$i = 1, 2$, – почти периодические функции (это следует из леммы и свойств функции $V(t, u)$).

Таким образом, преобразованная система является диагональной с почти периодическими коэффициентами на главной диагонали. Теорема доказана.

Литература

1. Демидович, Б. П., Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М., 1967.
2. Былов, Б. Ф. Теория показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. – М., 1966.
3. Миллионщиков, В. М. Мат. заметки / В. М. Миллионщиков. – 1968. – Т. 4, № 2. – С. 173 – 180.
4. Веременюк В. В. Материалы 3-й МНТК "Наука – образованию, производству, экономике", Минск, 2006. – Т. 2. – С. 412–413.
5. Сергеев, И. Н. Дифференциальные уравнения/ И. Н. Сергеев. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 438 – 448.

УДК 539.3

Колебания вязко-упругой балки под воздействием движущейся нагрузки

Крушевский Е. А., Кузнецова А. А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается движение с постоянной скоростью c нормальной сосредоточенной нагрузки интенсивности $P(x, t)$ по вязкоупругой балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве.

В подвижной системе координат, связанной с нагрузкой, задачу можно считать стационарной. При этом уравнения изгиба упругой балки и перемещения в упругом полупространстве имеют вид ([1]):

$$B\frac{d^4w}{dx^4} + \rho c^2 \frac{d^2w}{dx^2} = P(x), \qquad (1)$$

$$\mu\Delta\overrightarrow{U}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\overrightarrow{U}=\rho c^2\frac{\partial^2\overrightarrow{U}}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

где *w(x)* - нормальное перемещение оси балки, *B=EI* - ее изгибная жесткость, *P(x)* - интенсивность нагрузки, приложенной к балке, $\overrightarrow{U}(U_x,U_y,U_z)$ - вектор перемещения в полупространстве в подвижной системе координат, ρ плотность материала балки, $\lambda=\nu E/(1-\nu-2\nu^2)$, $\mu=E/(2+2\nu)$ - константы Ламе, ν - коэффициент Пуассона, *E* - модуль упругости.

Предположим, что как материал балки, так и основание наделены вязкоупругими свойствами. Добавление вязкости приводит ([3], [4]) к необходимости учитывать воздействие почти периодического возмущения в течение достаточно долгого времени. В задачах, не связанных с интегро-дифференциальными уравнениями, указанная периодичность учитывается добавлением сомножителей вида $\exp(i\omega x)$, а также введению так называемого комплексного модуля упругости $E=E_1+iE_2$. Однако, представление комплекснозначных функций действительного переменного в показательной форме не совсем удобно с точки зрения дифференцирования и разделения действительной и мнимой частей. Поэтому для учета вязкости представим $P,\overrightarrow{U}$ в виде комплексных функций в алгебраической форме: $P(x)=P_1(x)+iP_2(x)$ $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{U_1}+i\overrightarrow{U_2}$, выразим коэффициенты λ,μ, исходя из комплексного представления модуля упругости, и подставим все в уравнение (2). Используя свойство аддитивности операторов Лапласа и Гамильтона, после разделения действительной и мнимой частей мы получим систему:

$$\begin{cases}\Delta\left(\dfrac{E_1\overrightarrow{U_1}-E_2\overrightarrow{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{E_1\overrightarrow{U_1}-E_2\overrightarrow{U_2}}{2(1+\nu)}+\dfrac{\nu(E_1\overrightarrow{U_1}-E_2\overrightarrow{U_2})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)=\rho c^2\dfrac{\partial^2\overrightarrow{U_1}}{\partial x^2}\\ \Delta\left(\dfrac{E_2\overrightarrow{U_1}+E_1\overrightarrow{U_2}}{2(1+\nu)}\right)+\nabla\mathrm{div}\left(\dfrac{E_2\overrightarrow{U_1}+E_1\overrightarrow{U_2}}{2(1+\nu)}+\dfrac{\nu(E_2\overrightarrow{U_1}+E_1\overrightarrow{U_2})}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right)=\rho c^2\dfrac{\partial^2\overrightarrow{U_2}}{\partial x^2}\end{cases} \qquad (3)$$

Разложив, следуя [1], поле перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие ($\vec{U} = \vec{U_1} + i\vec{U_2} = \nabla\Phi + \vec{U'} = \nabla\Phi_1 + \vec{U_1'} + {} + i(\nabla\Phi_2 + \vec{U_2'})$) и обозначить $k_1 = \dfrac{c^2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$, $k_2 = 2c^2\rho(1+\nu)$, можно получить следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{k_1}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1 - \left(\Delta - \dfrac{k_1}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2 = 0 \\ \left(\Delta - \dfrac{k_1}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_1 + \left(\Delta - \dfrac{k_1}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Phi_2 = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{k_2}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_1'} - \left(\Delta - \dfrac{k_2}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_2'} = 0 \\ \left(\Delta - \dfrac{k_2}{E_2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_1'} + \left(\Delta - \dfrac{k_2}{E_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vec{U_2'} = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{U_1'} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{U_2'} = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Для решения систем (4) - (6) можно применить методы (представления неизвестных функций в виде двумерных интегралов Фурье), аналогичные методам решения задачи в упругой постановке ([1],[2]).

Анализ разрешимости систем (4) - (6) показал, что в частном случае, когда $E_1 = E_2$, на основе известных формул ([1], [2]) после выполнения условий сопряжения балки и полупространства можно записать выражения для действительной и мнимой части нормального перемещения поверхности упругого полупространства под движущейся нагрузкой:

$$U_{\ell z} = \frac{4P_\ell(1-\nu)}{\pi^2 b}\int_0^\infty \frac{S_\ell(u)du}{E_\ell + \varepsilon_\ell u^2(u^2-\delta^2)S_\ell(u)},$$

где $S_\ell(u) = \dfrac{k_1}{E_\ell(1-\nu)}\displaystyle\int_0^\infty \frac{D_{\ell 1}\sin(u\tau)d\tau}{\tau\left[4D_2(D_{\ell 1} - D_2)D_0^2 - k_2^2\right]}$, $D_0 = \sqrt{1+\tau^2}$,

$D_{\ell 1} = \sqrt{1+\tau^2 - k_2/E_\ell}$, $D_{\ell 2} = \sqrt{1+\tau^2 - k_1/E_\ell}$, $\varepsilon_\ell = \dfrac{32(1-\nu^2)B}{\pi E_\ell b^4}$,

$\delta = 0{,}5bc\sqrt{\rho/B}$, $\ell = 1,2$.

Таким образом, задача в вязко-упругой постановке в частном случае, когда $E_1 = E_2$, распалась на пару независимых задач, по виду совпадающих с задачей в упругой постановке. Поэтому формулы для перемещений, деформаций и напряжений, полученные в [1], [2], с некоторыми уточнениями применимы в нашем случае.

При $E_1 \neq E_2$ система (4), например, преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} (E_1 - E_2)\Delta\Phi_1 = 0 \\ k_1\left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E_2}\right)\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} (E_1 - E_2)\Delta\Phi_2 = 0 \\ k_1\left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E_2}\right)\dfrac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2} = 0 \end{cases}. \qquad (7)$$

Из вторых уравнений систем (7) следует линейность функций Φ_1, Φ_2 по переменной x. Первые уравнения говорят о том, что функции Φ_1, Φ_2 могут быть произвольными гармоническими функциями переменных y и z. Аналогичные результаты можно получить и для системы (5). Таким образом, в общем случае наследственно-упругой среды ($E_1 \neq E_2$) исходная задача существенно отличается от случая упругой постановки и требует дополнительного исследования с привлечением дополнительных граничных условий в самой постановке задачи.

Литература

1. Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Воздействие сосредоточенной нагрузки при движении на упругое полупространство при движении по его поверхности / А. В. Чигарев, Б. И. Липень // Машиностроение. – 1999. – С. 69-74.
3. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 383 с.
4. Кристенсен, Р. Введение в теорию упругости / Р. Кристенсен. – Мир, 1974. – 338 с.