УДК 519.6

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА СИМПЛЕКСАХ

Бокуть Л.В.
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

При инженерном проектировании часто возникают задачи расчета электромагнитных полей и параметров, которые можно свести к решению дифференциальных уравнений 2-го порядка с частными производными. Этот факт указывает на возможность эффективного использования метода конечных элементов для нахождения приближенного решения неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца.

Неоднородное уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$div(p\nabla u) + k^2 u = g \,, \tag{1}$$

где u=u(x,y,z) — потенциал, p(x,y,z) — функция, определяющая материальные свойства рассматриваемой среды, величина k^2 определяется условиями задачи, g(x,y,z) — заданная функция источника.

На замкнутой поверхности S заданы граничные условия: либо условие Дирихле (на части S_1 поверхности S задано u), либо однородное условие Неймана(на части S_2 задано $\vec{n}\nabla u = 0$, где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S).

Приведенная формальная постановка задачи объясняется тем, что неоднородное уравнение Гельмгольца обладает определенной общностью, что позволяет использовать его для формулировки различных физических задач, в частности для задач электромагнетизма.

Для того чтобы построить приближенное решение задачи по определению потенциала используется следующий метод.

Область определения разбивается на треугольники, и на каждом треугольнике потенциальная функция представляется в виде линейной комбинации аппроксимирующих функций. Сущность метода заключается в унифицированной аппроксимации потенциала внутри каждого конечного элемента и подборе таких распределений потенциала в различных элементах, при которых сохранялась бы его непрерывность во всей области определения. При построении аппроксимирующих функций используются симплексные координаты.

Симплекс S в n-мерном пространстве определяется как геометрическая фигура с n+1 вершинами. Одномерный симплекс — отрезок прямой, двумерный симплекс — треугольник, трехмерный симплекс — тетраэдр. Произвольный симплекс однозначно определяется координатами его вершин.

Размер симплекса вычисляется по формуле:

$$\sigma(S) = \frac{1}{n!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n+1}^{(1)} & x_{n+1}^{(2)} & x_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Элементами этого определителя являются координаты вершин симплекса. Нижние индексы определяют номера вершин, а верхние — номера ортогональных координат в n — мерном пространстве. Таким образом, размером отрезка является его длина, треугольника — его площадь, тетраэдра — его объем и т.д.

Симплекс S можно разделить на подсимплексы S_k, выбрав точку P внутри симплекса S, причем

$$\sigma(S) = \sum_{k=1}^{n+1} \sigma(S_k) \qquad (3)$$

Для этого вводятся симплексные координаты точки P, инвариантные относительно переноса и поворота глобальной системы координат:

$$\xi_m = \frac{\sigma(S_m)}{\sigma(S)}, \; m = \overline{1, n+1}. \qquad (4)$$

Геометрический смысл симплексных координат — отношение длины перпендикуляра, опущенного из точки P на одну из граней симплекса, к длине опущенного на ту же грань перпендикуляра из вершины симплекса противоположной данной грани. Например, для двумерного случая отношение площадей треугольников PA_2A_3 и $A_1A_2A_3$ равно отношению их высот, так как оба треугольника имеют своим основанием отрезок A_2A_3.

Из выражений (3) и (4) получим равенство:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \xi_k = 1 \qquad (5)$$

Пусть произвольный треугольник с вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) размещен в плоскости OXY. Тогда первая симплексная координата точки (x,y) на основании (4) равна

$$\xi_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Разлагая первый определитель по элементам первого столбца, получим:

$$\xi_1 = \frac{1}{2A}\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right), \tag{7}$$

где A — площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

Вычисляя миноры, находим:

$$\xi = \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{2A} + \frac{(y_2 - y_3)x}{2A} + \frac{(x_3 - x_2)y}{2A}. \tag{8}$$

Вычислив аналогичным образом две оставшиеся симплексные координаты ξ_2, ξ_3, получим, что переход от глобальных декартовых координат (x, y) к локальным симплексным координатам (ξ_1, ξ_2, ξ_3) осуществляется с помощью преобразования:

$$2A \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Для того чтобы определить интерполяционные функции на симплексах, введем семейство вспомогательных полиномов. Член этого семейства с номером m вычисляется по формуле:

$$R_m(n, \xi) = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\xi - k/n}{m/n - k/n} = \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(n\xi - k), \quad m > 0, \tag{10}$$

$$R_0(n, \xi) = 1.$$

Этот полином имеет нули при $\xi = 0; \frac{1}{n}; \ldots; \frac{m-1}{n}$ и принимает значение равное единице при $\xi = \frac{m}{n}$.

На одномерном симплексе (отрезке заданной длины) интерполяционные функции определяются с помощью формулы:

$$\alpha_{ij} = R_i(n,\xi_1) \cdot R_j(n,\xi_2)\text{, где } i + j = n. \tag{11}$$

На двумерном симплексе (треугольнике) интерполяционные функции определяются выражением:

$$\alpha_{ijk} = R_i(n,\xi_1) \cdot R_j(n,\xi_2) \cdot R_k(n,\xi_3)\text{, где } i + j + k = n. \tag{12}$$

Каждая из этих интерполяционных функций обращается в нуль во всех узловых точках, за исключением связанного с ней узла, где она принимает значение равное единице. Следовательно, данные функции представляют собой полиномы Лагранжа, записанные в нестандартном виде.

Рассматриваемые интерполяционные функции обладают следующими важными для построения конечных элементов свойствами. Интерполяционные функции определяются через симплексные координаты и, следовательно, инвариантны при поворотах и переносах глобальной системы координат. Кроме того, симплексные координаты удобны с вычислительной точки зрения, так как охватывают одинаковый диапазон значений для любого симплекса.

УДК 539.21

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ И ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ РЕШЕТКИ В МНОГОСЛОЙНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ НАНОСТРУКТУРАХ

Кушнир В. Н.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Повышенный интерес к исследованию сверхпроводящих многослойных наноструктур (СМНС) обусловлен следующими причинами: Во-первых, ряд интересных физических свойств [1], а также, относительно простая технология формирования СМНС позволяют их использовать как для изучения фундаментальных проблем теории сверхпроводимости, так и в практических приложениях. Во-вторых, свойства системы магнитных вихрей, образующихся в промежуточном состоянии в СМНС, во многом подобны свойствам вихревой среды в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП). Поэтому СМНС