

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ

*Бынькова Анастасия Юрьевна*

Белорусский национальный технический университет

*sm@bntu.by*

На сооружение в период всего его жизненного цикла воздействуют сложные и разнообразные физические процессы, которые необходимо правильно учесть и описать. Для этого, как правило, недостаточно имеющихся в распоряжении расчетчика данных, а зачастую и не существует удовлетворительной и достаточно детальной возможности описать тот или иной процесс, явление. Все это вынуждает инженера заменять физическую реальность некоторой аппроксимирующей расчетной схемой, обладающей идеализированными свойствами.

Выбор этой основной расчетной схемы сооружения и есть главный критерий правильности определения основных параметров. Расчетная схема сооружения есть упрощенное его изображение, в котором учитываются основные свойства, определяющие поведение сооружения под нагрузкой.

Проведем анализ работы пространственного каркаса, с целью определения НДС данного объекта, а также значений перемещений его узлов (без связей и с их наличием) на основании метода конечных элементов (МКЭ).

Математическая модель конструкции состоит из трех групп уравнений (1): уравнения равновесия (связь между усилиями и нагрузкой), геометрических (связь между деформациями и перемещениями) и физических (связь между деформациями и усилиями, зависящая от физических свойств материала).

$$\begin{cases} A\vec{S} = \vec{F}, \\ A^T\vec{Z} = \vec{\Delta}, \\ \vec{\Delta} - D\vec{S} = \vec{\Delta}', \end{cases} \quad (1)$$

где  $A$  – матрица равновесия всей системы;  $\vec{S}$  – вектор внутренних усилий в стержнях исследуемой системы;  $\vec{F}$  – вектор внешней нагрузки;  $A^T$  – матрица деформаций;  $\vec{Z}$  – вектор узловых перемещений системы;  $\vec{\Delta}$  – вектор деформаций всей системы, соответствующий вектору усилий  $\vec{S}$ ;  $D$  – матрица внутренней податливости всей системы;  $\vec{\Delta}'$  – вектор принудительных деформаций всей системы от соответствующего воздействия (теплового, осадки опор, неточности изготовления элементов).

Записанная система уравнений имеет единственное решение. В связи с этим, если для конструкции будут известны  $\vec{F}$  и  $\vec{\Delta}'$ , то в результате будет

получен единственный вариант распределения усилий, перемещений и деформаций. Система этих трех уравнений представляет собой математическую модель стержневой конструкции [1].

В качестве примера будем использовать следующую расчетную схему каркаса, приведенную на рис. 1.

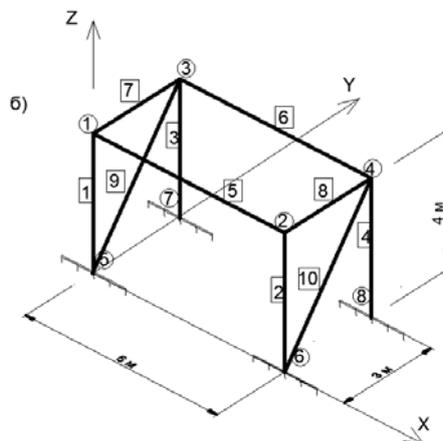


Рис. 1. Расчетная схема каркаса со связями

Необходимо определить усилия в стержнях каркаса, а также произвести анализ полученных перемещений. В качестве основных жесткостных характеристик примем следующие значения:  $EAh_2 = GI_{кр.} = EI_Y = EI_Z$ ,  $h = 1$  м.

Для решения данной задачи необходимо составить матрицы равновесия, матрицы внутренней жесткости, матрицы внешней жесткости для всех стержней по отдельности, а потом из них собрать матрицы для всей системы.

Разрешающее уравнение записывается в виде:

$$R \cdot \vec{Z} + R_f = 0, \quad (2)$$

где  $R$  – матрица внешней жесткости всей системы, определяемая для стержневой системы по формуле 3.

$$R = A \cdot k \cdot A^T, \quad (3)$$

где  $k$  – матрица внутренней жесткости всей системы;  $R_f$  – матрица «грузовых» реакций, так как внешняя нагрузка заменяется эквивалентной узловой по направлениям перемещений  $\vec{Z}$ .

После решения системы уравнений становятся известными перемещения  $\vec{Z}$  узлов в общей системе координат. После чего находят усилия в стержнях исследуемой системы по формуле:

$$\vec{S} = R_i \cdot \vec{Z}_i, \quad (4)$$

где  $R_i$  – матрица внешней жесткости отдельного конечного элемента;  $\vec{Z}_i$  – вектор перемещений отдельного конечного элемента.

Записанные выше уравнения расчета представляют собой МКЭ «в перемещениях».

Для рамы на рис. 1 определена матрица внешней жесткости.

Используя формулу (2) найдем вектор перемещений:

$$\vec{Z} = [ | 20.67, -16.69 -144.21, 1.76, -27.14, 0.21 | ; | -20.67, 16.69 -144.21, 1.76, 27.14, -0.21 | ; | 19.20, 24.10 -135.79, 6.04, -22.45, -2.06 | ; | -19.20, 24.10 -135.79, 6.04, 22.45, 2.06 | ]^T.$$

Вычислим вектор усилий:

$$\vec{S} = [ | 36.05, 0.05, -19.39, 5.82, 4.50, -5.38 | ; | 36.05, -0.05, 19.39, -5.82, 4.50, -5.38 | ; | 33.95, -0.52, -15.25, 4.02, 3.00, -6.02 | ; | 33.95, 0.52, 15.25, -4.02, 3.00, -6.02 | ; | 6.89, 0.00, -9.05, -9.05, -0.07, -0.07 | ; | 6.40, 0.00, -7.48, -7.48, 0.69, 0.69 | ; | -2.47, 1.56, -12.00, 14.85, 0.12, -1.64 | ; | -2.47, -1.56, -12.00, 14.85, -0.12, 1.64 | ; | 18.83, -3.02, -19.35, 21.76, -8.77, 2.08 | ; | 18.83, 3.02, -19.35, 21.76, 8.77, -2.08 | ]^T.$$

Следует заметить, что запись разрешающих уравнений для пространственного сооружения – достаточно тяжелая задача для любого расчетчика. Матрицы получаются огромными, и запутаться в них весьма просто. Размерность матриц для конструкции с 10 стержнями, закрепленными жестко с двух сторон с перемещающимися 4 узлами, следующая: А 24x60, К 60x60, R 24x24.

При решении задачи необходимо соблюдать выбранную последовательность и не отходить от нее ни на шаг. В тоже время без применения численного метода невозможно научить расчетчика анализировать полученные результаты в программе и правильно составлять конечно-элементную модель этой конструкции для ее расчета.

Используя символьные переменные для составления матриц, можно этим методом получить функциональные зависимости для определения перемещений узлов и усилий в стержнях. Это позволяет варьировать различными параметрами в задачах оптимизации конструкции.

Таким образом, разработанная математическая модель позволит более полно понять напряженно-деформированное состояние различных конструкций и сооружений при действии на них внешних нагрузок, позволит производить расчет на устойчивость, позволит улучшить составление математических моделей, упростить методы построения моделей при проектировании сооружений.

### *Литература*

1. Борисевич А. А. Строительная механика: учеб. пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Изд. 2-е. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.