УДК 517.3

Управляемость линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с постоянным запаздыванием

Копейкина Т. Б., Гусейнова А. С.
Белорусский национальный технический университет

Актуальной проблеме управляемости сингулярно возмущенных систем (СВС, стационарных и нестационарных, с различными видами запаздываний (малыми, постоянными, зависящими от времени) и без запаздываний) в последние годы посвящен ряд работ как отечественных, так и зарубежных ученых [1-4].

Поведение исследуемого управляемого объекта описывается системой $n+m$ линейных сингулярно возмущенных уравнений с постоянным запаздыванием :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}x(t-h) + C_{11}y(t) + C_{12}y(t-h) + B_1u(t) \\ \mu\dot{y}(t) = A_{21}x(t) + A_{22}x(t-h) + C_{21}y(t) + C_{22}y(t-h) + B_2u(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$x(0,\mu) = \{\varphi(\theta), \quad x(0) = x_0\},$$

$$y(0,\mu) = \{\phi(\theta), \quad y(0) = y_0\}, \quad \theta \in [-h,0), \quad (2)$$

где $x(t) \in R^n$ –медленная, $y(t) \in R^m$ –быстрая переменная, $u(t) \in R^r$, $r \le n+m$, $u(\cdot)$ –вектор-функция управляющих воздействий из класса U кусочно-непрерывных вектор-функций, A_{ij} C_{ij} B_i $i = \overline{1,2}$ $j = \overline{1,2}$ матрицы соответствующих размерностей $h = const > 0$; $t \in [0,T]$, T – фиксированное число, μ – малый положительный параметр, $0 < \mu \ll 1$. Система (1) является системой с существенно различными скоростями $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\{x_t(\cdot), y_t(\cdot)\} = z_t(\cdot)$ – состояние системы в произвольный момент времени t, $z_t(\theta) = z(t+\theta)$, $\theta \in [-h,0]$. На отрезке времени $[0,T]$ исследуется задача относительной управляемости по x, по y, по совокупности переменных $\{x,y\}$ при новом достаточно общем предположении о матрицах СВС (1): $\det(C_{21}+C_{22}e^{-ph})\neq 0$.

Для решения поставленной задачи вводится невырожденное преобразование предложенное в [4]

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & -\mu\sum_{i=0}^{n} S_i e^{-iph} \\ -\sum_{i=0}^{n} R_i e^{-iph} & E_m+\mu\sum_{i=0}^{n} R_i e^{-iph}\sum_{i=0}^{n} S_i e^{-iph} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

позволяющее выбрать неизвестные матрицы S_i и R_i таким образом, чтобы свести исходную СВС (1) к новой СВС с разделенными переменными $\xi(t)$ $\eta(\tau)$ с многими кратными h запаздываниями в медленной переменной $\xi(t)$ и управлении $u(t)$ (в уравнении для медленной переменной) и постоянным запаздыванием $h_1=\dfrac{h}{\mu}$ в быстрой переменной $\eta(\tau)$ (в уравнении для быстрой переменной).

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t)=\sum_{i=0}^{n+1} L_i e^{-ph}\xi(t)+\sum_{i=0}^{n+1} D_i e^{-ph}u(t) \\ \mu\dot{\eta}(\tau)=C_{21}\eta(\tau)+C_{22}\eta(\tau-h_1)+B_2u(\tau) \end{cases}, \quad \tau=\frac{t}{\mu}, \quad (4)$$

где матрицы L_i и D_i, $i=\overline{0,n+1}$ выражаются через параметры исходной СВС (1).

Для этой более простой системы можно использовать общую теорию управляемости.

Результат:

Теорема 1. Система (1), (2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по x, когда система (4) относительно управляема по $\xi(t)$ и

$$rank\left\{X_k(s),\quad k=\overline{1,n(n+2)},\quad s=\overline{0,(n+1)h}\right\}=n, \quad (5)$$

где $X_k(s)\in M^{n\times r}$ –матричные решения определяющего уравнения $X_{k+1}(s)=\sum_{i=0}^{n+1}L_iX_k(s-ih)+\sum_{i=0}^{n+1}D_iU_k$, $k=1,2,3,...,$ с начальными условиями

$$U_j(s)=0_r\ \forall s<0,\quad j=1,2,3,\ldots,$$

$$U_0(s)=\begin{cases}E_r & \text{при } s=0\\ 0_r & \text{при } s\neq 0\end{cases}.$$

Теорема 2. Система (1), (2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по у, когда система (4) относительно управляема по $\eta(\tau)$ и $rank\{Y_k(s),\ k=\overline{1,m};\ s\in[0,(n+1)h_1]\}=m;$ (6)

В $Y_k(s)\in M^{m\times r}$ матричные решения определяющего уравнения

$$Y_{k+1}(s)=C_{21}Y_k(s)+C_{22}Y_k(s-h_1)+B_2U_k(s),\quad k=1,2,3,...,$$

с начальными условиями

$$U_j(s)=0_r\ \forall s<0,\quad j=1,2,3,\ldots,$$

$$U_0(s)=\begin{cases}E_r & \text{при } s=0\\ 0_r & \text{при } s\neq 0\end{cases}.$$

Теорема 3. Система (1), (2) относительно управляема на отрезке $[0,T]$ по совокупности переменных {x,y}, когда система (4) относительно управляема по $\xi(t)$, $\eta(\tau)$ и одновременно выполняются условия (5), (6).

Литература

1. Glizer, V.Y. Controllability of nonstandard singularly perturbed systems with small state delay / V. Y. Glizer // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. – Vol. 48, no. 34. – P. 1280–1285.
2. Kopeikina, T. B. Some approaches to the controllability investigation of singularly perturbed dynamic systems / T. B. Kopeikina // Systems Science. – 1995. – Vol. 21. no. 1. – P. 17-36.
3. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с малым запаздыванием / Т. Б. Копейкина, А. С. Гусейнова // Вестник БНТУ. – 2006. –№ 4. – С. 54–58.
4. Копейкина, Т. Б. Об управляемости линейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / Т. Б. Копейкина // Дифференц. Уравнения. – Т. 25, № 9 – С. 1508–1518.