УДК 539.3

О разложении функций в тригонометрические ряды специального вида

Акимов В.А.
Белорусский национальный технический университет

Составной частью одного из важнейших разделов высшей математики, занимающегося исследованием ортогональных рядов, является обстоятельно изученная тема, получившая название «Ряды Фурье»[1,2]. Она имеет большое научное и прикладное значение. Начиная с XIX века ею занимаются многие известные ученые всего мира. Но, не смотря на это, еще не получили своего завершения исследования разложения в ряды вида

$$f_н(x) = \sum_k A_k^н \sin kx + \sum_k B_k^н x \cos kx,$$

$$f_н(x) = \sum_k C_k^н (\sin kx + x \cos kx). \qquad (1)$$

Здесь $f_n(x)$ - некоторая нечетная бесконечно дифференцируемая функция, A_k^n, B_k^n, C_k^n - искомые коэффициенты. Аналогичный вид имеет место разложение в четные ряды

$$f_ч(x) = \sum_k A_k^ч \cos kx + \sum_k B_k^ч x \sin kx,$$

$$f_ч(x) = \sum_k C_k^ч (\cos kx + x \sin kx). \qquad (2)$$

Если исходная функция не является ни четной ни нечетной, то ее разложении в тригонометрический ряды будут присутствовать коэффициенты вида (1) и вида (2)

Возьмем гладкую, бесконечно дифференцируемую функцию $f(x) = e^{ax}$ -1≤x≤1 и выделим из нее нечетную $f_н(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = Shax$ и четную

$$f_ч(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=Chax$$ составляющие.

Для определенности рассмотрим разложение лишь в нечетный ряд, так как вопрос о разложении в четный ряд решается, аналогично, а для разложения в ряд общего вида их следует просуммировать

Отметим то обстоятельство, что метод Фурье не позволяет найти коэффициенты в разложении (1), так как здесь придется столкнуться с неберущимся интегралом вида $\int_{-1}^{1}\frac{Shax}{x}\cos kxdx$, хотя интеграл $\int_{-1}^{1}ShaxSinkxdx$ является берущимся. Развиваемый автором операторный метод нахождения коэффициентов в ортогональных и неортогональных рядах [3,4] позволяет найти искомые коэффициенты A_k^n, B_k^n, C_k^n. В этой связи операторный метод является обобщением метода Фурье, имеющего место только для ортогональных рядов, на случай неортогональных рядов, а сами ряды (1) и (2) следует считать специальным видом неортогональных рядов. Остановимся вкратце на некоторых характерных особенностях использования операторного метода в данном случае. Здесь вместо оператора $D_1=\frac{Sh\pi d_x}{1+d_x^2/k^2}$, где

$d_x=\frac{d}{dx}$, требуется применять операторы

$$D_{11}=\frac{Sh^2\pi d_x}{(1+d_x^2/k^2)^2},\qquad D_{12}=\frac{Sh^2\pi d_x}{1+d_x^2/k^2},\qquad (3)$$

или их линейную комбинацию. Наличие в числители квадрата оператора дифференцирования бесконечно высокого порядка основано на понятии центральной разности 2-го порядка. Для центральной разности 1-го порядка, на основании известного [3,4] тождества $f(x+\pi)=e^{\pi d_x}*f(x)$, получаем

$$\Delta_1 f(x) = \frac{f(x+\pi) - f(x-\pi)}{2} =$$

$$= \frac{e^{\pi d_x} * f(x) - e^{-\pi d_x} * f(x)}{2} = \left(\frac{e^{\pi d_x} - e^{\pi d_x}}{2} \right) * f(x) =$$

$$= Sh\pi d_x * f(x).$$

Тогда центральная разность 2-го порядка будет равна

$$\Delta_2 f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+2\pi) - f(x)}{2} - \frac{f(x) - f(x-2\pi)}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi d_x} * f(x) + e^{-2\pi d_x} * f(x)}{2} - f(x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2\pi d_x} + e^{-2\pi d_x}}{2} * f(x) - f(x) \right] = \frac{1}{2}\left(ch2\pi d_x - 1 \right) * f(x) =$$

$$= Sh^2 \pi d_x * f(x).$$

Таким образом обосновано наличие квадрата в числителе выражения (3). Вид знаменателя в (3) выбирается из тех соображений, что его степень не должна превосходить степени числителя. Найденные коэффициенты следует подставить в соответствующие ряды и исследовать их на сходимость.

Литература

1. Бари,Н.К. Тригонометрические ряды // М. Физматгиз. – 1961. – 936 с.
2. Зигмунд,А. Тригонометрические ряды .//М. Мир – 1965; Т.1 – 615с; Т.2 – 537 с.
3. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. // Диссертация канд.физ.мат.наук, Минск, 1992. – 136 с.
4. Акимов, В.А Вычисление коэффициентов рядов Фурье операторным методом. //Материалы Республиканского научно-методического семинара преподавателей вузов Белоруси. Минск,15-17 июня 2000 г./ Минск, Технопринт, 2001. – С.43-47.