БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
ГЕОТЕХНИКА БЕЛАРУСИ: НАУКА И ПРАКТИКА
(г. Минск, БНТУ — 23–25.10.2013)

УДК 624.042

РАСЧЕТ ГОРИЗОНТАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ СВАЙ, ЗАЩЕМЛЕННЫХ В РОСТВЕРК, С УЧЕТОМ ДЛИТЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Лучковский И.Я, Есакова С.В.
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, г. Харьков, Украина

В работе рассмотрены горизонтально нагруженные сваи, защемленные в ростверк и погруженные в упруго-ползучее основание Винклера с линейно возрастающей жесткостью.

In the article describes the horizontally loaded pile with embedment in the grillage and immersed in elastic-creeping base of Winkler with linearly increasing stiffness.

Современные методы расчета свай на горизонтальную нагрузку стремятся более широко охватить все факторы, влияющие на изменение свойств грунтов при нагружении. Прежде всего, это учет реологических свойств основания. Ползучесть Винклерова основания приводит к неравномерному возрастанию деформаций конструкций, а также к неравномерному изменению контакных напряжений горизонтально нагруженных свай.

Применительно к принятой модели основания с линейно возрастающим в момент загружения коэффициентом постели $C_0{}^z$, представим закон деформирования грунта при длительном загружении, используя предпосылки теории «старения» в виде [1]

$$y_t{}^z = \frac{\sigma_t}{C_0{}^z \cdot b_p} + \frac{(\sigma_0 + \sigma_t)}{2 \cdot C_0{}^z \cdot b_p}\varphi_t \ , \tag{1}$$

$$C_0{}^z = K \cdot z \cdot b_p \, ; \tag{2}$$

где φ_t – характеристика получести основания; b_p – расчетная ширина сваи; K – коэффициент пропорциональности; σ_0, σ_t – нагрузка от сваи на единицу длины основания в произвольный момент времени $\tau = 0, t$.

Представим исходное дифференциальное уравнение изгиба сваи при длительном нагружении в виде

$$EI \cdot \frac{\partial^4 y_t^z}{\partial z^4} + \sigma_t{}^z = 0 \, , \tag{3}$$

затем из (1) найдем $\sigma_t{}^z$:

$$\sigma_t{}^z = \frac{2 \cdot C_0{}^z \cdot b_p \cdot y_t{}^z - \sigma_0{}^z \cdot \varphi_t}{2 + \varphi_t} \, . \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), получим исходное уравнение изгиба сваи

$$\frac{\partial^4 y_t^z}{\partial z^4} + \frac{2 \cdot K \cdot b_p}{(2 + \varphi_t)EI} \cdot z \cdot y_t{}^z = \frac{\varphi_t \cdot b_p}{(2 + \varphi_t)EI} \cdot \sigma_0{}^z \, . \tag{5}$$

Произведя замену переменной, после ряда преобразований получаем

$$\frac{\partial^4 y_t^z}{\partial x^4} + x_t \cdot y_t{}^x = \frac{\varphi_t \cdot \beta_t}{2 \cdot K \cdot b_p} \cdot \sigma_0{}^x \, , \tag{6}$$

где

$$\beta_t = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot K \cdot b_p}{(1 + \varphi_t) EI}}, \qquad x_t = \beta_t \cdot z .$$

Упруго-мгновенное решение для сваи, защемленной в ростверк, согласно «Руководству» [2], может быть получено из общего случая загружения сваи в уровне поверхности силой Q^0 *и* моментом M^0 при равенстве нулю угла поворота φ^0 *в* начале координат.

Однако для данного случая решение можно упростить, используя решение И.В. Урбана [3], при $\varphi^0 = 0$ получим в упругой стадии

$$\left.\begin{aligned} y^z &= y^0 \cdot A_1^z + \frac{M^0}{\beta_0^2 \cdot EI} \cdot C_1^z + \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot D_1^z ; \\ -\frac{\varphi^z}{\beta_0} &= y^0 \cdot A_2^z + \frac{M^0}{\beta_0^2 \cdot EI} \cdot C_2^z + \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot D_2^z ; \\ \frac{M^z}{\beta_0^2 \cdot EI} &= y^0 \cdot A_3^z + \frac{M^0}{\beta_0^2 \cdot EI} \cdot C_3^z + \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot D_3^z ; \\ \frac{Q^z}{\beta_0^3 \cdot EI} &= y^0 \cdot A_4^z + \frac{M^0}{\beta_0^2 \cdot EI} \cdot C_4^z + \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot D_4^z . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Принимая на нижнем конце сваи условие $Q^H = 0$; $M^H = 0$, из двух нижних уравнений (7) получаем

$$\left.\begin{aligned} M^0 &= -\frac{Q^0}{\beta_0} \cdot V^H ; \\ y^0 &= \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot T^H , \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где V^H, T^H – новые функции, зависящие от длины сваи H.

$$\left.\begin{aligned} V_0^H &= \frac{A_3^H \cdot D_4^H - A_4^H \cdot D_3^H}{A_3^H \cdot C_4^H - A_4^H \cdot C_3^H}; \\ T_0^H &= \frac{C_3^H \cdot D_4^H - C_4^H \cdot D_3^H}{A_3^H \cdot C_4^H - A_4^H \cdot C_3^H}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Таким образом, из (9) имеем возможность найти $M^{\max} = M^0$ и $y^{\max} = y^0$, а $\varphi^0 = 0$ и $Q^{\max} = Q^0$ заданы как начальные параметры.

Далее из системы (7) и (8) найдем деформации и усилия в упругой стадии

$$\left.\begin{aligned} y^z &= \frac{Q^0}{\beta_0^3 \cdot EI} \cdot \left(A_1^z \cdot T_0^H - C_1^z \cdot V_0^H + D_1^z\right); \\ -\varphi^z &= \frac{Q^0}{\beta_0^2 \cdot EI} \cdot \left(A_2^z \cdot T_0^H - C_2^z \cdot V_0^H + D_2^z\right); \\ M^z &= \frac{Q^0}{\beta_0} \cdot \left(A_3^z \cdot T_0^H - C_3^z \cdot V_0^H + D_3^z\right); \\ Q^z &= Q^0 \cdot \left(A_4^z \cdot T_0^H - C_4^z \cdot V_0^H + D_4^z\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

При этом распределение контактных напряжений в упругой стадии, в соответствии с законом (2) и решением (10), имеет вид

$$\sigma_0{}^z = \beta_0 \cdot x_0 \cdot Q^0 \cdot \left(A_1^z \cdot T^H - C_1^z \cdot V^H + D_1^z\right) \tag{11}$$

где $\beta_0 = \sqrt[5]{\dfrac{K \cdot b_p}{EI}}$, $\qquad x_0 = \beta_0 \cdot z$.

С учетом (11) исходное дифференциальное уравнение (6) получает выражение

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + x_t y_t{}^x = \frac{\varphi_t}{2K \cdot b_p} \beta_0 \beta_t \cdot x_0 \cdot Q_0 \left(A_1^z \cdot T^H - C_1^z \cdot V^H + D_1^z\right). \tag{12}$$

Решением этого уравнения является сумма частного решения «u» и общего решения «s».

Частное решение ищем в виде

$$u = r_1 \cdot A_1^0 + r_2 \cdot C_1^0 + r_3 \cdot D_1^0. \tag{13}$$

Дифференцируя (13), получаем

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = r_1 \cdot \left(A_1^0\right)^{IV} + r_2 \cdot \left(C_1^0\right)^{IV} + r_3 \cdot \left(D_1^0\right)^{IV}. \tag{14}$$

Используя функции И.В. Урбана [3], можно показать, что существует соотношение:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\beta_0 \cdot z \cdot \left(r_1 \cdot A_1^0 + r_2 \cdot C_1^0 + r_3 \cdot D_1^0\right) \tag{15}$$

Теперь, с использованием частного решения (13), уравнение (12) имеет вид

$$\left(\beta_t - \beta_0\right) \cdot \left(r_1 \cdot A_1^0 + r_2 \cdot C_1^0 + r_3 \cdot D_1^0\right) =$$

$$= \frac{\varphi_t}{2 \cdot K \cdot b_p} \cdot \beta_0^2 \cdot \beta_t \cdot Q_0 \cdot \left(A_1^0 \cdot T^H - C_1^0 \cdot V^H + D_1^0\right) \tag{16}$$

Приравнивая коэффициенты при функциях начального нагружения A_1^0, C_1^0 и D_1^0, найдем значение коэффициентов r_i, а затем и частное решение

$$u = \frac{\varphi_t}{2 \cdot K \cdot b_p} \cdot \frac{\beta_0^2 \cdot \beta_t}{\left(\beta_t - \beta_0\right)} \cdot Q_0 \cdot \left(A_1^0 \cdot T^H - C_1^0 \cdot V^H + D_1^0\right) \tag{17}$$

Далее представим общее решение однородного уравнения (12) (без правой части) в виде

$$s = N_1 \cdot A_1^t + N_2 \cdot C_1^t + N_3 \cdot D_1^t. \tag{18}$$

С учетом (17) и (18) запишем решение уравнения (6)

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= N_1 \cdot A_1^t + N_2 \cdot C_1^t + N_3 \cdot D_1^t + \\
&+ \frac{\varphi_t \cdot \beta_0^2 \cdot \beta_t}{2K \cdot b_p (\beta_t - \beta_0)} Q^0 \cdot (A_1^0 \cdot T^H - C_1^0 \cdot V^H + D_1^0).
\end{aligned} \qquad (19)
$$

Произвольные постоянные найдем из граничных условий

$$
\text{при } x = 0: \qquad y'(0,t) = 0; \qquad y'''(0,t) = \frac{Q^0}{EI};
$$

$$
\text{при } x = H: \qquad y''(H,t) = 0; \qquad y'''(H,t) = 0.
$$

При этом учтем, что:

$$
A_2 = A_1'; \;\; A_3 = A_2'; \;\; A_4 = A_3'; \;\; B_2 = B_1'; \;\; \ldots; \;\; D_4 = D_3'.
$$

Кроме этого, учтем, что функции И.В. Урабана при $z = 0$ равны нулю, исключая только четыре, которые равны единице:

$$
A_1(0) = B_2(0) = C_3(0) = D_4(0) = 1.
$$

Далее, дифференцируя уравнение (19) и используя граничные условия, получаем систему уравнений для определения N_i.

При отсутствии поворота в месте защемления сваи в ростверк получаем, что условие $y'(0,t) = 0$ удовлетворяется автоматически.

Из условия $y'''(0,t) = \dfrac{Q^0}{EI}$ находим

$$
\beta_t^3 \cdot N_3 + \frac{\varphi_t \cdot \beta_0^5 \cdot \beta_t}{2 \cdot K \cdot b_p \cdot (\beta_t - \beta_0)} \cdot Q^0 = \frac{Q^0}{EI},
$$

откуда получаем

$$
N_3 = \frac{Q^0}{\beta_t^3 \cdot EI} \cdot \left[1 + \frac{\varphi_t \cdot \beta_t}{2 \cdot (\beta_0 - \beta_t)} \right]. \qquad (20)
$$

Далее, используя условия на нижнем конце сваи, получаем из (19) систему уравнений с двумя неизвестными N_1 и N_2

$$
\left.
\begin{aligned}
N_1 \cdot A_{3_t}^H + N_2 \cdot C_{3_t}^H &= \frac{\varphi_t}{2 \cdot \beta_0 \cdot \beta_t \cdot (\beta_0 - \beta_t) EI} \cdot Q^0 \cdot \left(A_{3_0}^H \cdot T_0^H - \right. \\
&\quad \left. - C_{3_0}^H \cdot V_0^H + D_{3_0}^H \right) - N_3 \cdot D_{3_t}^H ; \\
N_1 \cdot A_{4_t}^H + N_2 \cdot C_{4_t}^H &= \frac{\varphi_t}{2 \cdot \beta_t{}^2 \cdot (\beta_0 - \beta_t) EI} \cdot Q^0 \cdot \left(A_{4_0}^H \cdot T_0^H - \right. \\
&\quad \left. - C_{4_0}^H \cdot V_0^H + D_{4_0}^H \right) - N_3 \cdot D_{4_t}^H .
\end{aligned}
\right\} \qquad (21)
$$

Обратим внимание, что в соответствии с решением (10), при $z = H$ функции стоящие в скобках системы (21), обращаются в ноль, а система упрощается

$$
\left.
\begin{aligned}
N_1 \cdot A_{3_t}^H + N_2 \cdot C_{3_t}^H &= -N_3 \cdot D_{3_t}^H ; \\
N_1 \cdot A_{4_t}^H + N_2 \cdot C_{4_t}^H &= -N_3 \cdot D_{4_t}^H .
\end{aligned}
\right\} \qquad (22)
$$

Это позволяет, с учетом (20), найти произвольные постоянные N_1 и N_2. А в соответствии с полученным выше новым решением (9), (10) выражения для произвольных постоянных упрощаются

$$
\left.
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{Q^0}{\beta_t^3 \cdot EI} \cdot T_t^H \cdot \left[1 + \frac{\varphi_t}{2 \cdot (\lambda - 1)} \right]; \\
N_2 &= -\frac{Q^0}{\beta_t^3 \cdot EI} \cdot V_t^H \cdot \left[1 + \frac{\varphi_t}{2 \cdot (\lambda - 1)} \right],
\end{aligned}
\right\} \qquad (23)
$$

где функции T_t^H и V_t^H определяются по формуле (9) при $\beta = \beta_t$;

$$
\lambda = \frac{\beta_0}{\beta_t} = \sqrt[5]{1 + \frac{\varphi_t}{2}} .
$$

С использованием полученных результатов запишем решение уравнения (19) в виде:

$$y(x,t)=\frac{Q^0}{\beta_0^3\cdot EI}\cdot\left\{\left[1+\frac{\varphi_t}{2\cdot(\lambda-1)}\right]\cdot\left(A_{1_t}^z\cdot T_t^H-C_{1_t}^H\cdot V_t^H+D_{1_t}^H\right)\lambda^3-\right.$$

$$\left.-\frac{\varphi_t}{2\cdot(\lambda-1)}\cdot\left(A_{1_0}^z\cdot T_0^H-C_{1_0}^H\cdot V_0^H+D_{1_0}^H\right)\right\}.\qquad(24)$$

Из (24) можно получить максимальное перемещение при $x = 0$. А если принять, что значения функций T_0^H и T_t^H отличаются незначительно, то приближенно можем записать через $T_{cp}=\frac{T_0^H+T_t^H}{2}$:

$$y(0,t)\approx\frac{Q^0}{\beta_0^3\cdot EI}\cdot T_{cp}^H\cdot\left[\lambda^3+\frac{\varphi_t}{2}\cdot\left(\lambda^2+\lambda+1\right)\right],\qquad(25)$$

т.е. решение с учетом линейной ползучести основания получается путем умножения упруго-мгновенного решения на коэффициент, учитывающий реологические свойства основания.

Взяв последовательно производные из выражения (24), нетрудно получить значения $\varphi(x,t)$, $M(x,t)$ и $Q(x,t)$.

Литература

1. Лучковский, И.Я. Взаимодействие конструкций с основанием / И.Я. Лучковский. – Бібліотека журналу ІТЕ. Том 3. –Харків : ХДАГХ, 2000. – 264 с.

2. Руководство по проектированию свайных фундаментов / НИИОСП им. Н.М. Герсеванова Госстроя СССР. – М. : Стройиздат, 1980.

3. Урбан, И.В. Расчет сваи на горизонтальную нагрузку с учетом ее гибкости / И.В. Урбан // Труды МЭМИИТ. – Вып. 58. – 1949. – С. 49–60.