УДК 517.3

Методы теории функций многих комплексных переменных в задачах механики сплошных сред

Нифагин В.А.
Белорусский национальный технический университет

Применение методов теории функций комплексного переменного в пространстве C^1 для решения плоских задач механики сплошных сред, в частности механики деформируемого твердого тела позволило получить эффективный аппарат построения аналитических решений краевых задач в замкнутой форме [1]. Однако попытки обобщения такого подхода на пространственный случай наталкиваются на ряд принципиальных трудностей, связанных в первую очередь с недостаточной разработанностью теории функций многих комплексных переменных. В работе [2] введена единая структура матричных переменных C^2 и функций, обобщающая представления на пространственный случай и позволяющая компактно записать основные уравнения среды, а также интегралы общего решения этих уравнений.

Так для бигармонической функции U было получено комплексное представление в C^2 через аналитические матричные функции матричной переменной:

$$4U = \overline{z^{(2)}}\varphi\left(z^{(2)}\right)+\overline{\varphi}\left(\overline{z^{(2)}}\right)z^{(2)}+\chi\left(z^{(2)}\right)+\overline{\chi}\left(\overline{z^{(2)}}\right), \quad (1)$$

где $z^{(2)}=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}$.

Действительная обобщенная функция Эри в форме $U\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ позволяет найти компоненты тензоры напряжений и вектора перемещений, на основе которых были получены комплексные представления через две аналитические матричные функции матричной переменной $z^{(2)}$ для пространственного случая.

Рассмотрим применение аппарата функций многих комплексных переменных для описания пространственных краевых задач теории пластичности в больших деформациях (геометрическая нелинейность) [3-4]. С учетом вырождения $x_4 = 0$ из соотношений (1) имеем формулировку краевой задачи в перемещениях для полулинейного материала

$$a_1\varphi\left(t^{(2)}\right)+\frac{a_2\sqrt{\overline{\omega'}\left(t^{(2)}\right)}}{\sqrt{\overline{\varphi'}\left(t^{(2)}\right)}}\int_{\Gamma}\sqrt{\varphi'\left(t^{(2)}\right)\omega'\left(t^{(2)}\right)}d\gamma+ \qquad (2)$$

$$+\overline{\chi}\left(t^{(2)}\right)=f\left(t^{(2)}\right),$$

где $z^{(2)}=\omega\left(\zeta^{(2)}\right)$ - квазиконформное отображение области

B' на область B пространства $C^{(2)}$. a_1, a_2 - постоянные.

Компоненты вектора перемещений u_m заданные на пространственном контуре Γ определяют функцию

$$f(t)=D_{z^{(2)}}\left(f_1(t),f_2(t),f_4(t),0\right).$$

Данная задача относительно регулярных потенциалов $\varphi\left(z^{(2)}\right)$ и $\chi\left(z^{(2)}\right)$ является существенно нелинейной, в отличие от аналогичной в линейной теории упругости, что не позволяет использовать разработанный аналитический аппарат. Отметим, что конфигурация недеформированного тела обычно известна, поэтому функция $\omega\left(\zeta^{(2)}\right)$ считается заданной. Для постановки краевой задачи в напряжениях, когда на границе задаются внешние силы следует учитывать неопределенность их направлений, поэтому ограничимся случаем так называемых «мертвых» или «следящих» нагружений. В первом случае направления внешних поверхностных усилий фиксированы относительно недеформированного тела, например, силы действуют в направлении нормали к поверхности. Во втором случае направления поверхностных усилий сохраняют ориентацию относительно деформированной конфигурации, например, в направлении нормали к последней.

Для формулировки краевого условия на контуре, где усилия заданы главным вектором V с учетом квазиконформного отображения области на каноническую

$$V=\int\limits_{\Gamma} F\left(\omega\left(t^{(2)}\right)\right) g\left(t^{(2)}\right) d\gamma, \tag{3}$$

где множитель перед дифференциалом пространственной дуги контура определяется левой частью (2).

Тогда соотношение для усилий на Γ запишется

$$\left(a_1-1\right)\cdot\varphi\left(t^{(2)}\right)+\frac{a_2\sqrt{\overline{\omega'}\left(t^{(2)}\right)}}{\sqrt{\overline{\varphi'}\left(t^{(2)}\right)}}\int\limits_{\Gamma}\sqrt{\varphi'\left(t^{(2)}\right)\omega'\left(t^{(2)}\right)}d\gamma+ \\ +\overline{\chi}\left(t^{(2)}\right)=-\frac{icV}{2\mu}+c_1\,. \tag{4}$$

В смешанной краевой задаче на части Γ_1 контура Γ заданы перемещения, а на части Γ_2 - усилия, краевые условия (2), (4) задают на соответствующих частях Γ_1, Γ_2 границы Γ. В задачах для односвязных областей комплексные потенциалы однозначны. Для неодносвязных областей возможна неоднозначность потенциалов, которая устраняется заданием асимптотик напряженного состояния на бесконечности.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.
2. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости.-М.: Наука, 1978.
3. Александрович А. И. Примение теории функций двух комплексных переменных к теории упругости. ДАН СССР, т. 232, N 3, 1977.
4. Нифагин В. А. Вариант теории пластичности в конечных деформациях: Сб. трудов междунар. НТК БНТУ, 2003, с. 32-38.