УДК 539.19

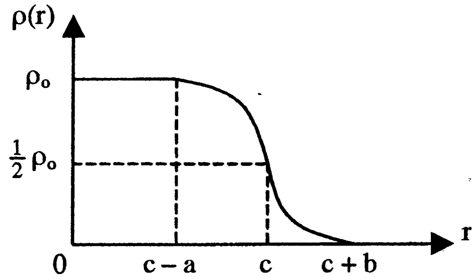
НЕСИММЕТРИЧНАЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА В АТОМНЫХ ЯДРАХ

Тесевич Б.И., Кужир П.Г.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В настоящей работе для описания плотности распределения r(r) электростатического заряда в сферических атомных ядрах предложена модель, условно названная несимметричным бипараболическим распределением. Согласно этой модели радиальная плотность распределения заряда r(r) в атомных ядрах, учитывающая наличие у ядра поверхностного слоя S, в пределах которого r(r) спадает от 90% до 10% своего максимального значения r_o в центре ядра, имеет вид:

$$\rho\,(r \le c - a) = \rho_o,$$
$$\rho(c \ge r \ge c - a) = \frac{\rho_o}{2a^2}\left[\, a^2 + 2ac - c^2 + 2(c-a)\ \ r - r^2 \right], \qquad (1)$$
$$\rho(c + b \ge r \ge c) = \frac{\rho_o}{2b^2}(r - c - b)^2,$$
$$\rho\,(r \ge c + b) = 0,$$

где *c* — радиус половинной плотности, т.е. r_o = r(c–a) = 2r(c), а значения параметров *a*, *b* и с зависят от выбора конкретного ядра и формы распределения заряда в нем.



Схематически радиальная функция r(r) состоит из двух горизонтальных (r ≤ c – a и r ≥ c + b) и двух параболических (c ≥ r ≥ c – a и c + b ≥ r ≥ c) несимметричных участков (см. рисунок), причем

$$\left.\frac{d\rho}{dr}\right|_{r=c-a}=\left.\frac{d\rho}{dr}\right|_{r=c+b}=0, \qquad \left.\frac{d\rho}{dr}\right|_{r=c-0}=-\frac{\rho_o}{a}, \qquad \left.\frac{d\rho}{dr}\right|_{r=c+0}=-\frac{\rho_o}{b}.$$

В случае симметричной бипараболической модели b = a.

Для любого центрально симметричного распределения заряда его плотность ρ(r) должна удовлетворять условию нормировки, которое выбиралось в виде:

$$\int\limits_V \rho\ \ (r)\ \ dV = 4\pi\int\limits_0^\infty r^2\rho(r)\ \ dr = 1\cdot$$

С учетом этого условия после необходимых вычислений получаем следующее выражение для параметра ρ_o:

$$\rho_o=\frac{15}{\pi}\left[f_1(b)+f_1(-a)\right]^{-1}, \tag{2}$$

где $f_1(x) = 10xc^2 + 5x^2c + x^3$. В частном случае симметричной бипараболической модели (при b = a) приходим к известному результату:

$$\rho_o = 3\left[2\pi c(2c^2+a^2)\right]^{-1}\cdot$$

Учитывая, что $r(r_1) = 0{,}9r_o$ и $r(r_2) = 0{,}1r_o$, где $r_1 = c - a(1 - \sqrt{5}/5)$ и $r_2 = c + b(1 - \sqrt{5}/5)$, для толщины поверхностного слоя ядра S получаем следующее выражение:

$$S = r_2 - r_1 = (a + b)(1 - \sqrt{5}/5).$$

Как следствие, для симметричной бипараболической модели справедливо известное выражение:

$$S = 2a(1 - \sqrt{5}/5).$$

Среднеквадратичный радиус ядра r_s для центральных полей удовлетворяет соотношению:

$$r_s^2=\left\langle r^2\right\rangle=\int\limits_V r^2\rho(r)\ \ dV=4\pi\int\limits_0^\infty r^4\rho(r)\ \ dr\cdot$$

В случае распределения заряда вида (1) после проведения необходимых вычислений приходим к следующему равенству:

$$r_s^2=\frac{2\pi\rho_o}{105}\left[\ 42c^5+f_2(b)+f_2(-a)\right], \tag{3}$$

где $f_2(x) = 35xc^4 + 35x^2c^3 + 21x^3c^2 + 7x^4c + x^5$.

Для симметричной бипараболической модели, когда b = a, с учетом соотношений (2) и (3) получаем известное выражение:

$$r_s^2 = \frac{2}{5}\left(3c^4 + 5a^2c^2 + a^4\right)\left(2c^2 + a^2\right)^{-1}.$$

Найдем аналитическое выражение для вычисления потенциальной энергии V(r) атомной орбитальной частицы с зарядом –e (например, для электрона в обычном атоме или мюона в мюонном атоме), движущейся в сферически симметричном поле атомного ядра с распределением заряда вида (1). Для ее вычисления используем известное решение уравнения Пуассона для центрального поля следующего вида:

$$V(r) = -4\pi\ Ze^2\left[\frac{1}{r}\int_0^r y^2\rho(y)\ dy + \int_r^\infty y\ \rho(y)\ dy\right],$$

где Ze — заряд ядра. В результате проведенных вычислений искомая функция V(r) была представлена в таком виде:

$$V(r) = -4\pi\ Ze^2\rho_o v(r), \tag{4}$$

где множитель ρ_o определяется согласно формуле (2), а функция v(r) имеет следующий вид:

$$v(r \le c-a) = \frac{c^2}{2} - \frac{r^2}{6} + \frac{b^2}{24} + \frac{cb}{6} + \frac{a^2}{24} - \frac{ca}{6},$$

$$v(c \ge r \ge c-a) = \frac{r^4}{40a^2} + \frac{(a-c)\ r^3}{12a^2} + \frac{(c^2 - 2ac - a^2)\ r^2}{12a^2} +$$
$$+ \frac{c^2}{4} + \frac{cb}{6} + \frac{b^2}{24} - \frac{c^4}{24a^2} + \frac{c^3}{6a} + \frac{(c+b)^5}{60a^2r},$$

$$v(c+b \ge r \ge c) = -\frac{r^4}{40b^2} + \frac{(c+b)\ r^3}{12b^2} - \frac{(c+b)^2\ r^2}{12b^2} + \frac{(c-a)^4}{24b^2} -$$
$$-\frac{c^5}{60b^2r} - \frac{c^4}{12br} + \frac{10c^3 - 10c^2a + 5ca^2 - a^3}{60r},$$

$$v(r \geq c+b) = \frac{c^3}{3r} + \frac{1}{60r}\left(b^3 + 5cb^2 + 10c^2b - 10c^2a + 5ca^2 - a^3\right)\cdot$$

Несложно показать, что V(r≥c + b) = –Ze²/r, поскольку v(r ≥ c + b) = 1/(4pr$_o$r).

Простой аналитический вид потенциальной энергии (4) позволяет легко найти, например, ее производную, т.е.

$$\frac{dV}{dr} = -4\pi \quad Ze^2\rho_o\frac{dv}{dr},$$

где

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r\leq c-a} = -\frac{1}{3}r,$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{c-a\leq r\leq c} = \frac{r^3}{10a^2} + \frac{(a-c)\ \ r^2}{4a^2} + \frac{(c^2-2ac-a^2)\ \ r}{6a^2} - \frac{(c-a)^5}{60a^2r^2},$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{c+b\geq r\geq c} = -\frac{r^3}{10b^2} + \frac{(c+b)\ \ r^2}{4b^2} - \frac{(c+b)^2r}{6b^2} + \frac{c^5}{60b^2r^2} + \frac{c^4}{16br^2} - \frac{10c^3 - 10c^2a + 5ca^2 - a^3}{60r^2},$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r\geq b+c} = -\frac{1}{4\pi\rho_o r^2}.$$

На границах областей изменения радиальной переменной получаем следующие значения функции v и ее производной

$$v(0) = \frac{c^2}{2} - \frac{ca}{6} + \frac{a^2}{24} + \frac{cb}{6} + \frac{b^2}{24},$$

$$v(c-a) = \frac{c^2}{3} + \frac{ca}{6} - \frac{a^2}{8} + \frac{cb}{6} + \frac{b^2}{24},$$

$$v(c) = \frac{c^2}{3} + \frac{cb}{6} + \frac{b^2}{24} - \frac{ca}{6} + \frac{a^2}{12} - \frac{a^3}{60c},$$

$$v(c+b)=\frac{10c^2b+5cb^2+b^3-10c^2a+5ca^2-a^3}{60(c+b)}+\frac{c^3}{3(c+b)},$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0}=0, \quad \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=c-a}=-\frac{1}{3}(c-a),$$

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=c}=-\frac{c}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a^2(a-5c)}{60c^2}, \quad \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=c+b}=-\frac{1}{4\pi\rho_o(c+b)^2}.$$

Как частный случай, для симметричной бипараболической модели получаем

$$v(0)=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{12},$$

$$v(r\le c-a)=-\frac{r^2}{6}+\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{12},$$

$$v(c-a)=\frac{c^2}{3}+\frac{ca}{3}-\frac{a^2}{12},$$

$$v(c\ge r\ge c-a)=\frac{r^4}{40a^2}+\frac{(a-c)\ r^3}{12a^2}+\frac{(c^2-2ac-a^2)\ r^2}{12a^2}+$$
$$+\frac{1}{24a^2}\left[2a^2(2c^2+a^2)-(c-a)^4\right]+\frac{(c-a)^5}{60a^2r},$$

$$v(c)=\frac{c^2}{3}+\frac{a^2}{8}-\frac{a^3}{60c},$$

$$v(c+a\ge r\ge c)=\frac{10a^2c(2c^2+a^2)-(c+a)^5}{30r},$$

$$v(c+a)=\frac{c(2c^2+a^2)}{6(c+a)}.$$

Чтобы получить использованные в (1) значения параметров a, b и c для конкретного ядра, можно воспользоваться параметрами распределения заряда, полученными при аппроксимации ρ(r) для этих ядер в рамках других моделей (например, однородного объемного, трапециевидного, фермиевского распределений заряда либо в симметричной бипараболической модели). Обязательным условием при этом в рамках любой модели следует считать постоянство среднеквадратичного радиуса $\rho_{в}$, значение которого определяется из эксперимента. Два остальных параметра распределения заряда вида (1) можно извлечь, например, считая неизменными экспериментальные значения толщины поверхностного слоя ядра S и радиуса половинной плотности c.