УДК 517.3

Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием

Копейкина Т.Б., Гусейнова А.С.
Белорусский национальный технический университет

Моделями многих процессов в динамике полета, автоматическом регулировании, химической кинетике, теории нелинейных колебаний, квантовой механике могут служить сингулярно возмущенные системы (СВС), т.е. системы дифференциальных уравнений, часть из которых содержит малый параметр при старшей производной. К настоящему времени достаточно хорошо изучена проблема управляемости сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, СВС с постоянным запаздыванием. В докладе исследуется проблема относительной управляемости сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием. Получены достаточные условия рангового типа относительной управляемости по медленной переменной x, по быстрой переменной y, по совокупности переменных $\{x,y\}$, выраженные через решения матричных определяющих уравнений. Доказана связь условий относительной управляемости исходной СВС с условиями полной и относительной управляемости соответствующих вырожденной системы и системы пограничного слоя.

Поведение исследуемого управляемого объекта описывается системой $n+m$ линейных сингулярно возмущенных уравнений с малым запаздыванием (СВСМЗ):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}x(t-\mu h) + C_{11}y(t) + C_{12}y(t-\mu h) + B_1 u(t) \\ \mu\dot{y}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}x(t-\mu h) + C_{21}y(t) + C_{22}y(t-\mu h) + B_2 u(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} & x_0(\cdot) = \{\varphi(\theta), \quad \theta \in [-\mu h, 0), \quad x(0) = x_0\}, \\ & y_0(\cdot) = \{\phi(\theta), \quad \theta \in [-\mu h, 0), \quad y(0) = y_0\}, \\ & u(t+\mu h) \equiv 0, \quad t < -\mu h, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $x(t) \in R^n$ –медленная, $y(t) \in R^m$ –быстрая переменная, $u(t) \in R^r$, $r \le n+m$, $u(\cdot)$ –вектор-функция управляющих воздействий из класса U кусочно-непрерывных вектор-функций;

$h = const > 0$; $t \in [0,T]$, T–фиксированное число, μ–малый положительный параметр, $0 < \mu \ll 1$. Система (1.1) является системой с существенно различными скоростями $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$; $\det C_{21} = 0$ и $\det C_{22} = 0$, но $\det(C_{21} + C_{22}) \neq 0$.

Определение 1. Система (1.1), (1.2) при заданном μ называется относительно управляемой на отрезке $[0,T]$ по медленной переменной x (по быстрой переменной y), если для любого $c_1 \in R^n$ ($c_2 \in R^m$) и любых начальных условий (1.2) существует допустимое управление $u(\cdot) \in U$ такое, что соответствующая им компонента $x(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu)$ ($y(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu)$) решения $\{x(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu),\ y(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu)\}$ удовлетворяет условию $x(T;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu) = c_1$ ($y(T;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu) = c_2$).

Определение 2. Система (1.1), (1.2) при заданном μ называется относительно управляемой по совокупности переменных $\{x,y\}$, если для любых $c_1 \in R^n$, $c_2 \in R^m$ и начальных условий (1.2) найдется допустимое управление $u(\cdot) \in U$ такое, что соответствующее им решение $\{x(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu),\ y(\cdot;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu)\}$ удовлетворяет условию $x(T;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu) = c_1$, $y(T;x_0(\cdot);y_0(\cdot);\mu) = c_2$.

Цель работы–вывести эффективные условия относительной управляемости СВСМЗ (1.1), (1.2) по x, y, по совокупности переменных $\{x, y\}$, выраженные непосредственно через параметры свойственных (1.1) *вырожденной системы* и *системы пограничного слоя.*

Для решения поставленной задачи введем невырожденное преобразование

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & \mu S \\ -R & E_m - \mu SR \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix},$$

позволяющее выбрать неизвестные матрицы S и R таким образом, чтобы полученные системы дифференциальных уравнений относительно $\xi(t)$ и $\eta(t)$ стали системами с разделенными переменными

$$
\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_0 \cdot \xi(t) + B_0 \cdot u(t) \\ \mu\dot{\eta}(t) = C_{21}\eta(t) + C_{22}\eta(t - \mu h) + B_2 u(t). \end{cases} \tag{1.3}
$$

Для этой более простой системы можно использовать общую теорию управляемости.

Результат:

1. Система (1.1), (1.2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по x тогда и только тогда, когда система (1.3) относительно управляема по $\xi(t)$ и

$rank\{X_k, \quad k = 1,2,...n\} = n$, (1.4) где

$X_k \in M^{n\times r}$ –матричные решения определяющего уравнения

$X_{k+1} = A_0 X_k + B_0 U_k$, $k = 1,2,3,...$,

с начальными условиями

$X_k = 0_{nr}, \quad k \le 0; \quad U_0 = E_r, \quad U_k = 0_r, \quad k \ne 0.$

2. Система (1.1), (1.2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по y тогда и только тогда, когда система (1.3) относительно управляема по $\eta(t)$ и

$$
rank\{Y_k(s), \quad k = \overline{1,n}; \quad s \in [0, \alpha h]\} = m; \quad \alpha = \frac{T - 0}{\mu}. \tag{1.5}
$$

В $Y_k(s) \in M^{m\times r}$ матричные решения определяющего уравнения

$Y_{k+1}(s) = C_{21}Y(t) + C_{22}Y(t - \mu h) + B_2 u(t), \quad k = 1,2,3,...,$

с начальными условиями

$Y_0(s) = 0_{mr} \quad \forall s$; $Y_i(s) = 0_{mr}$, $U_j(s) = 0_r \ \forall s < 0$,

$i = 0,1,2,...,$ j=1,2,3,…,

$U_0(0) = E_r$, $U_0(s) = 0_r$ при $s \ne 0$.

3. Система (1.1), (1.2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по совокупности переменных {x,y} тогда и только тогда, когда система (1.3) относительно управляема по $\xi(t)$, $\eta(t)$ и одновременно выполняются условия (1.4), (1.5).