\nu > \nu_{\text{И}}$. Нижние знаки в формуле (89) берутся, когда они взаимно удаляются, при этом $\nu < \nu_{\text{И}}$.

Одно из наиболее широкоизвестных применений эффекта Доплера – определение скорости движения объектов при помощи датчиков скорости. Радиосигналы, посылаемые радаром, отражаются от машин и возвращаются обратно. При этом, смещение частоты, с которой сигналы возвращаются, имеет непосредственную связь со скоростью машины. Сопоставляя скорость и изменение частоты, можно вычислять скорость. Эффект Доплера широко применяется в медицине. На нем основано действие приборов ультразвуковой диагностики. Эффект Доплера также используют в оптике, акустике, радиоэлектронике, астрономии, радиолокации. Установлено, что галактики удаляются друг от друга, Вселенная расширяется.

Вопросы

1. Что называют волной? Упругой волной?
2. Что называют продольными и поперечными волнами?
3. Что называют волновой поверхностью, волновым фронтом, лучом волны? Длиной волны? Волновым вектором?
4. Что называют фазовой скоростью? От чего она зависит?
5. Что называют интерференцией волн?
6. Что называют стоячей волной? Что такое пучность и узел стоячей волны? Запишите ее уравнение.
7. В чем состоит эффект Доплера?

9. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Раздел механики, изучающий движение жидкой среды и ее взаимодействие с твердыми телами, называется *гидродинамикой* (воздушной – *аэродинамикой*). Движение среды (жидкости, газа) называют *течением*, а саму движущуюся среду – *потоком*. Условия массопереноса при течении среды называются *режимом течения*. Режим течения, при котором вектор скорости в каждой точке постоянен по модулю и направлению, называется *стационарным*, или *установившимся*, иначе – *нестационарным*.

Линия тока – мысленно проведенная в потоке линия, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению с вектором скорости жидкости в этой точке. Линии тока, проходящие через замкнутый контур, образуют трубку тока. Поток или его часть, ограниченный трубкой тока называется *струйкой тока* (рис. 9.1).

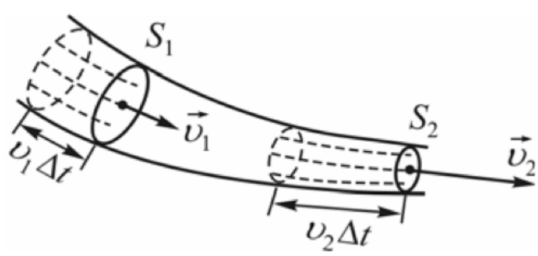


Рис. 9.1. Струйка тока

В отличие от твердых тел, жидкости и газы в состоянии равновесия обычно не обладают упругостью формы, а лишь упругостью объема. Это значит, что газ и жидкость принимают форму сосуда, в котором находятся, но жидкость имеет определенный объем, а газ занимает весь объем сосуда, в котором находится (плотность газов сильно зависит от давления, а жидкостей – слабо). Исключение составляют жидкие пленки и поверхностные слои жидкости, где большую роль играет поверхностное натяжение. Механические свойства газов и жидкостей таковы, что приложение сколь угодно малой касательной силы приводит к значительным смещениям их частиц друг относительно друга, в связи с этим говорят о текучести жидкостей и газов.

Идеальная жидкость – воображаемая несжимаемая жидкость, лишенная вязкости и теплопроводности. В идеальной жидкости отсутствует внутреннее трение, т. е. нет касательных напряжений между двумя соседними слоями, она непрерывна и не имеет структуры. Такая идеализация допустима во многих случаях течения, рассматриваемых в гидроаэродинамике, и дает хорошее описание реальных течений жидкостей и газов на достаточном удалении от омываемых твердых поверхностей.

Рассмотрим течение жидкости по трубке тока, изображенной на рис. 9.1. Выделим в стационарном потоке идеальной жидкости участок достаточно узкой трубки тока, ограниченной поперечными сечениями S_1 и S_2. Эти сечения должны быть настолько малыми, чтобы скорости частиц жидкости, проходящих через любую точку каждого сечения, можно было бы считать одинаковыми по величине и перпендикулярными к сечению. Найдем объем жидкости, протекающей за интервал времени Δt через каждое из сечений S_1 и S_2. Через сечение S_1 пройдут все частицы жидкости, расстояние которых до этого сечения в начальный момент не превышало величины $\vartheta_1 \Delta t$. Откуда объем жидкости, которая протекает через сечение S_1 за время Δt, равен $S_1 \vartheta_1 \Delta t$. Аналогично, за то же время через сечение S_2 протечет объем жидкости, равный $S_2 \vartheta_2 \Delta t$. Учитывая, что жидкость несжимаемая и поток стационарный, приходим к выводу, что найденные объемы должны быть одинаковы, т. е.

$$S_1 \vartheta_1 = S_2 \vartheta_2.$$

Полученное соотношение называется *уравнением неразрывности струи*. В общем виде уравнение неразрывности можно записать в виде

$$S\vartheta = const. \tag{90}$$

Установим связь между давлением и скоростью жидкости в разных сечениях трубки. Поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость (не учитываем вязкость и сжимаемость жидкости), то в этом случае работа внутренних сил в жидкости будет равна нулю. Будем также считать, что трение между жидкостью и стенкой сосуда отсутствует.

Полное давление в потоке жидкости представляет собой сумму ее статического и динамического давлений. Статическое давление обусловлено потенциальной энергией жидкости, которая находится под давлением. Оно представляет собой сумму двух давлений: обусловленного весом выделенного объема жидкости и обусловленного внешними силами. Динамическое давление (или давление напора) обусловлено кинетической энергией жидкости, которая движется по трубе.

Рассмотрим стационарное течение жидкости (рис. 9.2). При перемещении некоторой массы жидкости Δm из одного сечения трубы во второе ее скорость, а значит, и кинетическая энергия изменяются. Внешними силами, которые действуют на эту массу жидкости, являются ее сила тяжести Δmg и силы давления со стороны жидкости, которая находится позади этой массы, $F_1 = p_1 S_1$ и со стороны жидкости, находящейся перед ней, $F_2 = p_2 S_2$. Если рассматривать эту массу в качестве физической системы, которая находится в инерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, то изменение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости, согласно теореме об изменении кинетической энергии, равно сумме работ силы тяжести и сил давления, т. е.

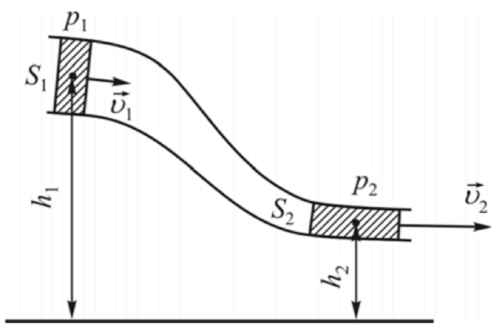


Рис. 9.2. Стационарное течение жидкости

$$\frac{\Delta m\vartheta_2^2}{2}-\frac{\Delta m\vartheta_1^2}{2}=\Delta mg(h_1-h_1)+(p_1-p_2)\Delta V,$$

где ΔV – объем жидкости, переместившейся за некоторый интервал времени с участка трубы, сечением S_1 и давлением p_1, на другой участок трубы, сечением S_2 и давлением p_2;

ϑ_1 и ϑ_1 – скорости течения жидкости в рассматриваемых сечениях;

h_1 и h_2 – высоты центра тяжести выделенной массы жидкости относительно некоторого нулевого горизонтального уровня (рис. 9.2).

После деления левой и правой частей полученного равенства на объем ΔV получим

$$\frac{\rho\vartheta_1^2}{2}+\rho gh_1+p_1=\frac{\rho\vartheta_2^2}{2}+\rho gh_2+p_2.$$

Т. к. сечения S_1 и S_2 взяты произвольно, то для любого сечения трубки тока

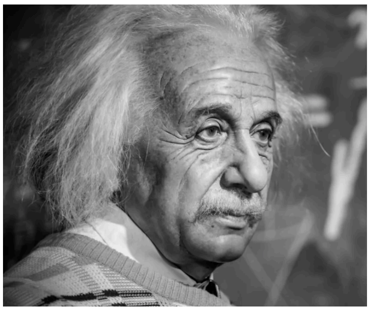
$$\frac{\rho\vartheta^2}{2}+\rho gh+p=const. \tag{91}$$

Соотношение (91) называют *уравнением Бернулли*, согласно которому при стационарном течении идеальной жидкости сумма ее статического $p+\rho gh$ и динамического $\rho\vartheta^2/2$ давлений постоянна в любом сечении трубы.

Из уравнения Бернулли следует, что при увеличении скорости течения (уменьшении сечения трубы) динамическое давление жидкости возрастает, а ее статическое давление уменьшается.

10. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

10.1. Постулаты специальной теории относительности


Альберт Эйнштейн (1879–1955)

Специальная теория относительности, начала которой были заложены Альбертом Эйнштейном в 1905 г., существенно изменила представления физиков о природе. До ее появления положения ньютоновской механики о свойствах пространства и времени являлись фундаментальными, так как подтверждались многочисленными экспериментами и долгое время ни у кого не вызывали сомнений. Однако эти эксперименты относились к изучению движения тел со скоростями значительно меньшими скорости света $\vartheta \ll c$.

Однако, по мере развития других разделов физики, начал подвергаться сомнению, например, принцип относительности Галилея. А именно возник вопрос: распространяется ли принцип относительности Галилея и на немеханические явления? Можно ли с помощью немеханических явлений различать инерциальные системы отсчета и выделить главную, абсолютную систему отсчета?

Одно из таких явлений, с помощью которых пытались различить системы отсчета, это распространение света. В конце XIX века уже было известно, что свет – это электромагнитная волна. Ученые полагали, что световые волны, подобно звуковым, должны распространяться в какой-то среде. Эта среда была названа эфиром. Считали, что эфир заполняет все пространство и пронизывает все тела. Полагали, что эфир абсолютно неподвижен и не увлекается телами. Отсюда следовало, что эфир является абсолютной и неподвижной системой отсчета.

Фундаментальный интерес представляет вопрос о величине скорости света.


Оле Рёмер (1644–1710)

Впервые экспериментально определить скорость света удалось Рёмеру в 1676 г. Он обнаружил, что затмение Ио – крупнейшего спутника Юпитера – совершается не совсем регулярно со временем (нарушается периодичность затмения). При наблюдении затмения через 6 месяцев Земля находится в диаметрально расположенной точке своей орбиты вокруг Солнца, и свет должен пройти до Земли уже другой путь.

Затмение Юпитером своего спутника Ио происходит тогда, когда Юпитер находится между Солнцем и Ио. Земля в это время находится в точке *1* (рис. 10.1). Затмение происходит примерно через каждые 42 часа, в течение которых Ио совершает оборот вокруг Юпитера.

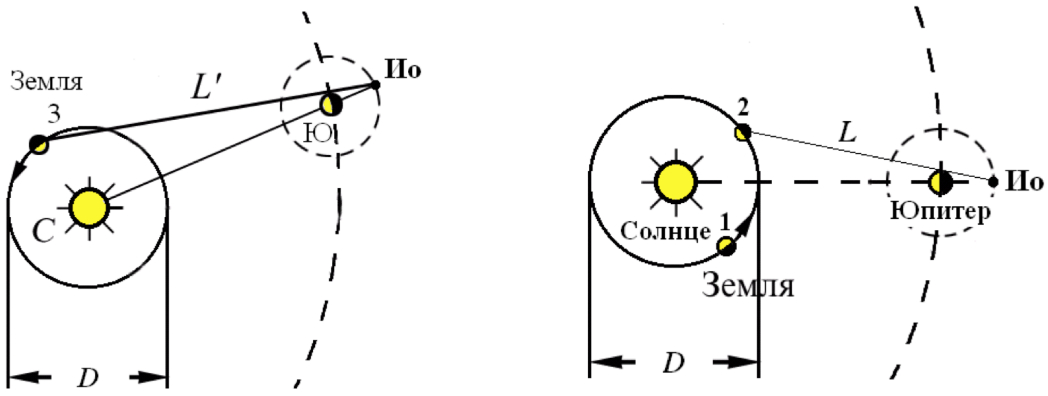


Рис. 10.1. Наблюдение затмения спутника Юпитера (Ио)

На Земле затмение наблюдается через время $\Delta t = \dfrac{L}{c}$ после фактического затмения, когда Земля находится в точке *2*. Через 6 месяцев Земля находится в точке *3*, путь, который должен пройти свет

$$L^{/} \approx L + D \Rightarrow$$

$$\Delta t^{/} = \frac{L^{/}}{c} = \frac{L}{c} + \frac{D}{c} = \Delta t + \frac{D}{c} \Rightarrow$$

$$c = \frac{D}{\Delta t^{/} - \Delta t}\,. \qquad (92)$$

Из (92) Рёмер получил значение $c = 214300$ км/с. Значение оказалось достаточно приближенным, учитывая используемые приближения. В настоящее время за значение скорости света принимается $c = 299\,792\,458$ м/с. После измерения скорости света встал вопрос о зависимости скорости света от направления ее распространения. Это вопрос об изотропности пространства. Если эти скорости отличаются, то пространство не изотропно. И точная скорость света, показанная выше, не может быть использована в целях эталонных.

Альберт Майкельсон (1852–1931)

В 1881 г. американский физик Альберт Майкельсон провел эксперимент (а затем повторил его совместно с Эдвардом Морли в 1887 г.), цель которого заключалась в определении скорости света в разных направлениях по отношению к движению Земли. При этом было использовано движение Земли по орбите со скоростью около 30 км/с. Майкельсон соорудил интерферометр с целью экспериментально подтвердить существование неподвижного эфира, заполняющего все пространство Вселенной, посредством которого распространяется свет в виде волн. Такое представление царило в научных кругах того времени.

Идея была следующая: Земля вращается вокруг Солнца со скоростью 30 км/с, а эфир неподвижен. Поэтому должен проявиться эффект «обдувания» Земли эфиром, вследствие этого будет происходить как бы «снос» световых волн этим «ветром» в направлении, противоположном полету Земли. А точнее, так как эфир неподвижен, скорость распространения световых волн во всех направлениях одинаковая. Но так как интерферометр движется вместе с Землей вокруг Солнца со скоростью 30 км/с, то будет разность хода лучей в направлении «полета» и в перпендикулярном направлении. Т. е. фронт волны, вышедший из источника, разделяется на полупрозрачном зеркале на два направления до зеркал, при отражении от них вновь сходятся на полупрозрачном зеркале и направляются в объектив прибора (рис. 10.2). При этом должна образоваться разность хода фронтов волн лучей, соответствующих фронту волны, излученному источником. Эта разность хода будет проявляться в виде интерференционной картины, визуально наблюдаемой в окуляр прибора. В данной конструкции интерференционная картина будет в любом случае, т. к. невозможно установить зеркала с точностью до нанометров. Но Майкельсон рассчитывал, что при повороте интерферометра вокруг оси интерференционная картина будет меняться, если все будет соответствовать теории о существовании эфира. Более года Майкельсон повторял эксперимент, однако результат получался не тот, которого он ожидал. Впоследствии множество ученых пыталось повторять опыт Майкельсона на более совершенных установках, однако результат не менялся. В конечном итоге ученый мир заговорил о том, что вездесущего и всепроникающего эфира просто не существует и надо найти истинную причину отрицательных результатов. Тогда Лоренц предложил идею: происходит сокращение размеров тел в направлении движения; предложил соответствующие формулы (будут приведены ниже), которые были названы его именем. С использованием этих формул результаты опыта Майкельсона–Морли как раз и получаются такими, какими и были получены, т. е. нулевыми.

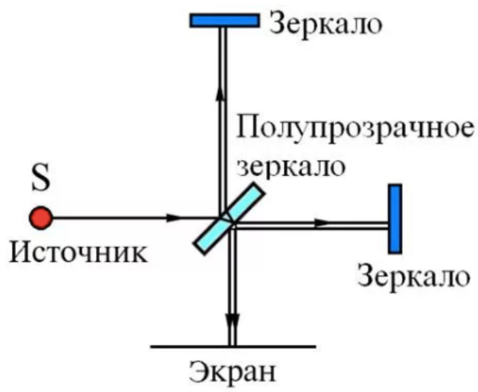


Рис. 10.2. Установка для эксперимента

Рассмотрим более подробно идею Майкельсона. В поставленном опыте сравнивалось время прохождения светом двух путей: *SAS* и *SBS* (рис. 10.3). Предположим, что Земля движется влево относительно эфира со скорость ϑ.

Около Земли возникает «эфирный ветер», движущийся со скоростью $\vec{\vartheta}$ вправо. На пути SA скорость света относительно Земли равна $c+\vartheta$, а на обратном пути $c-\vartheta$. Тогда время прохождения пути SAS равно

$$t_{//}=\frac{l}{c-\vartheta}+\frac{l}{c+\vartheta}=\frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{1-(\frac{\vartheta}{c})^2}. \quad (93)$$

На пути SBS скорость света относительно Земли равна $c^{/}=\sqrt{c^2-\vartheta^2}$ и время прохождения этого пути

$$t_{\perp}=\frac{2l}{\sqrt{c^2-\vartheta^2}}=\frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\vartheta}{c})^2}}. \quad (94)$$

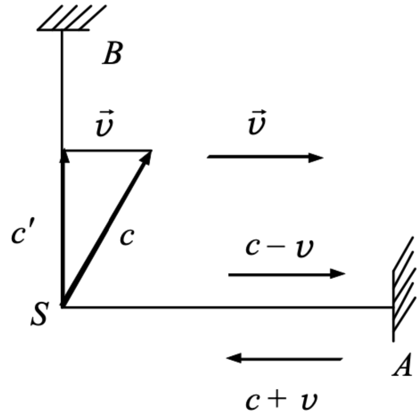


Рис. 10.3. Схема опыта Майкельсона–Морли

Видно что (93) и (94) различны. Однако результат опыта оказался отрицательным: разность времен не была обнаружена. Следовательно, свет от источника в интерферометре всегда распространяется со скоростью c относительно источника света. Скорость света c не зависит от движения источника или наблюдателя.

Отрицательный результат опыта Майкельсона показал, что:

1. Эфира (особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы отсчета) не существует.

2. К скорости света нельзя применить классический закон сложения скоростей. Скорость света не зависит от движения источника света.

Поэтому Эйнштейн предложил отказаться от представлений о существовании абсолютно покоящейся системы отсчета. Эти предложения Эйнштейн сформулировал в виде двух постулатов, которые лежат в основе специальной теории относительности:

1. *Принцип относительности Эйнштейна*: законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Иначе: уравнения, выражающие законы природы, инвариантны, т. е. не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

2. *Принцип постоянства скорости света*: скорость света в вакууме c не зависит от движения источника света или наблюдателя, одинакова во всех направлениях и равна $c=3\cdot10^8$ м/с.

На специальной теории относительности основана релятивистская механика. В релятивистской механике рассматривают классические законы движения тел (частиц) при релятивистских скоростях, т. е. сравнимых со скоростью света в вакууме.

10.2. Преобразования Лоренца

Хендрик Антон Лоренц (1853–1928)

Постулатам Эйнштейна удовлетворяют преобразования Лоренца, предложенные им в 1904 г.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: K и K'. K' движется относительно K с $\overrightarrow{\vartheta} = const$ – равномерно и прямолинейно. В начальный момент времени O и O' совпадают. В соответсвии с преобразованиями Галилея

$$x = x' + \vartheta_0 t,\ y = y',\ z = z',\ t = t',$$

$$x' = x - \vartheta_0 t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t.$$

Для релятивистских скоростей необходимы новые преобразования, удовлетворяющие постулатам Эйнштейна.

Пусть следим за точкой $x' = 0$ (начало отсчета K') из системы K: $x = \vartheta t$. Если следим за точкой $x = 0$ из системы K': $x' = -\vartheta t'$.

Преобразования координат – это формулы преобразования координат материальной точки и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти преобразования должны переходить в преобразования Галилея при скоростях движения тел малых по сравнению со скоростью света, то есть при $\vartheta \ll c$ и удовлетворять постулатам Эйнштейна.

Этому требованию отвечают только линейные преобразования:

$$x = \gamma(x' + \vartheta t'),$$
$$x' = \gamma(x - \vartheta t). \tag{95}$$

Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и та же и равна c. Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A (рис. 10.4), пройдя расстояние

$$x = ct, \tag{96}$$

то в системе K' координата светового импульса в момент достижения точки A

$$x' = ct'. \tag{97}$$

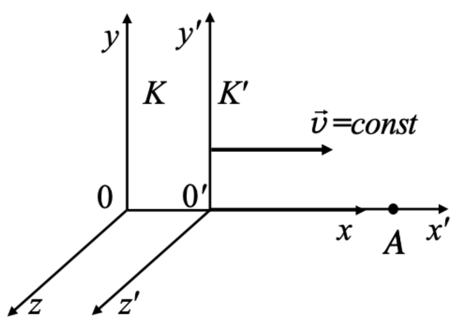


Рис. 10.4. Движение инерциальной системы отсчета K' вправо со скоростью $\overrightarrow{\vartheta}$ относительно системы отсчета K

Из (96) и (97) при помощи (95) получим

$$ct = \gamma(ct' + \vartheta t') = \gamma t'(c + \vartheta), \tag{98}$$

$$ct' = \gamma(ct - \vartheta t) = \gamma t(c - \vartheta). \tag{99}$$

Перемножим (98) и (99)

$$c^2tt' = \gamma^2tt'(c^2 - \vartheta^2) \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - \vartheta^2} = \frac{1}{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}. \tag{100}$$

Найдем из (100)

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}, \tag{101}$$

где $\beta = \dfrac{\vartheta}{c}$, выражение со знаком «$-$» нас не интересует. Подставим (101) в (95)

$$x' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{102}$$

$$x = \frac{x' + \vartheta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Так как движение происходит вдоль оси OX, то $y = y'$, $z = z'$. Найдем преобразование для времени. Из (102) получим

$$x\sqrt{1 - \beta^2} = x' + \vartheta t' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \vartheta t' \Rightarrow$$

$$t' = \frac{t - x\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Аналогично можно получить $t = \dfrac{t' + x'\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

10.3. Следствия из преобразований Лоренца

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 могут происходить 2 события. В системе $K^/$ им соответствуют координаты $x_1^/$ и $x_2^/$, время $t_1^/$ и $t_2^/$.

1. Если в системе K события происходят в одной точке $x_1 = x_2$ и являются одновременными $t_1 = t_2$, будут ли события одновременными в системе $K^/$, движущейся относительно системы K со скоростью ϑ?

Из преобразований Лоренца следует, что

$$x_1^/ = x_2^/ \text{ и } t_1^/ = t_2^/,$$

события в системе $K^/$ происходят в одной точке и являются одновременными.

Следовательно, эти события для любых инерциальных систем отсчета являются одновременными и пространственно совпадающими.

2. Пусть в системе K события происходят в разных точках $x_1 \neq x_2$ – пространственно разобщены, но одновременно $t_1 = t_2$. Будут ли эти события одновременны в системе $K^/$, движущейся относительно K со скоростью ϑ?

В системе $K^/$:

$$x_1^/ = \frac{x_1 - \vartheta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2^/ = \frac{x_2 - \vartheta t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t_1^/ = \frac{t - x_1\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2^/ = \frac{t - x_2\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Видим, что $x_1^/ \neq x_2^/$, $t_1^/ \neq t_2^/$, события остаются пространственно разобщенными и оказываются неодновременными.

Ответим на вопрос: являются ли одинаковыми в разных системах отсчета интервалы времени между событиями? Пусть в системе $K^/$ в точке с координатой $x_1^/$ произошли два события, интервал между событиями в этой системе

$$\Delta t_0^/ = t_2^/ - t_1^/,$$

где $t_1^/$ и $t_2^/$– показания часов, когда произошло первое событие и второе события.

Индекс «0» означает, что событие происходит в одной точке пространства в системе отсчета $K^/$. Собственное время показывают часы, покоящиеся относительно системы отсчета в некоторой точке с координатой, в которой произошли *2* события. Эти часы называются *покоящимися.* Часы, которые движутся относительно системы отсчета, в некоторой точке которой произошли два события, называются *движущимися.*

В системе отсчета $K^{/}$:

$$x_1^{/} = x_2^{/}, \quad \Delta t_0^{/} = t_2^{/} - t_1^{/}, \tag{103}$$

где $\Delta t_0^{/}$ – время между 2-мя событиями, которые показывают покоящиеся часы.

В системе отсчета K:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2^{/} + x_2^{/}\frac{\vartheta}{c^2} - x_1^{/}\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \tag{104}$$

$$\Delta t\sqrt{1-\beta^2} = \Delta t_0^{/} \quad \Rightarrow \quad \Delta t > \Delta t_0^{/}.$$

Движущиеся часы показывают большее время. Если часы покоятся в системе K, будет получен аналогичный результат.

Время, измеряемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется *собственным временем этого объекта.* Собственное время (жизни объекта) всегда имеет наименьшее значение.

Пример 1: опыт с мюонами.

Эти частицы (мюоны) рождаются на расстоянии 30 км от поверхности Земли и обнаруживаются вблизи поверхности Земли, то есть проходят путь $S = 30$ км. Мюоны относятся к нестабильным частицам. Их собственное время жизни (по часам в той инерциальной системы отсчета, относительно которой он покоится) $\Delta t_0^{/} = 2 \cdot 10^{-6}$с.

Если принять, что мюоны движутся со скоростью близкой к скорости света, то путь, пройденный мюоном в системе отсчета, связанной с самой частицей (в системе отсчета $K^{/}$)

$$S^{/} = c\Delta t^{/} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600\text{м} \ll 30 \text{ км}.$$

В системе отсчета, связанной с Землей, время существования (жизни) мюона:

$$\Delta t > \Delta t_0^{/},$$

поэтому за время жизни мюон, с точки зрения земного наблюдателя, пролетает расстояние

$$c\Delta t > c\Delta t_0^{/} \Rightarrow S > S^{/}.$$

Пример 2: «парадокс близнецов (часов)»

Релятивистский эффект замедления времени в космическом корабле, движущемся относительно Земли, открывает возможность осуществления сколь угодно дальних космических полетов и путешествий в «будущее». Согласно принципу относительности, все процессы на космическом корабле, включая и процесс старения космонавтов, идут по тем же законам, что и на Земле. Однако при этом время на корабле необходимо измерять по часам, движущимся вместе с ним со скоростью ϑ относительно Земли. Если космонавт, совершивший космический перелет со скоростью ϑ, близкой к скорости света c, возвратится на Землю, то обнаружит, что люди на Земле (в частности, его брат-близнец, оставшийся на Земле) постарели за время полета больше, чем он.

10.4. Длина отрезка (стержня) в различных системах отсчета

Длина отрезка – разность координат его начала и конца, измеренных одновременно в выбранной системе отсчета.

В системе отсчета K' его длина

$$l_0' = x_2' - x_1'. \tag{105}$$

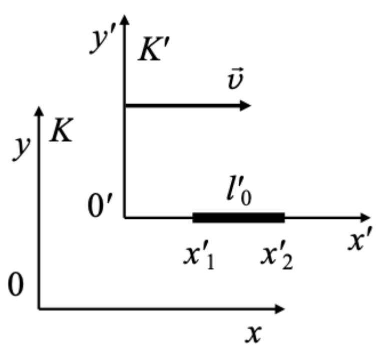


Рис. 10.5. Длина отрезка в различных системах отсчета

Система отсчета K' движется со скоростью ϑ относительно K (рис. 10.5). Найдем длину данного отрезка в системе K. Подставим (102) в (105):

$$l_0' = \frac{x_2 - \vartheta t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \vartheta t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - \vartheta t_2 - x_1 + \vartheta t_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

при $t_1 = t_2$

$$l_0' = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\Rightarrow\; l = l_0'\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow l_0' > l.$$

Длина стержня l_0' в системе, относительно которой он покоится, больше длины стержня l в системе, относительно которой он движется. Линейные размеры тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшаются в направлении движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз.

10.5. Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть точка M движется в системе K' со скоростью $\vec{u}'$ по направлению оси x'. Найдем скорость $\vec{u}$ этой точки в системе K (рис. 10.6).

Так как движение происходит вдоль оси x, то, согласно правилу Галилея,

$$u_x = \vartheta + u_x', \;\; u_y = u_y', \;\; u_z = u_z'.$$

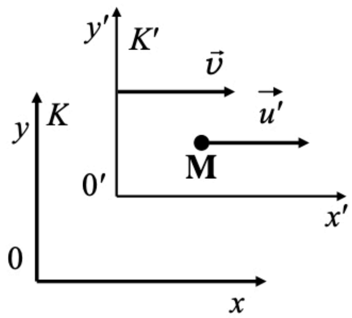


Рис. 10.6. Движение точки в системах отсчета K и $K^{/}$

Применяя преобразования Галилея в системе $K^{/}$: $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{\vartheta} < \overrightarrow{c}$ – данный результат не подтверждается экспериментально, а именно во всех системах $\overrightarrow{c} = const$.

Правило сложения скоростей Галилея нельзя применять в случае движения тел со скоростями близкими к скорости света. Воспользуемся преобразованиями Лоренца. Проекции скорости материальной точки на координатные оси в системе K:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, u_y = \frac{dy}{dt}, u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Проекции скорости материальной точки на координатные оси в системе $K^{/}$:

$$u_x^{/} = \frac{dx^{/}}{dt^{/}}, u_y^{/} = \frac{dy^{/}}{dt^{/}}, u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Согласно преобразованиям Лоренца:

$$x^{/} = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y^{/} = y, \quad z^{/} = z, \quad t^{/} = \frac{t - x\frac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Rightarrow$$

$$u_x^{/} = \frac{dx^{/}}{dt^{/}} = \frac{dx - \vartheta dt}{dt - \frac{\vartheta dx}{c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta \frac{dx}{dt}}{c^2}} = \frac{u_x - \vartheta}{1 - \frac{u_x \vartheta}{c^2}},$$

$$u_y^{/} = \frac{dy^{/}}{dt^{/}} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{\vartheta dx}{c^2}} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u_x \vartheta}{c^2}},$$

$$u_z^{/} = \frac{dz^{/}}{dt^{/}} = \frac{dz\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{\vartheta dx}{c^2}} = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u_x \vartheta}{c^2}},$$

$$u^{/} = \sqrt{u_x^{/2} + u_y^{/2} + u_z^{/2}}.$$

Если материальная точка движется в системе K вдоль оси x со скоростью c:

$$u_x = c,$$

$$u_x^{/} = \frac{c - \vartheta}{1 - \frac{c\vartheta}{c^2}} = c,$$

то ее скорость в системе $K^{/}$ равна c. Следовательно, объект, движущийся со скоростью c, будет иметь эту же скорость относительно других систем независимо от того, сколь быстро они движутся (согласие с II постулатом Эйнштейна).

10.6. Основное уравнение релятивистской динамики

Из принципа относительности следует, что математическая запись любого закона физики должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что уравнения, описывающие какое-либо явление в системе отсчета $K^{/}$, получаются из уравнений, описывающих это же явление в системе отсчета K. Это условие называется условием ковариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.

В классической механике второй закон Ньютона (основной закон динамики) имеет вид

$$m\frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \vec{F},$$

здесь масса m – коэффициент пропорциональности между силой и ускорением и не зависит от выбора системы отсчета, импульс $\vec{p} = m\vec{\vartheta}$.

В отличии от классической механики импульс является нелинейной функцией скорости:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\vartheta}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}, \qquad (106)$$

а второй закон Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\vartheta}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right),$$

– основное уравнение релятивистской динамики.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}, \tag{107}$$

где m_0 – масса покоя частицы (в системе отсчета, относительно которой она покоится).

Найдем выражение для релятивистской кинетической энергии. Приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\vartheta} dt,$$

в тоже время

$$\vec{F} dt = d(m\vec{\vartheta}) = dm\vec{\vartheta} + md\vec{\vartheta}.$$

Следовательно

$$dE_k = dm(\vec{\vartheta} \cdot \vec{\vartheta}) + m(d\vec{\vartheta} \cdot \vec{\vartheta}) = \vartheta^2 dm + m\vartheta d\vartheta,$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad m^2c^2 = m^2\vartheta^2 + m_0^2c^2. \tag{108}$$

Найдем дифференциал от (101)

$$2mc^2dm = 2m\vartheta^2dm + 2m^2\vartheta d\vartheta$$

и разделим на $2m$

$$dE_k = c^2dm = c^2d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}\right). \tag{109}$$

Приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее релятивистской массы. Проинтегрируем (109)

$$E_k = \int dE_k = \int_{m_0}^{m} c^2dm = (m - m_0)c^2, \text{ где } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}},$$

$E = mc^2$ называют полной энергией тела, а $E_0 = m_0c^2$, в свою очередь, – энергией покоя. Формула полной энергии тела выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и полной энергии тела.

Очевидно, что масса тела, которая в классической механике является мерой инертности (во втором законе Ньютона), теперь выступает в новой функции: как мера энергосодержания тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии: энергией покоя.

Эйнштейн пришел к выводу, что масса тела будет вырастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и при увеличении общего запаса энергии (кинетической, электрической, тепловой, химической и т. д.).

Можно найти связь полной энергии и импульса для тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} = mc^2 \;\Rightarrow\; m^2c^4\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right) = m_0^2c^4 \;\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4.$$

Откуда получим выражение для энергии в виде

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}.$$

Вопросы

1. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
2. Сформулируйте постулаты специальной теории относительности.
3. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела? Скорость света?
4. Запишите и поясните преобразования Лоренца.
5. При каких условиях преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея?
6. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета?
7. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
8. Сформулируйте закон взаимосвязи массы и энергии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иродов, И. Е. Механика. Основные законы / И. Е. Иродов. – М. : Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 251 с.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 т. / И. В. Савельев. – М. : Астрель, АСТ, 2004. – Т. 1 : Механика. – 517 с.

3. Курс физики с примерами решения задач : учебное пособие : в 3 ч. / С. И. Кузнецов; под ред. В. В. Ларионова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. – 413 с.

4. Физика : учебное пособие : в 2 ч. / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – Минск : БГУИР, 2006. – Ч. 1 : Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм. – 232 с. : ил.

5. Трофимова, Т. И. Курс физики : учебное пособие для вузов. / Т. И. Трофимова. – 14-еизд., перераб. и доп. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.

Учебное издание

БОЯРШИНОВА Оксана Александровна

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей
1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

Редактор *Е. И. Беницевич*
Компьютерная верстка *О. А. Бояршиновой*

Подписано в печать 03.01.2022. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 5,19. Тираж 60. Заказ 557.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.