УДК 629.113.012.8.001.57

# Об эквивалентности математических моделей параметрических и крутильных колебаний при исследовании устойчивости

Микулик Н.А., Рейзина Г.Н.
Белорусский национальный технический университет

Изложены два подхода к исследованию устойчивости колебаний систем и обеспечения эффективного снижения вибраций.

Современные математические модели колесных машин описывают физические процессы, происходящие в деталях и узлах подвески, силовой передаче и др., используя различные расчетные схемы одной и той же системы транспортной машины. В настоящее время имеются работы, в которых показаны связанность крутильных колебаний трансмиссии с вертикальными, угловыми и продольными колебаниями подрессоренных и неподрессоренных масс поступательно движущегося автомобиля.

Так, в работах [1,2] показано влияние упругой подвески ведущего моста на собственные частоты и особенно на первую низшую частоту трансмиссии. В работе [2] авторами предложена математическая модель динамики поступательно движущегося автомобиля с учетом крутильных колебаний трансмиссии совместно с вертикальными, продольно-угловыми колебаниями массы автомобиля на упругих элементах подвески и шин. Математическая модель расчетной схемы с одним ведущим задним мостом и рессорной подвеской (без учета диссипативных сил) представлялась системой дифференциальных уравнений двенадцатого порядка:

$$C\ddot{w} + Aw = 0, \qquad (1)$$

где $C$ – матрица коэффициентов инерций,

$A$ – симметричная матрица коэффициентов жесткостей.

Решение таких систем проводится численными методами. Расчет собственных частот пятимассовой крутильной схемы с учетом линейных колебаний показал, что собственные частоты трансмиссии снизились: первая собственная частота силовой передачи с 2,16 до 1,32 Гц, а вторая частота повысилась с 18,02 до 19,02. При этом продольно-угловая частота поступательно движущейся массы повысилась с 16,24 до 18,02 Гц. Анализ устойчивости системы в этом случае является затруднительным.

Проводя анализ движений и сил, действующих на каждую часть физической системы, авторы пришли к эквивалентной математической модели, состоящей из неоднородного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами:

$$\ddot{z} + k\dot{z} + w^2(1 + h\cos vt)z = f(t), \tag{2}$$

где $z$ – вертикальные колебания подрессоренной части машины,

$k$ – коэффициент демпфирования подрессоренной части,

$w$ – собственная частота подрессоренной части,

$v$ – собственная частота, возникающая вследствие кинематического возмущения механизма с переменным передаточным отношением и соотношением скоростей, действующих на вращающиеся движущиеся массы системы,

$h$ – коэффициент возбуждения,

$f(t)$ – вынужденные колебания, возбуждающиеся внешним воздействием.

Получены аналитические решения:

$$z(t) = z_1\int_0^t \frac{z_2}{w(t)} f(t)dt + z_2\int_0^t \frac{z_1}{w(t)} f(t)dt,$$

где

$$z_1 = e^{\left(\lambda - \frac{k}{2}\right)t}\cos\left(\frac{v}{2}t + \alpha\right), \qquad z_2 = e^{-\left(\lambda + \frac{k}{2}\right)t}\sin\left(\frac{v}{2}t + \alpha\right),$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2 w}{4v} - \left(w - \frac{v}{2}\right)^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(w - \frac{v}{2}\right) - \frac{hw^2}{4w}}{\lambda}\right).$$

Уравнение (2) является одним из видов классического уравнения Матье. Из теории [4] известно, что при определенных соотношениях между его параметрами оно имеет неограниченно возрастающие решения, которые заполняют целые области на плоскости. Данное явление называется параметрическим резонансом системы, а области значений параметров, при которых наступает этот резонанс, называют областями динамической неустойчивости системы. Параметрический резонанс может возникнуть в рассматриваемой модели при следующих соотношениях между параметрами: $k = w/v$, $k = 1,2,3,\ldots,n$.

В соответствии с числом $k$ различают первую, вторую, третью и т.д. области динамической неустойчивости. Область, лежащая вблизи $w = v$, наиболее опасна – это главная часть динамической неустойчивости. Ее границы выражаются зависимостью

$$1-\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{4k^2}{v^2}} < \left(\frac{2w^2}{v}\right)^2 < 1+\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{4k^2}{v^2}} .$$

Необходимо отметить, что диссипативные свойства системы оказывают существенное влияние на параметрический резонанс.

Таким образом, предлагаемая эквивалентная математическая модель содержит минимум произвольных предположений по сравнению с ранее описанными в работах [1-3], и имеет ряд принципиальных преимуществ: получение аналитических решений; условия возникновения как вынужденных, так и параметрических резонансов; условия устойчивости колебательной системы.

**Литература**

1. Микулик Н.А. Динамические системы с реактивными звеньями. – Мн.: Выш.шк., 1985 – 112 с.

2. Семенов В.М., Кондрашкин С.И. и др. – О динамике автомобиля как колебательной системы со многими степенями свободы. – «Автомобильная промышленность», 1976, № 4.

3. Рейзина Г.Н. – О случайном возбуждении параметрических колебаний дополнительного подрессоривания /Conference Materials, – Kyiv, 1998, с.429.

4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М., 1966.