

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра
«Теоретическая механика и механика материалов»

Л.Е. Реут

**СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ
ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ**

Учебно-методическое пособие
для студентов машиностроительных специальностей

Электронное учебное издание

Реут Л.Е.

Статически неопределимые системы при плоском поперечном изгибе: учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей (электронное учебное издание) / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2021. – 128 с.

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, зам. генерального директора по научной работе Государственного научно-производственного объединения порошковой металлургии **Е.Е. Петюшик**;

кандидат технических наук, доцент, декан факультета информационных технологий и робототехники Белорусского национального технического университета **А.М. Авсевич**

Электронное учебное издание представляет собой пособие по дисциплине «Механика материалов» и рассматривает один из важных разделов курса, посвященный расчету статически неопределимых систем. Статически неопределимые конструкции широко распространены в машиностроении и строительной практике. По сравнению со статически определимыми они более надежны и долговечны, обладают большим запасом прочности и большей жесткостью, многовариантны при проектировании, наиболее рациональны и экономичны. Несмотря на некоторые их недостатки – чувствительность к монтажу, кинематическим и температурным воздействиям – преимущества статически неопределимых систем являются преобладающими, что определяет их широкое применение в инженерной практике. В пособии широко представлен теоретический аспект темы, рассмотрены методики раскрытия статической неопределимости, пути и наиболее рациональные способы решения, а также предложен широкий набор практических инженерных задач с решениями, анализом, пояснениями и методическими рекомендациями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех технических специальностей дневной и заочной форм обучения высших технических учебных заведений, а также для преподавателей при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	5
1. Связи, накладываемые на систему. Понятие статической неопределимости	5
2. Раскрытие статической неопределимости. Метод сил	10
3. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости	18
4. Плоскопространственные и пространственные системы	20
5. Определение перемещений в статически неопределимых системах	22
6. Перемещения, вызванные действием температуры	24
7. Статически неопределимые балки	31
7.1. Решение с помощью уравнения изогнутой оси балки (метод Навье)	33
7.2. Решение методом сил	34
7.3. Неразрезные балки. Решение с помощью «уравнения трех моментов»	39
8. Энергетический метод (принцип наименьшей работы)	48
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	50
1. Статически неопределимые рамы	50
2. Статически неопределимые балки	82
 Литература	 128

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов – это наука об инженерных методах расчета деталей машин, механизмов и строительных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Механика материалов представляет собой фундаментальную общетехническую дисциплину, изучаемую во всех технических вузах, и является основой технического образования инженера любой специальности.

Одним из важных в курсе «Механики материалов» является раздел, посвященный расчетам статически неопределимых конструкций, которые широко распространены в машиностроении и строительной практике. Статически неопределимые системы, в отличие от статически определимых более надежны и долговечны, обладают бóльшим запасом прочности и большей жесткостью, многовариантны при проектировании, наиболее рациональны и экономичны. Несмотря на некоторые их недостатки – чувствительность к неточности изготовления деталей и монтажу, к кинематическим и температурным воздействиям – преимущества статически неопределимых систем являются преобладающими, что определяет их широкое применение в инженерной практике.

Данное пособие представляет собой одну из книг цикла электронных пособий по изучению дисциплины «Механика материалов». Здесь широко представлен теоретический аспект темы, рассмотрены методики раскрытия статической неопределимости, пути и наиболее рациональные способы решения, а также предложен широкий набор практических инженерных задач с решениями, пояснениями и методическими рекомендациями.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Система называется статически неопределимой, если реакции опор и внутренние усилия в элементах нельзя определить с помощью одних только уравнений равновесия.

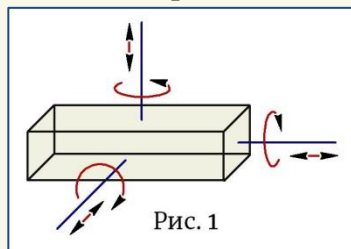
Для раскрытия статической неопределимости при выполнении инженерных расчетов существует несколько способов, отличающихся методическим подходом. Выбор того или иного способа определяется видом конструкции и возможностью применения к ней данной методики, требуемой точностью ее расчета и т.д. Для стержневых систем, работающих на растяжение-сжатие и на кручение наиболее удобным является МЕТОД ДЕФОРМАЦИЙ, который заключается в совместном рассмотрении статической, геометрической и физической сторон задачи. Этот метод является достаточно простым, однако он не подходит для статически неопределимых систем, работающих, например, на изгиб или в условиях сложного сопротивления, а также для конструкций, где требуется более высокая точность расчета. В этом случае используются другие методы расчета, такие как МЕТОД СИЛ, МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД (*метод наименьшей работы*) и др.

В данной теме мы рассмотрим статически неопределимые системы в более широком аспекте и изучим МЕТОД СИЛ как наиболее универсальный способ раскрытия статической неопределимости.

1. Связи, накладываемые на систему. Понятие статической неопределимости

Связи НЕОБХОДИМЫЕ и ЛИШНИЕ

Рассмотрим некое тело и представим, что оно никаким образом не закреплено и абсолютно свободно «плавает» в пространстве. Если к телу приложить внешнюю нагрузку, оно способно получить перемещение в любом направлении. Если все возможные направления перемещений разложить по координатным осям и плоскостям, то можно сказать, что система в общем случае обладает *шестью степенями свободы* и может совершать шесть перемещений: три поступательных и три вращательных (угловых) перемещения (рис. 1).



Система, которая под действием внешних сил перемещается в пространстве или на плоскости как единое целое, называется *механизмом*. Механика материалов не изучает *механизмы* и тела здесь рассматривают как *условно неподвижные*. И хотя многие элементы конструкций могут находиться в движении (поступательном или вращательном), механика материалов изучает только деформацию этих тел и смещение точек внутри тела, связанное с этой деформацией. Поэтому для движущихся тел составляющая перемещения точек при переносе тела как жесткого целого исключается из расчета и сохраняется только та часть, которая характеризует изменение формы. Таким образом, в механике материалов рассматриваются только *кинематически неизменяемые* системы – системы, которые не изменяют свое положение в пространстве или на плоскости как единое целое и в которых действие внешних сил приводит только к изменению их размеров и формы. А чтобы система под действием внешних сил была *кинематически неизменяема*, на нее должны быть наложены связи.

|| Минимальное количество связей, которое обеспечивает кинематическую неизменяемость системы под действием внешних сил, называются **НЕОБХОДИМЫМИ СВЯЗЯМИ**.

Для пространственной системы **НЕОБХОДИМЫХ** связей должно быть шесть, для плоской – три. Если хотя бы на одну **НЕОБХОДИМУЮ** связь будет меньше, система обязательно получит линейное или угловое перемещение в направлении отсутствующей связи.

Но часто с целью придания конструкции большего запаса прочности и большей жесткости на нее накладывают дополнительные связи в виде различных конструктивных приспособлений – закреплений, подвесок, опор и т.д.

|| **Дополнительные связи, накладываемые на систему сверх необходимых, называются ЛИШНИМИ СВЯЗЯМИ**.

ЛИШНИМИ они называются потому, что с точки зрения обеспечения кинематической неизменяемости они роли не играют, кинематическую неизменяемость полностью обеспечивают связи **НЕОБХОДИМЫЕ**. А вот с точки зрения расчета они действительно являются лишними, так как определить их из уравнений статики не представляется возможным. Известно, что для пространственной системы можно составить только шесть уравнений равновесия (для плоской – три) →

$\sum X = 0$	$\sum M_x = 0$
$\sum Y = 0$	$\sum M_y = 0$
$\sum Z = 0$	$\sum M_z = 0$

а поэтому, если на систему наложены только НЕОБХОДИМЫЕ связи, они все могут быть определены из уравнений равновесия, если наложены еще и дополнительные связи – для их определения требуются другие методы и методики расчета. Следовательно:

Система, наделенная только НЕОБХОДИМЫМИ СВЯЗЯМИ, является статически определимой. Система, наделенная ЛИШНИМИ СВЯЗЯМИ, является статически неопределимой.

Связи ВНЕШНИЕ и ВНУТРЕННИЕ

ВНЕШНИЕ – это опорные связи. Число внешних связей определяется конструкцией опоры (рис. 2):

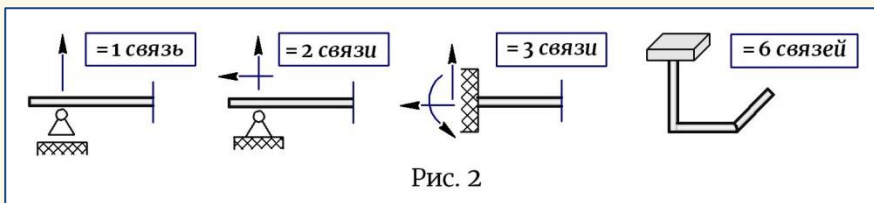


Рис. 2

Внешние связи могут быть *необходимыми* и *лишними*, и если число внешних связей, т.е. реакций опор, превышает число уравнений равновесия, то такая система является **статически неопределимой внешним образом**.

ВНУТРЕННИЕ – это связи, ограничивающие взаимное перемещение элементов друг относительно друга внутри конструкции. Число внутренних связей определяется видом соединения:

Жесткое соединение элементов

Жесткое соединение двух элементов (рис. 3, а, в) дает три внутренних связи, которые, если конструкцию мысленно разрезать по соединению (рис. 3, б, г), не позволяют стержням 1 и 2 двигаться относительно друг друга – *горизонтально* (связь X_1), *вертикально* (связь X_2) и *поворачиваться* (связь X_3).

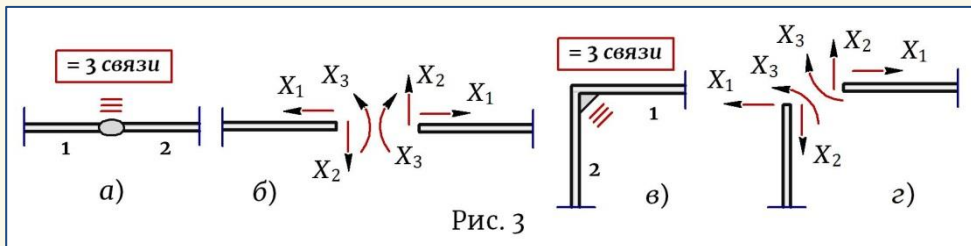
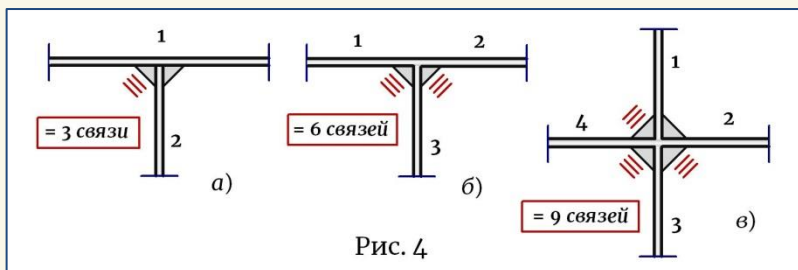


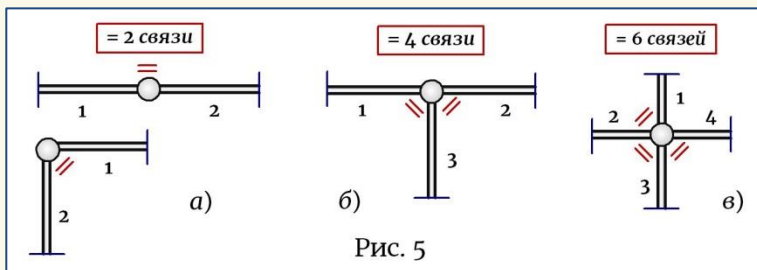
Рис. 3

При жестком соединении элементов в Т-образном узле количество внутренних связей зависит от числа стержней, сходящихся в этом узле: если здесь соединены два стержня (рис. 4, а), то такое соединение дает три связи, если три стержня (рис. 4, б) – шесть связей. В крестообразном узле, состоящем из четырех стержней (рис. 4, в), будут возникать девять (*не двенадцать !!!*) внутренних связей.



Шарнирное соединение элементов

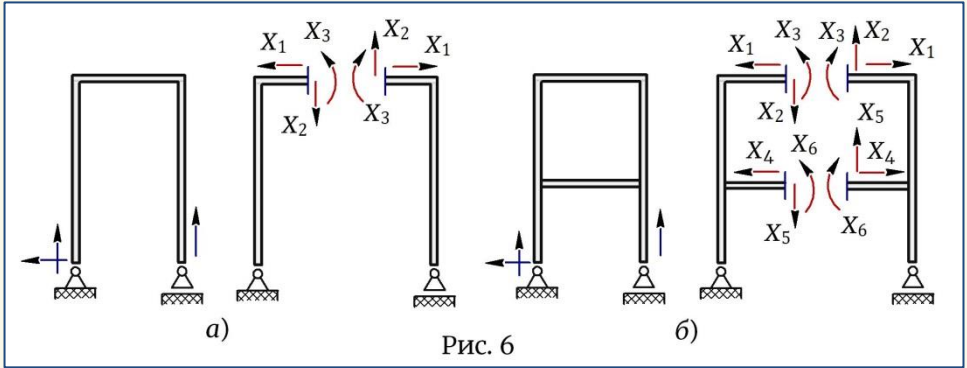
При шарнирном соединении элементов следует помнить, что шарнир снимает число связей на единицу меньше, чем число стержней, в нем сходящихся (рис. 5). Поэтому:



Внутренние связи также бывают *необходимыми* и *лишними*, и если число внутренних связей превышает число уравнений равновесия, то такая система **статически неопределима внутренним образом**.

Таким образом, конструкция может быть статически неопределимой как *внешним*, так и *внутренним* образом. Например, рама (рис. 6, а) статически определима и *внешним*, и *внутренним* образом, так как и реакции опор, и внутренние усилия в раме могут быть определены с помощью трех уравнений равновесия, составляемых для плоской системы. Рама (рис. 6, б) – статически определима *внешним* образом, но статически неопределима *внутренним* образом, так как здесь возникают шесть внутренних усилий ($X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$), которые определить из уравнений статики невозможно.

! Следует помнить, что любые замкнутые контуры всегда статически неопределимы внутренним образом.



Таким образом, для определения степени статической неопределимости следует учитывать и внешние, и внутренние связи. А так как систему статически неопределимой делают лишние связи, то по их числу и устанавливается *степень статической неопределимости*, которая для плоских систем вычисляется по формуле:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D, \quad (1)$$

где L – число лишних связей или *степень статической неопределимости* системы; $C_{\text{опор}}$ – число опорных связей; $C_{\text{вн}}$ – число внутренних связей; D – число стержней в конструкции.

Примечание.

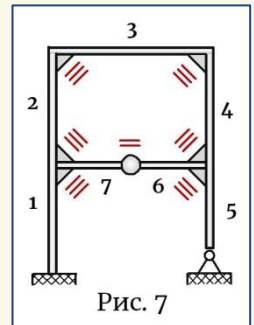
Для пространственных конструкций при определении числа лишних связей в последнем слагаемом следует ставить коэффициент 6.

Вычисление степени статической неопределимости следует начинать с определения числа стержней в конструкции, так как от этого зависит число внутренних связей в Т-образном соединении.

ПРИМЕР. Для заданной рамы (рис. 7) определить степень статической неопределимости.

Устанавливаем на раме количество стержней, определяем число внешних и внутренних связей:

- $D = 7$ – число стержней на раме;
- $C_{\text{опор}} = 5$ – число опорных реакций;
- $C_{\text{вн}} = 20$ – число внутренних связей.



Тогда на основании формулы (1) степень статической неопределенности рамы равна: $L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 5 + 20 - 3 \cdot 7 = 4 \rightarrow$
 рама *четыре раза статически неопределима*.

2. Раскрытие статической неопределенности. Метод сил

В механике материалов одним из методов, используемых для раскрытия статической неопределенности, является МЕТОД СИЛ.

Суть метода заключается в следующем. Определив число лишних связей по формуле (1), эти связи от конструкции отбрасываются, в результате чего система становится статически определимой и называется «*основная система*». Далее, чтобы *основная система* по условиям работы полностью соответствовала исходной конструкции, ее загружают заданной внешней нагрузкой, а в направлении отброшенных связей прикладывают силы и моменты и задают условие, что перемещения по направлению этих сил и моментов равны нулю, что соответствует факту наличия здесь связей, не допускающих эти перемещения. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению этих сил, перемещения по направлению которых действительно равны нулю, поэтому метод и называется МЕТОДОМ СИЛ.

Рассмотрим пошагово методику раскрытия статической неопределенности по МЕТОДУ СИЛ на примере плоской рамы (рис. 8):

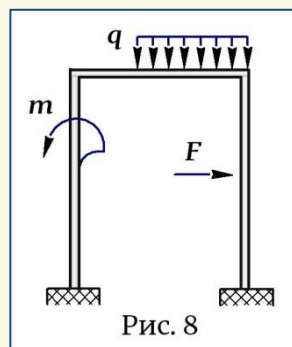


Рис. 8

Шаг 1. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ РАМЫ

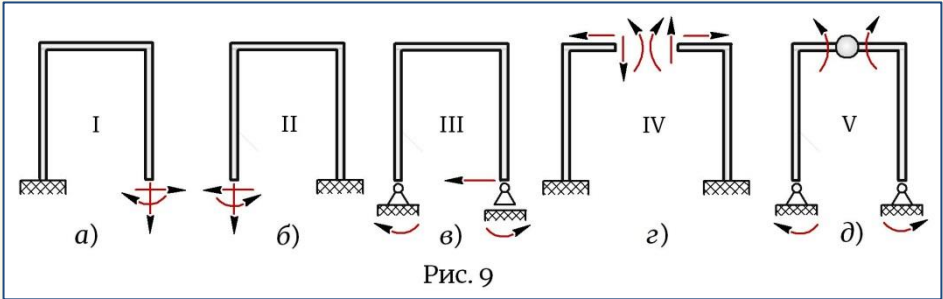
По формуле (1) получаем: $L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 6 + 6 - 3 \cdot 3 = 3 \rightarrow$
 рама *трижды статически неопределима*.

Шаг 2. Выбор ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

Статически определимая система, полученная из статически неопределимой путем отбрасывания лишних связей, называется ОСНОВНАЯ СИСТЕМА.

Лишние связи от конструкции можно отбрасывать и как внешние, и как внутренние, а поэтому для каждой статически неопределимой

системы можно подобрать несколько вариантов ОСНОВНЫХ СИСТЕМ (рис. 9):

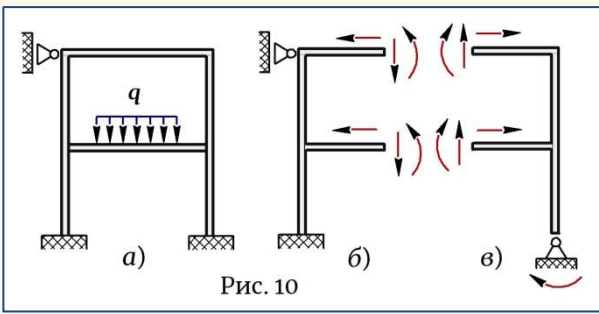


Здесь на рис. 9 (а-в) лишние связи убраны как *внешние (опорные)*, на рис. 9, г – как *внутренние*, на рис. 9, д – *комбинированный вариант*, где две связи отброшены как *внешние* и одна – как *внутренняя*.

❗ При выборе ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ необходимо следить за выполнением следующих важных условий:

- ★ при отбрасывании лишних связей система должна становиться статически определимой, так как все решение задачи выполняется именно на ней и потребует определение реакций опор и построение эпюр;
- ★ при отбрасывании лишних связей необходимо следить, чтобы система сохранила кинематическую неизменяемость, что особенно представляет опасность при решении систем пространственных и много раз статический неопределимых.

ПРИМЕР. Рассмотрим вариант «неправильного» выбора ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ для рамы (рис. 10, а).



Согласно формуле (1) рама *семь раз статически неопределима*:

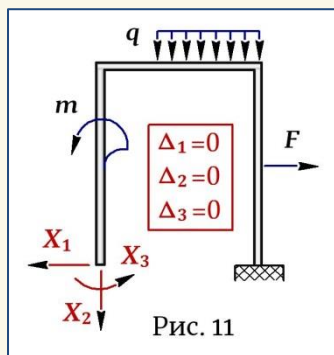
$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 7 + 18 - 3 \cdot 6 = 7.$$

Отбрасываем лишние связи – шесть как внутренние и одну – как внешнюю (рис. 10, б, в). Если рама разрезается, т.е. лишние связи отбрасываются как внутренние, дальнейший расчет следует выполнять на двух частях рамы, однако *левая часть* (рис. 10, б) остается статически неопределимой, что не позволит вычислить здесь реакции опор и построить необходимые эпюры, а *правая часть* (рис. 10, в) – кинематически изменяема, так как шарнирно-неподвижная опора не предотвратит поворот и падение рамы при соответствующей нагрузке.

Возвращаемся к задаче (рис. 8). Проанализировав варианты основных систем (рис. 9), для дальнейших расчетов выбираем ВАРИАНТ II.

Шаг 3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМА

Чтобы ОСНОВНАЯ СИСТЕМА по условиям работы соответствовала исходной раме, загружаем ее заданной нагрузкой, а в направлении отброшенных связей прикладываем силы и моменты и задаем условие, что перемещения по направлению приложенных сил и моментов равны нулю: $\Delta_1 = 0$ – перемещение по направлению силы X_1 ; $\Delta_2 = 0$ – перемещение по направлению силы X_2 ; $\Delta_3 = 0$ – перемещение по направлению момента X_3 . В результате получаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ (рис. 11).



Шаг 4. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ X_1, X_2, X_3

При решении задачи следует понимать, что каждое из перемещений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (рис. 11) определяется не только той силой, которая приложена по его направлению, но и всей системой сил, действующих на раму, т.е. силами X_1, X_2, X_3 и заданной внешней нагрузкой.

Рассмотрим перемещение Δ_1 , которое возникает по направлению силы X_1 . На основании вышесказанного это перемещение является результатом действия всех сил и согласно принципу независимости действия сил перемещение определяется как:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{1F} = 0, \quad (2)$$

где *первый индекс* указывает силу, по направлению которой происходит перемещение, а *второй индекс* – силу, которая вызывает это пе-

ремещение, т.е. Δ_{11} – это перемещение по направлению силы X_1 и вызвано оно силой X_1 ; Δ_{12} – это перемещение по направлению силы X_1 , но вызвано оно силой X_2 ; Δ_{13} – это перемещение по направлению силы X_1 , но вызвано оно моментом X_3 ; Δ_{1F} – это перемещение по направлению силы X_1 , но вызвано оно заданной внешней нагрузкой (обозначим ее значком « F »).

Отвлечемся немного от изучаемой темы и рассмотрим простое растяжение стержня (рис. 12).

От действия силы F стержень удлиняется и перемещение точки приложения силы, равное его удлинению (рис. 12, а), определяется по закону Гука как:

$$\Delta = F\ell/EA. \quad (a)$$

Если к стержню приложить единичную силу $\bar{F} = 1$, то его удлинение или перемещение точки приложения единичной силы δ (рис. 12, б) по закону Гука будет соответственно равно:

$$\delta = \bar{F}\ell/EA = | \bar{F} = 1 | = \ell/EA. \quad (б)$$

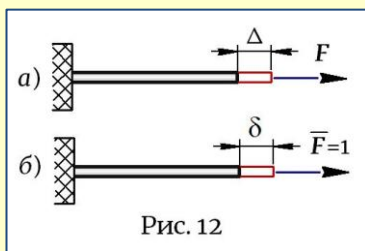


Рис. 12

Подставляем значение δ (б) в Δ (а) и получаем: $\Delta = \delta F$. Это значит, что перемещение любой точки можно определить как перемещение от единичной силы, умноженное на величину этой силы.

Возвращаемся к выражению (2), в котором на основании выше-сказанного каждое слагаемое можно соответственно представить как:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1; \Delta_{12} = \delta_{12}X_2; \Delta_{13} = \delta_{13}X_3, \quad (3)$$

где δ_{11} – это перемещение по направлению силы X_1 от единичного ее значения $\bar{X}_1 = 1$; δ_{12} – это перемещение по направлению силы X_1 от единичной силы $\bar{X}_2 = 1$; δ_{13} – это перемещение по направлению силы X_1 от единичного момента $\bar{X}_3 = 1$.

Подставляем значения (3) в выражение (2) и получаем суммарное перемещение по направлению силы X_1 в виде:

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0. \quad (4)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}; \delta_{23} = \delta_{32}; \delta_{13} = \delta_{31}. \quad (8)$$

★ коэффициенты Δ_{1F} , Δ_{2F} , Δ_{3F} называются *грузовыми коэффициентами*. Они могут быть *положительными*, *отрицательными* и *равными нулю*.

По своей сути коэффициенты канонических уравнений являются перемещениями, а поэтому могут быть определены одним из известных способов, например, методом перемножением эпюр.

Шаг 6. Определив коэффициенты и подставив их в систему уравнений (6), вычисляем значения сил $X_1 - X_2 - X_3$, которые представляют собой реакции на левой опоре рамы (рис. 9, б). Таким образом, *статическая неопределимость задачи раскрыта*.

Шаг 7. Возвращаемся к исходной конструкции, восстанавливаем отброшенные связи и с помощью уравнений равновесия определяем реакции на остальных опорах. Затем строим окончательные эпюры внутренних сил и выполняем проверку расчета.

ПРИМЕР. Для заданной рамы (рис. 13, а) раскрыть статическую неопределимость, определить реакции опор и построить эпюры.

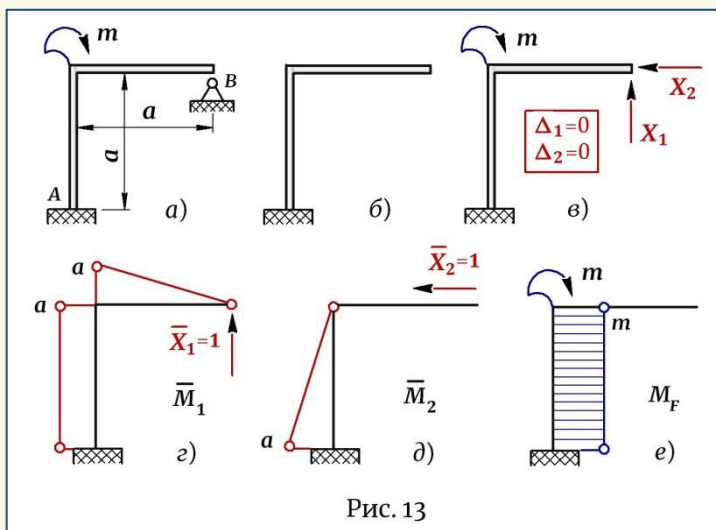


Рис. 13

① Определяем СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ рамы:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 5 + 3 - 3 \cdot 2 = 2 -$$

рама дважды статически неопределима.

② Выбираем основную систему. Наиболее рациональным здесь является вариант рамы без шарнирной опоры B . Поэтому убираем эту опору, две лишние связи отбрасываем как внешние и выбираем основную систему в виде (рис. 13, б). Затем создаем эквивалентную систему (рис. 13, в).

③ Расписываем для рамы условия по перемещениям $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$ и получаем канонические уравнения метода сил, число которых всегда соответствует степени статической неопределимости системы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

④ Определяем коэффициенты канонических уравнений.

Так как коэффициенты уравнений – это перемещения, определяем их методом перемножения эпюр.

Для этого к основной системе поочередно прикладываем единичные силы $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 13, з), $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 13, д) и заданную рабочую нагрузку m (рис. 13, е), строим *единичные* и *грузовую* эпюры и перемножаем их соответствующим образом по методу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + a \cdot a \cdot a \right) = \frac{4a^3}{3EI_x} = \frac{8a^3}{6EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_2 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a \right) = \frac{a^3}{3EI_x} = \frac{2a^3}{6EI_x};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a \right) = \frac{a^3}{2EI_x} = \frac{3a^3}{6EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} (-m \cdot a \cdot a) = -\frac{ma^2}{EI_x} = -\frac{6ma^2}{6EI_x};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_x} \left(-m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) = -\frac{ma^2}{2EI_x} = -\frac{3ma^2}{6EI_x}.$$

Примечание.

При вычислении коэффициентов, если знаменатели отличаются, их удобно приводить к одному значению, которое после подстановки коэффициентов в канонические уравнения можно сократить.

⑤ Подставляем коэффициенты в систему уравнений, решаем ее и получаем:

$$\begin{cases} \frac{8a^3}{6EI_x} X_1 + \frac{3a^3}{6EI_x} X_2 - \frac{6ma^2}{6EI_x} = 0; \\ \frac{3a^3}{6EI_x} X_1 + \frac{2a^3}{6EI_x} X_2 - \frac{3ma^2}{6EI_x} = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 = 3m/7a \\ X_2 = 6m/7a \end{cases}.$$

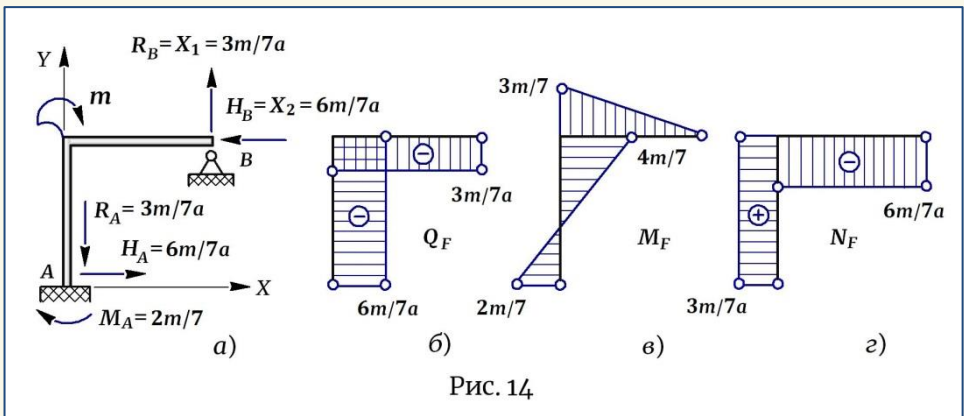
⑥ Определяем на раме остальные реакции опор и строим эпюры.

Возвращаемся к исходной раме (рис. 13, а). Совершенно очевидно, что силы X_1 и X_2 , приложенные по направлению отброшенных связей (рис. 13, в), являются реакциями на опоре B , и так как они получены со знаком «плюс», значит соответствующие реакции будут иметь такое же направление, как и заданные силы X_1 и X_2 . Задаем эти реакции (рис. 14, а) и с помощью уравнений равновесия находим реакции в заделке:

$$\sum X = 0: \quad H_A - H_B = 0 \rightarrow H_A = 6m/7a;$$

$$\sum Y = 0: \quad R_B - R_A = 0 \rightarrow R_A = 3m/7a;$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + m - R_B \cdot a - H_B \cdot a = 0 \rightarrow M_A = 2m/7.$$



Строим для рамы окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рис. 14, б, в, г).

При раскрытии статической неопределимости обязательной является проверка расчета, которая в данном примере не производится, но будет обязательно рассмотрена в практических задачах.

3. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости

Метод сил для раскрытия статической неопределимости является универсальной методикой решения статически неопределимых задач и может быть применим для конструкций самых разных форм и элементов, работающих на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, а также при сложном сопротивлении. Метод отбрасывания лишних связей и представление условий по перемещениям в каноническом виде, позволяет привести задачу к решению системы уравнений, включающих неизвестные отброшенные связи. И так как число уравнений всегда соответствует числу лишних связей, т.е. степени статической неопределимости, такая система всегда решается. Проблема возникает только в случае, если система является много раз статически неопределимой, что приводит к большому числу уравнений и входящих в них слагаемых, в результате решение такой системы становится математически сложной задачей.

Однако большинство конструкций, встречающихся на практике, являются *симметричными* по геометрической форме и способу закрепления и эта симметричность позволяет упростить решение.

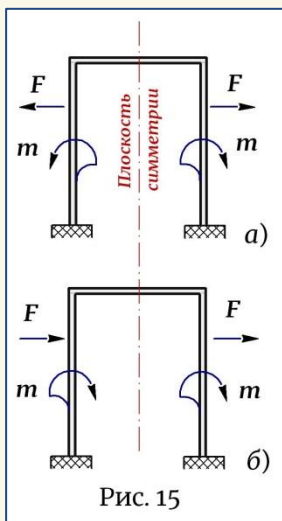


Рис. 15

Рассмотрим симметричную раму и введем понятия **СИММЕТРИЧНОЙ** и **КОСОСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ**:

Если нагрузка, приложенная к левой части рамы, является зеркальным отражением сил, приложенных к правой части, она называется СИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ (рис. 15, а).

Если нагрузка, приложенная к левой части рамы, является зеркальным отражением сил, приложенных к правой части, но противоположна по направлению, она называется КОСОСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ (рис. 15, б).

Согласно методу сил рама на рис. 15 трижды статически неопределима: $L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 6 + 6 - 3 \cdot 3 = 3$. Отбрасываем от рамы три лишних связи и выбираем **ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ**.

! Для симметричных конструкций основную систему рационально выбирать также *симметричной*. Для этого раму следует «рассечь» по оси симметрии и лишние связи убрать как внутренние именно в плоскости симметрии (рис. 16). В этом случае основная система будет состоять из двух симметричных половинок рамы.

Внутренние силы также могут быть:

- ★ СИММЕТРИЧНЫМИ – X_1 и X_3 ;
- ★ КОСОСИММЕТРИЧНЫМИ – X_2 .

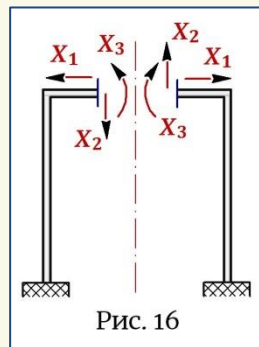


Рис. 16

Записываем для рамы систему канонических уравнений –

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2F} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

и, используя свойство симметрии, упрощаем уравнения:

★ В плоскости симметрии побочные коэффициенты, у которых один индекс принадлежит симметричному, а другой – кососимметричному внутреннему усилию, обращаются в ноль: $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ и $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Это несложно доказать, определив коэффициенты методом Верещагина, суммируя результат перемножения левой и правой половинок рамы (рис.17):

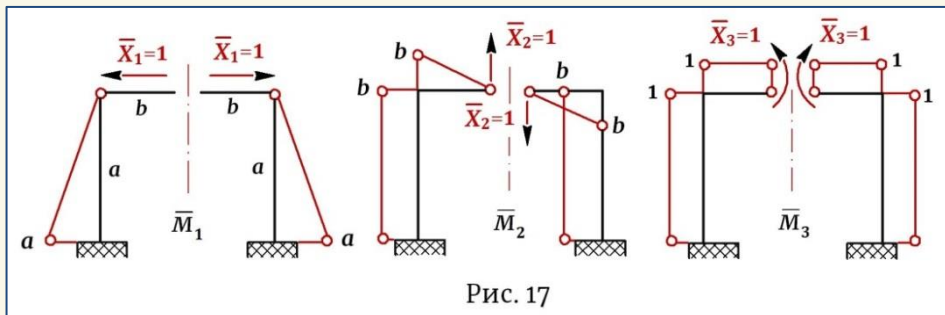


Рис. 17

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot b - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot b \right) = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_2 \bar{M}_3) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot 1 + a \cdot b \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot 1 - a \cdot b \cdot 1 \right) = 0.$$

И тогда система уравнений (9) принимает вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

★ Если к раме приложена симметричная внешняя нагрузка, то в плоскости симметрии в ноль обращаются кососимметричные внутренние усилия (рис.18, а): $X_2 = 0$. Тогда, согласно уравнениям (10), также получаем $-\Delta_{2F} = 0$, и система канонических уравнений превращается в систему двух уравнений с двумя неизвестными:

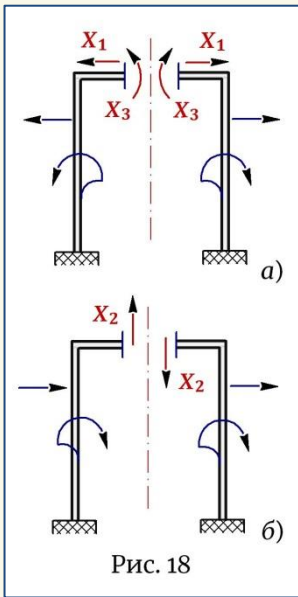


Рис. 18

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3F} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

★ Если к раме приложена кососимметричная внешняя нагрузка, то в плоскости симметрии в ноль обращаются симметричные внутренние усилия (рис.18, б): $X_1 = 0$ и $X_3 = 0$. Тогда, согласно уравнениям (10) $-\Delta_{1F} = 0$ и $\Delta_{3F} = 0$, и система канонических уравнений приводится к решению одного единственного уравнения:

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \quad (12)$$

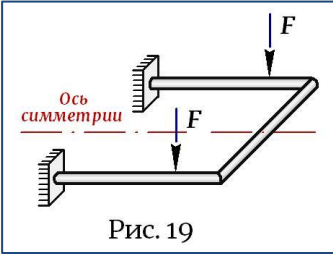
Примечание.

При решении задачи можно (и это не будет ошибкой) выбрать другой вариант ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ, отбросив лишние связи другим образом, но тогда систему уравнений (9) придется решать целиком.

4. Плоскопространственные и пространственные системы

ПЛОСКОПРОСТРАНСТВЕННЫМИ называются системы, которые являются плоскими в геометрическом отношении, т.е. их геометрическая ось лежит в одной плоскости, а плоскость действия внешних сил проходит перпендикулярно к плоскости геометрической оси.

Рассмотрим плоскопространственную раму (рис. 19) и определим степень ее статической неопределимости. На основании формулы (1) получаем: $L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 6Д = 12 + 12 - 6 \cdot 3 = 6$ – система *шесть раз*



статически неопределима.

Примечание.

Как было сказано выше, в формуле (1) для определения числа лишних связей в пространственных системах, в отличие от плоских, число стержней следует умножить на коэффициент б.

Использование *метода сил* для таких конструкций согласно (7) потребует решение системы шести канонических уравнений с шестью неизвестными и семью слагаемыми в каждом:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{14} X_4 + \delta_{15} X_5 + \delta_{16} X_6 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{24} X_4 + \delta_{25} X_5 + \delta_{26} X_6 + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{61} X_1 + \delta_{62} X_2 + \delta_{63} X_3 + \delta_{64} X_4 + \delta_{65} X_5 + \delta_{66} X_6 + \Delta_{6F} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение такой системы является крайне сложной задачей, однако плоскопространственные конструкции, встречающиеся на практике, как правило, являются симметричными, и это позволяет значительно упростить решение. Как и в плоских конструкциях, основную систему здесь также рационально выбирать симметричной, «разсекая» раму по оси симметрии и отбрасывая лишние связи как внутренние именно в плоскости симметрии (рис. 20),

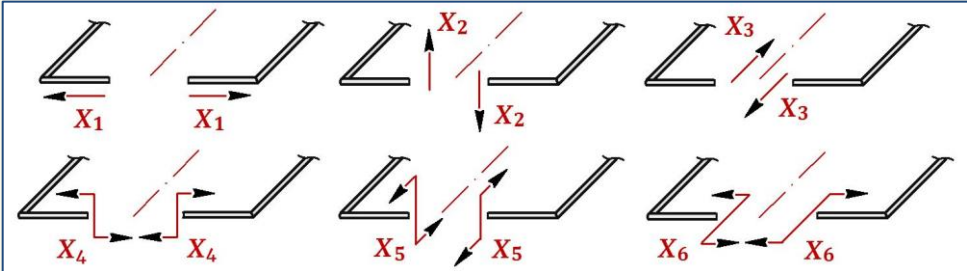


Рис. 20

где силы $X_1 - X_4 - X_6$ являются **СИММЕТРИЧНЫМИ**, а $X_2 - X_3 - X_5$ – **КОСОСИММЕТРИЧНЫМИ** внутренними усилиями. А поэтому:

★ В плоскости симметрии –

$$\begin{aligned}\delta_{12} = \delta_{21} = 0; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{15} = \delta_{51} = 0; \\ \delta_{42} = \delta_{24} = 0; \quad \delta_{43} = \delta_{34} = 0; \quad \delta_{45} = \delta_{54} = 0; \\ \delta_{26} = \delta_{26} = 0; \quad \delta_{36} = \delta_{36} = 0; \quad \delta_{56} = \delta_{56} = 0.\end{aligned}$$

★ При симметричной внешней нагрузке – $X_2 = 0; X_3 = 0; X_5 = 0$,
и значит, $\Delta_{2F} = 0; \Delta_{3F} = 0; \Delta_{5F} = 0$.

★ При кососимметричной нагрузке – $X_1 = 0; X_4 = 0; X_6 = 0$, и
значит, $\Delta_{1F} = 0; \Delta_{4F} = 0; \Delta_{6F} = 0$.

Кроме того, в плоскопространственных конструкциях есть еще особенность, позволяющая упростить решение системы уравнений:

★ Если рама является плоской в геометрическом отношении, а внешняя нагрузка (симметричная или кососимметричная) приложена перпендикулярно плоскости рамы, то в ноль обращаются внутренние силы, лежащие в плоскости рамы, т.е. $X_1 = 0; X_3 = 0; X_6 = 0$.

★ Если рама является плоской и внешняя нагрузка приложена в плоскости рамы, то нулю будут равны внутренние силы, перпендикулярные этой плоскости, т.е. $X_2 = 0; X_4 = 0; X_5 = 0$.

Таким образом, используя свойство симметрии и особенности плоскопространственных конструкций, систему канонических уравнений (13) можно значительно упростить и облегчить ее решение.

Однако вышесказанное относительно внешних сил (симметричных или кососимметричных), приложенных в плоскости или перпендикулярно плоскости рамы, справедливо только для плоскопространственных систем. Если конструкция является пространственной и нагружена в силовых плоскостях, ориентированных различным образом, необходимо решать полную систему канонических уравнений.

5. Определение перемещений в статически неопределимых системах

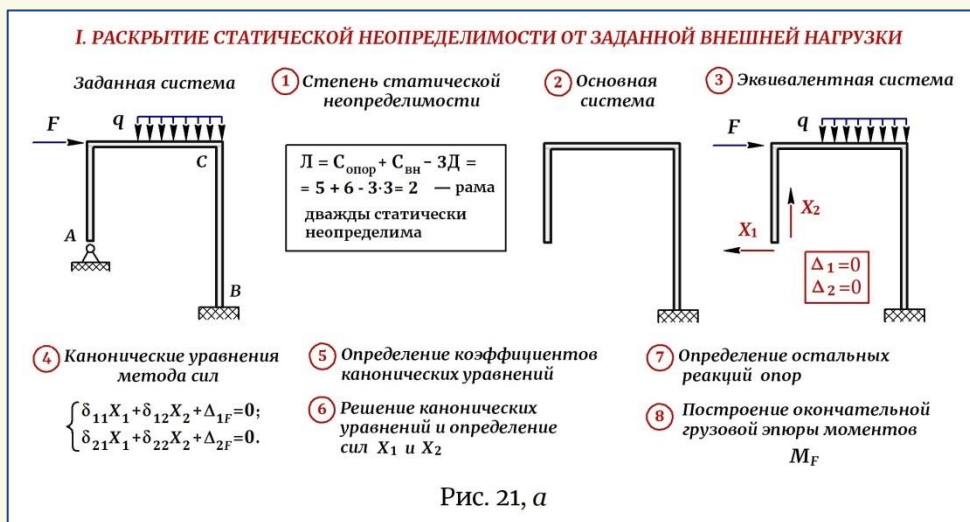
Универсальным способом определения перемещений в конструкциях любой формы является энергетический метод, основанный на вычислении потенциальной энергии деформации и теореме Кастилиано, согласно которой *производная потенциальной энергии по обобщенной силе равна обобщенному перемещению*. Метод Кастилиано применим для элементов самых разных форм, а для деталей

стержневого типа он приведен к решению интеграла Максвелла-Мора или методу перемножения эпюр. Так как в механике материалов основными объектами расчета являются стержни – прямые или кривые, для определения в них перемещений чаще всего и применяют интеграл Мора или метод Верещагина, решение которых построено на использовании в расчете единичной нагрузки – *единичной силы* $\bar{F}=1$ и *единичного момента* $\bar{m}=1$, предназначенных соответственно для вычисления линейных и угловых перемещений.

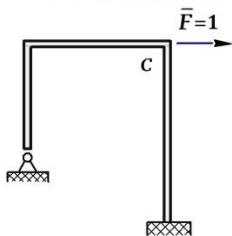
Рассмотрим определение перемещений в плоских рамах и используем для этого метод перемножения эпюр. Согласно методу –

- ★ первоначально для заданного элемента строят *грузовую эпюру* – эпюру внутренних сил от действующей внешней нагрузки;
- ★ затем элемент освобождают от внешней нагрузки и в заданном сечении по направлению искомого перемещения прикладывают единичную силу или единичный момент и строят *единичную эпюру*;
- ★ далее производят перемножение эпюр – *грузовой и единичной* – и вычисляют перемещение заданного сечения.

Рассмотрим этот метод на примере статически неопределимой рамы (рис. 21), в которой необходимо определить горизонтальное перемещение узла С. В статически неопределимых системах решение осложняется тем, что для построения *грузовой* и *единичной* эпюр надо дважды раскрывать статическую неопределимость – сначала от внешней нагрузки (рис. 21, а), затем – от единичной силы (рис. 21, б):



II. РАСКРЫТИЕ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ ОТ ЕДИНИЧНОЙ НАГРУЗКИ



... и далее решение выполняется по алгоритму (4)–(8), но теперь от единичной силы $\bar{F}=1$, и завершается построением единичной эпюры моментов \bar{M}

III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ узла C путем перемножения эпюр M_F и \bar{M}

Рис. 21, б

Однако вопрос определения перемещений в статически неопределимых системах можно решить проще. При построении *единичной эпюры* в качестве внешней нагрузки, от которой следует освободить раму, можно рассматривать не только заданную нагрузку, но и любые лишние связи – внешние или внутренние, делающие конструкцию статически неопределимой. Освободив раму от лишних связей, мы получаем статически определимую систему, которая, согласно *методу сил*, называется *ОСНОВНОЙ СИСТЕМОЙ*. И тогда единичную нагрузку надо прикладывать к *ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ*, используя любой ее вариант, и строить на ней *единичную эпюру* (рис. 22):

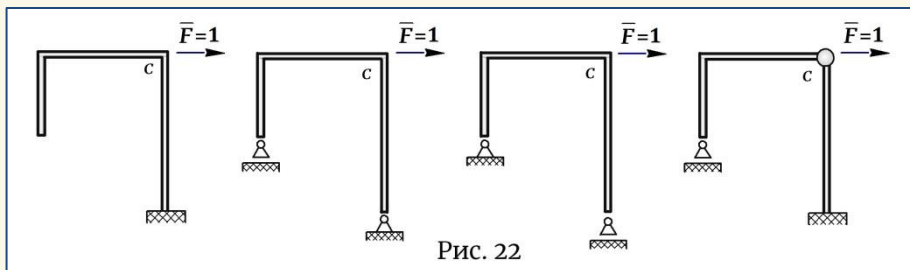


Рис. 22

Таким образом, при определении перемещений в статически неопределимых системах для построения *грузовой* и *единичной* эпюр нет необходимости дважды раскрывать статическую неопределимость. Достаточно это сделать один раз для построения *грузовой эпюры*, а для построения *единичной* – единичную силу следует приложить к любому варианту *ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ*.

6. Перемещения, вызванные действием температуры

Большое количество конструкций, особенно машиностроительного профиля, работает не только в условиях силового воздействия, но и изменяющихся температур, подвергаясь в процессе работы значи-

тельному нагреву или охлаждению. Это оказывает большое влияние на прочность и жесткость элементов, а поэтому, требует обязательного учета при расчете и проектировании конструкции.

Одной из особенностей статически неопределимых систем, работающих в условиях изменения температуры, является возникновение в элементах температурных напряжений, что при наличии силового нагружения может привести к потере их прочности. Не менее важным последствием воздействия температурного поля является также потеря жесткости конструкции, связанная с деформацией и перемещением узлов, приводящим к изменению ее формы.

Рассмотрим вопрос определения перемещений узлов при изменении температуры (например, нагреве) в *статически определимых* и *статически неопределимых* системах.

Статически определимые системы

Рассмотрим плоскую конструкцию, подвергающуюся действию системы сил (рис. 23, а) и, используя интеграл Максвелла-Мора, определим вертикальное перемещение сечения В. Для этого освобождаем систему от внешней нагрузки, в заданном сечении по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу

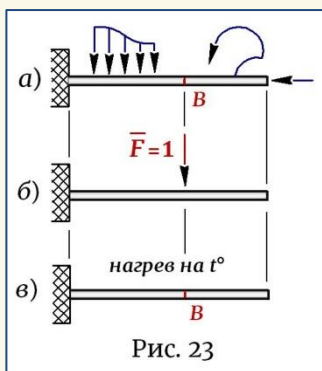


Рис. 23

прикладываем единичную силу (рис. 23, б) и вычисляем Δ_B по интегралу Мора:

$$\Delta_B = \int \frac{N_F \bar{N}}{EA} dz + \int \frac{Q_F \bar{Q}}{GA} dz + \int \frac{M_F \bar{M}}{EI_x} dz, \quad (14)$$

где N_F, Q_F, M_F – *грузовые внутренние усилия*; $\bar{N}, \bar{Q}, \bar{M}$ – *единичные внутренние усилия*.

Теперь определим это же перемещение от нагрева элемента и при отсутствии внешних сил (рис. 23, в). В этом случае грузовые внутренние усилия N_F, Q_F, M_F в выражении (14) заменяем на температурные – N_t, Q_t, M_t и интеграл Мора принимает вид:

$$\Delta_B = \int \frac{N_t \bar{N}}{EA} dz + \int \frac{Q_t \bar{Q}}{GA} dz + \int \frac{M_t \bar{M}}{EI_x} dz. \quad (15)$$

Рассмотрим равномерный и неравномерный нагрев системы и выведем формулы для вычисления перемещений при температурных изменениях.

Равномерный нагрев

Равномерный нагрев означает, что внутренние и наружные части конструкции нагревается на одинаковую температуру (рис. 24, а):

$$t^{\circ}_{\text{нар}} = t^{\circ}_{\text{вн}} = t^{\circ}.$$

Вырежем элемент бесконечно малой длины dz (рис. 24, б) и по известной формуле запишем его удлинение от нагрева:

$$\Delta \ell_t = \alpha t^{\circ} \ell \rightarrow \Delta(dz) = \alpha t^{\circ} dz, \quad (16)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала.

Определим величину продольной силы N_t , которая могла бы вызвать такое же удлинение элемента. По закону Гука –

$$\Delta(dz) = \frac{N_t dz}{EA}. \quad (17)$$

Приравниваем выражения (16) и (17) и получаем:

$$\alpha t^{\circ} dz = \frac{N_t dz}{EA} \rightarrow N_t = \alpha EA t^{\circ}. \quad (18)$$

Подставляем значение N_t (18) в интеграл Мора (15) и, учитывая, что при равномерном нагреве происходит только изменение длины элемента, но в нем не возникают сдвиг и изгиб, т.е. $Q_t = 0$ и $M_t = 0$, получаем решение в виде:

$$\Delta_B = \int \frac{N_t \bar{N}}{EA} dz = \int \frac{\alpha EA t^{\circ} \bar{N}}{EA} dz = \alpha t^{\circ} \int \bar{N} dz,$$

где $\int \bar{N} dz = \omega_{\bar{N}}$ – это площадь эпюры продольной силы от единичной нагрузки. И тогда окончательная формула для определения перемещений при равномерном нагреве (или охлаждении) принимает вид:

$$\Delta_B = \alpha t^{\circ} \omega_{\bar{N}}. \quad (19)$$

ПРИМЕР. В заданной раме (рис. 25, а) определить горизонтальное и вертикальное перемещение конца консоли В, вызванное равномерным нагревом на температуру $t^{\circ} = 60^{\circ}\text{C}$. Принять для рамы: $a = 1\text{ м}$;

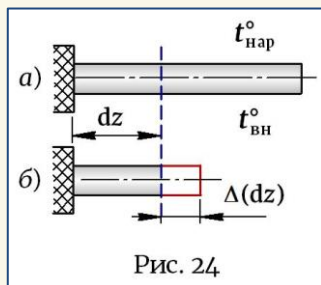


Рис. 24

$$\alpha = 125 \times 10^{-7} \text{ град}^{-1}.$$

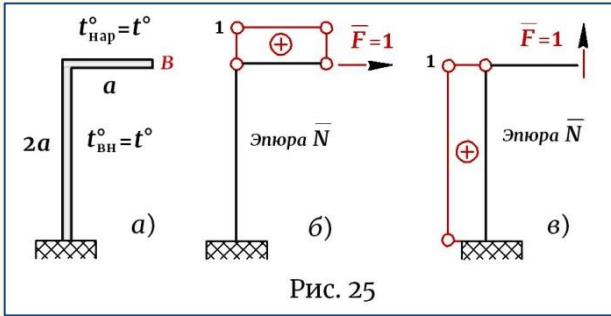


Рис. 25

Горизонтальное (рис. 25, б) и вертикальное (рис. 25, в) перемещения конца консоли B на основании (19) соответственно равны:

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \alpha t^\circ \omega_{\bar{N}} = \left| \omega_{\bar{N}} = 1 \cdot a \right| = \alpha t^\circ a = 125 \cdot 10^{-7} \cdot 60^\circ \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,75 \text{ мм};$$

$$\Delta_B^{\text{верт}} = \alpha t^\circ \omega_{\bar{N}} = \left| \omega_{\bar{N}} = 1 \cdot 2a \right| = 2\alpha t^\circ a = 2 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 60^\circ \cdot 1 \cdot 10^3 = 1,5 \text{ мм}.$$

Неравномерный нагрев

При неравномерном нагреве внутренние и наружные поверхности конструкции нагреваются неодинаково — $t^\circ_{\text{нар}} \neq t^\circ_{\text{вн}}$. В результате происходит не только изменение длины элементов, но и их изгиб.

Рассмотрим элемент с высотой сечения h (рис. 26, а), подвергающийся неравномерному нагреву, при котором $t^\circ_{\text{нар}} > t^\circ_{\text{вн}}$. Вырежем бесконечно малую часть элемента длиной dz и определим возникающие в ней деформации (рис. 26, б):

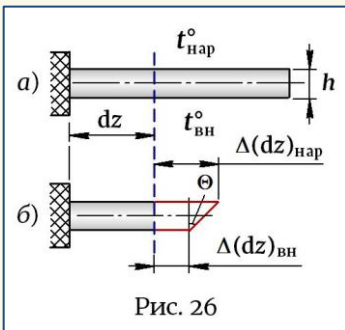


Рис. 26

★ Изменение длины наружных и внутренних волокон соответственно равны:

$$\begin{aligned} \Delta(dz)_{\text{нар}} &= \alpha t^\circ_{\text{нар}} dz; \\ \Delta(dz)_{\text{вн}} &= \alpha t^\circ_{\text{вн}} dz. \end{aligned} \quad (20)$$

★ Изменение длины вырезанной части определяем по оси элемента как среднюю линию трапеции —

$$\Delta(dz) = \frac{\Delta(dz)_{\text{нар}} + \Delta(dz)_{\text{вн}}}{2},$$

откуда на основании значений (20) получаем:

$$\Delta(dz) = \frac{\alpha t_{\text{нар}}^{\circ} dz + \alpha t_{\text{вн}}^{\circ} dz}{2} = \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2} dz. \quad (21)$$

★ Определим продольную силу N_t , которая могла бы вызвать такое же удлинение. По закону Гука удлинение определяется как:

$$\Delta(dz) = \frac{N_t dz}{EA}. \quad (22)$$

★ Приравниваем значения (21) и (22) и получаем:

$$N_t = \alpha EA \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2}. \quad (23)$$

★ Но при неравномерном нагреве сечение не только перемещается вдоль оси, но и за счет изгиба элемента поворачивается на угол Θ , который на основании рис. 26, б и значений (20) определяется как:

$$\text{tg}\Theta \approx \Theta = \frac{\alpha t_{\text{нар}}^{\circ} dz - \alpha t_{\text{вн}}^{\circ} dz}{h} = \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h} dz. \quad (24)$$

★ Определим изгибающий момент M_t , который при изгибе мог бы вызвать такой же поворот сечения. Используем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и в результате его интегрирования получаем:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x} \rightarrow \Theta = \frac{dy}{dz} = \int_0^z \frac{M_{\text{изг}}}{EI_x} dz = \int_0^z \frac{M_t}{EI_x} dz = \frac{M_t dz}{EI_x}; \quad (25)$$

★ Приравниваем значения (24) и (25) и получаем:

$$M_t = \alpha EI_x \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h}. \quad (26)$$

Подставляем значения N_t (23) и M_t (26) в интеграл (15) и, учитывая, что при неравномерном нагреве, также как и при равномерном, деформации сдвига нет, т.е. $Q_t = 0$, после преобразования получаем:

$$\Delta_B = \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2} \int \bar{N} dz + \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h} \int \bar{M} dz,$$

где $\int \bar{N} dz = \omega_{\bar{N}}$ и $\int \bar{M} dz = \omega_{\bar{M}}$ — площади эпюр продольной силы и из-

гибающего момента от единичной нагрузки соответственно. И тогда окончательная формула для определения перемещений при неравномерном нагреве (или охлаждении) принимает вид:

$$\Delta_B = \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2} \omega_{\bar{M}} + \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h} \omega_{\bar{N}}. \quad (27)$$

ПРИМЕР. В заданной раме (рис. 27, а) определить горизонтальное и вертикальное перемещения сечения В, вызванные неравномерным нагревом. Принять для рамы: $\alpha = 125 \times 10^{-7}$ град $^{-1}$; $a = 1$ м; $h = 150$ мм; $t_{\text{нар}}^{\circ} = 40^{\circ}\text{C}$; $t_{\text{вн}}^{\circ} = 10^{\circ}\text{C}$.

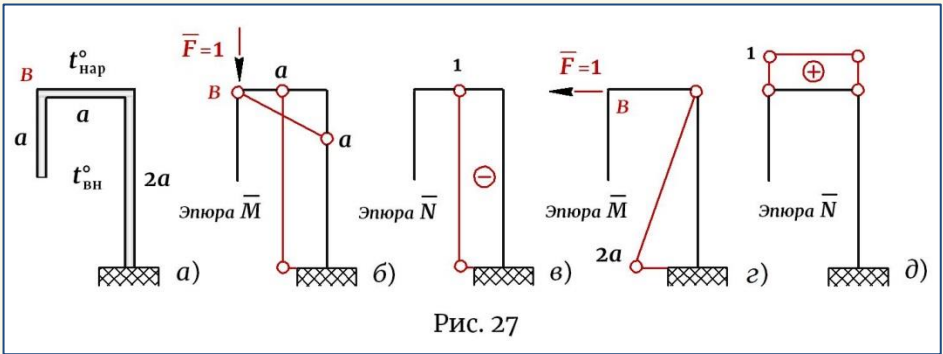


Рис. 27

① Определяем вертикальное перемещение $\Delta_B^{\text{верт}}$. Для этого прикладываем в точке В единичную силу $\bar{F}=1$ (рис. 27, б), строим единичные эпюры \bar{M} (рис. 27, б) и \bar{N} (рис. 27, в), вычисляем их площади –

$$\omega_{\bar{M}} = \frac{1}{2} a \cdot a + a \cdot 2a = \frac{5}{2} a^2; \quad \omega_{\bar{N}} = 1 \cdot 2a = 2a -$$

и по формуле (27) определяем вертикальное перемещение В :

$$\Delta_B^{\text{верт}} = \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2} \cdot 2a + \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h} \cdot \frac{5}{2} a^2 =$$

$$= -125 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{40^{\circ} + 10^{\circ}}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10^3 + 125 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{40^{\circ} - 10^{\circ}}{150} \cdot \frac{5(1 \cdot 10^3)^2}{2} = 5,6 \text{ мм.}$$

Примечание.

От нагрева вертикальная стойка рамы удлиняется, а от единичной силы (в соответствии с заданным направлением) – укорачивается, поэтому в

первом слагаемом формулы (27) следует ставить знак «минус». Что касается изгибающего момента, то направление изгиба участков от неравномерного нагрева, при котором наружные волокна удлиняются больше, и направление изгиба от заданной единичной силы совпадают, поэтому во втором слагаемом формулы (27) сохраняется знак «плюс».

② Определяем горизонтальное перемещение $\Delta_B^{\text{гориз}}$. Для этого прикладываем в точке В единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 27, з), строим от нее единичные эпюры \bar{M} (рис. 27, з) и \bar{N} (рис. 27, д), вычисляем площади единичных эпюр –

$$\omega_{\bar{M}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2; \quad \omega_{\bar{N}} = 1 \cdot a = a -$$

и по формуле (27) определяем горизонтальное перемещение В :

$$\begin{aligned} \Delta_B^{\text{гориз}} &= \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} + t_{\text{вн}}^{\circ}}{2} \cdot a + \alpha \frac{t_{\text{нар}}^{\circ} - t_{\text{вн}}^{\circ}}{h} \cdot 2a^2 = \\ &= 125 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{40^{\circ} + 10^{\circ}}{2} \cdot 1 \cdot 10^3 + 125 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{40^{\circ} - 10^{\circ}}{150} \cdot 2 \cdot (1 \cdot 10^3)^2 = 5,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Примечание.

Оба результата вычислений получены со знаком «плюс». Это означает, что вертикальное и горизонтальное перемещения точки В произойдет по направлению приложенной единичной силы.

Аналогичным образом, прикладывая единичную силу в различных узлах и заданных направлениях, можно определить их перемещение, а затем, задав удобный масштаб, изобразить раму в искаженной форме, которую она приобретет в результате неравномерного нагрева.

В случае, если конструкция подвергается одновременно и силовому, и температурному воздействию, перемещение любой точки можно определить как суммарный результат действия внешних сил и температуры ($\Delta_F + \Delta_t$), где вычисление Δ_t производят по формулам (19) – для равномерного нагрева или (27) – для неравномерного нагрева, а значение Δ_F определяют путем перемножения грузовой и единичной эпюр.

Статически неопределимые системы

В статически неопределимых системах вопрос определения перемещений, вызванных действием температуры, решается аналогичным способом, рассмотренным выше в п.5.

Первоначально *методом сил* через решение канонических уравнений раскрывается статическая неопределимость системы (рис. 21, п.1-8). В зависимости от условий работы последним слагаемым в канонических уравнениях является перемещение, вызванное фактором, воздействующим на систему: при силовом воздействии таким слагаемым является грузовой коэффициент Δ_F , при температурном $-\Delta_t$, при совместном действии внешних сил и температуры записываются оба слагаемых. И тогда, в самом общем случае силового и температурного воздействия канонические уравнения принимают вид (рис. 21, п.4):

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} + \Delta_{1t} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} + \Delta_{2t} = 0, \end{cases}$$

где значения Δ_{1F} и Δ_{2F} определяются путем перемножения грузовой и единичной эпюры, а Δ_{1t} и Δ_{2t} — по формулам (19) или (27) в зависимости от вида нагрева, как это было выполнено в рассмотренных выше примерах.

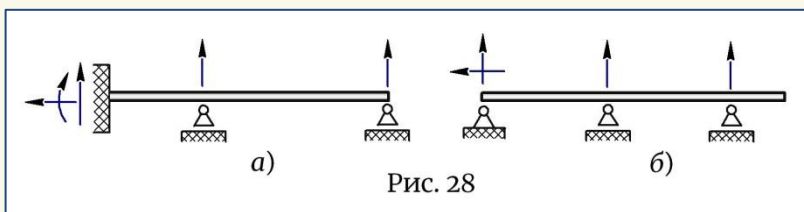
А далее, после решения канонических уравнений и определения отброшенных связей X_1 и X_2 , строятся окончательные эпюры внутренних усилий и выполняется проверка расчета. Затем для определения перемещений используется любой вариант **ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ**, в которой в заданном сечении и заданном направлении прикладывается единичная нагрузка, строятся единичные эпюры и перемножаются с грузовыми эпюрами, полученными после раскрытия статической неопределимости системы.

7. Статически неопределимые балки

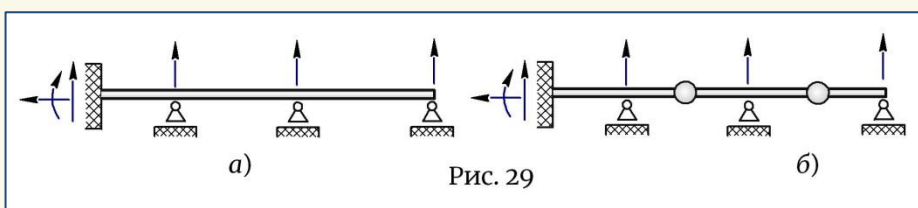
|| *Балка является статически неопределимой, если число реакций опор превышает число уравнений равновесия.*

Балка — это плоская система и для нее можно составить только три уравнения равновесия, поэтому, если число реакций превышает три, такая балка является статически неопределимой. Степень статической неопределимости балки устанавливается как разница между

числом реакций опор и числом уравнений равновесия. Пример таких балок представлен на рис. 28, где: а) – балка дважды статически неопределима; б) – балка один раз статически неопределима.



Однако если на балке установить шарнир, он снимает одну связь, так как дает возможность поворота одной части балки относительно другой (рис. 5, а). А это значит, что через шарнир изгибающий момент не передается и части балки, лежащие слева и справа от шарнира, работают независимо друг от друга. В результате, в дополнение к уравнениям статики, появляется еще одно уравнение, связанное со свойством шарнира – *сумма моментов относительно центра шарнира всех сил, расположенные по одну сторону от него, равна нулю*. Таким образом, один шарнир снимает одну связь (или дает одно дополнительное уравнение), поэтому установка одного промежуточного шарнира понижает степень статической неопределимости балки на единицу. И если установить число шарниров, равное степени статической неопределимости, балку можно полностью сделать статически определимой. На рис. 29 показан пример, когда балка трижды статически неопределимая (рис. 29, а) в результате установки двух шарниров становится один раз статически неопределимой (рис. 29, б):



При установке шарниров количество реакций опор не изменится, но если в первом варианте есть только три уравнения равновесия, то при наличии двух шарниров уравнений будет пять – три уравнения статики и два дополнительных уравнения от двух шарниров.

В зависимости от расчетной схемы балки – ее конструкции, вида опор, способа нагружения и степени ее статической неопределимости применяют различные способы решения.

Раскрытие статической неопределенности с помощью УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ (метод Навье)

! Этот метод удобен только для балок, имеющих заделку слева, и балок один раз (максимум два раза) статически неопределенных.

ПРИМЕР. Для заданной балки (рис. 30, а) раскрыть статическую неопределенность, определить реакции опор, построить эпюры и выполнить проверку расчета.

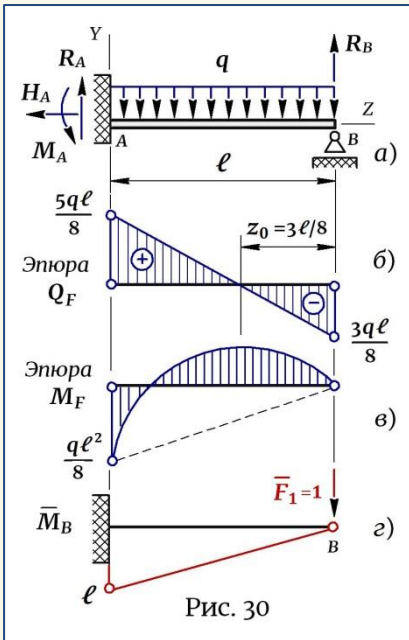


Рис. 30

① Составляем для балки три уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0: \quad H_A = 0. \quad (28)$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + R_B \cdot \ell - q\ell^2/2 = 0. \quad (29)$$

$$\sum M_B = 0: \quad M_A - R_A \cdot \ell + q\ell^2/2 = 0. \quad (30)$$

При отсутствии горизонтальной нагрузки $H_A = 0$ (28), однако оставшиеся уравнения (29) и (30) включают в себя три неизвестных силы $-R_A$, R_B и M_A , определить которые из двух уравнений нельзя, поэтому для решения необходимо найти еще одно уравнение.

② Поместим балку в систему координат (рис. 30, а) и по методу начальных параметров запишем

для нее уравнение прогибов:

$$EI_x y_Z = EI_x y_0 + EI_x \Theta_0 \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{qz^4}{24},$$

где y_0 и Θ_0 - называются «начальные параметры», т.е. это соответственно прогиб и угол поворота сечения в начале координат. И так как в заданной балке начало координат находится в заделке, где перемещения сечения невозможны, получаем:

$$EI_x y_0 = 0; \quad EI_x \Theta_0 = 0.$$

Примечание.

Именно по этой причине метод Навье удобен только для балок, имеющих заделку, расположенную слева, т.е. в начале координат, где начальные параметры обращаются в ноль и в их определении нет необходимости.

И тогда из условия на опоре B , где при $z = \ell \rightarrow y_B = 0$, и учитывая значения $EI_x y_0 = 0$ и $EI_x \Theta_0 = 0$, уравнение прогибов принимает вид:

$$-\frac{M_A \ell^2}{2} + \frac{R_A \ell^3}{6} - \frac{q \ell^4}{24} = 0. \quad (31)$$

Объединяем выражения (29), (30), (31) и получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными, решением которой являются искомые реакции опор:

$$\begin{cases} M_A + R_B \cdot \ell - q \ell^2 / 2 = 0 \\ M_A - R_A \cdot \ell + q \ell^2 / 2 = 0 \\ -M_A \ell^2 / 2 + R_A \ell^3 / 6 - q \ell^4 / 24 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{array}{|l} R_A = 5q\ell / 8 \\ R_B = 3q\ell / 8 \\ M_A = q\ell^2 / 8 \end{array}.$$

Проверка – $\sum Y = 0$: $R_A + R_B - q\ell = 0 \rightarrow 5q\ell / 8 + 3q\ell / 8 - q\ell = 0$.

③ Определив на балке реакции опор, строим эпюры поперечных сил (рис. 30, б) и изгибающих моментов (рис. 30, в).

④ Выполняем проверку расчетов. Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что перемещение по направлению любой отброшенной связи равно нулю. Отбросим в качестве лишней связи опору B и докажем, что прогиб здесь равен нулю. Произведем вычисление по методу Верещагина – путем перемножения эпюр, для чего приложим в заданном сечении единичную силу $\bar{F} = 1$, построим от нее *единичную эпюру* \bar{M}_B (рис. 30, г) и перемножим с *грузовой эпюрой* моментов M_F (рис. 30, в):

$$y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{8} \cdot \ell \cdot \frac{1}{2} \ell + \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell^2}{8} \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \right) = 0.$$

Раскрытие статической неопределимости МЕТОДОМ СИЛ

Решение с помощью МЕТОДА СИЛ позволяет учитывать податливость (деформируемость) опоры, что является необходимым при ее проектировании или проверке на прочность. Рассмотрим для балки два варианта расчета, когда опора принимается абсолютно жесткой или учитывается ее податливость.

Жесткая (недеформируемая) опора

ПРИМЕР. Для заданной консольной балки (рис. 31, а) раскрыть статическую неопределенность, определить реакции опор, построить эпюры и выполнить проверку расчета.

① Балка *один раз статически неопределима*. Согласно *методу сил* отбрасываем от балки одну лишнюю связь и получаем *ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ (О.С.)*. Наиболее рациональным вариантом является в качестве лишней связи убрать шарнирную опору В и принять *ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ* в виде консольной балки с заделкой (рис. 31, б).

② Создаем *ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ (Э.С.)*. Для этого загружаем *ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ* заданной нагрузкой q , в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 и задаем условие, что по направлению этой силы перемещение равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$ (рис. 31, в).

! Это условие отражает суть данного вопроса. Так как опора В рассматривается как абсолютно жесткая и недеформируемая, прогиб сечения, опирающегося на эту опору, равен нулю.

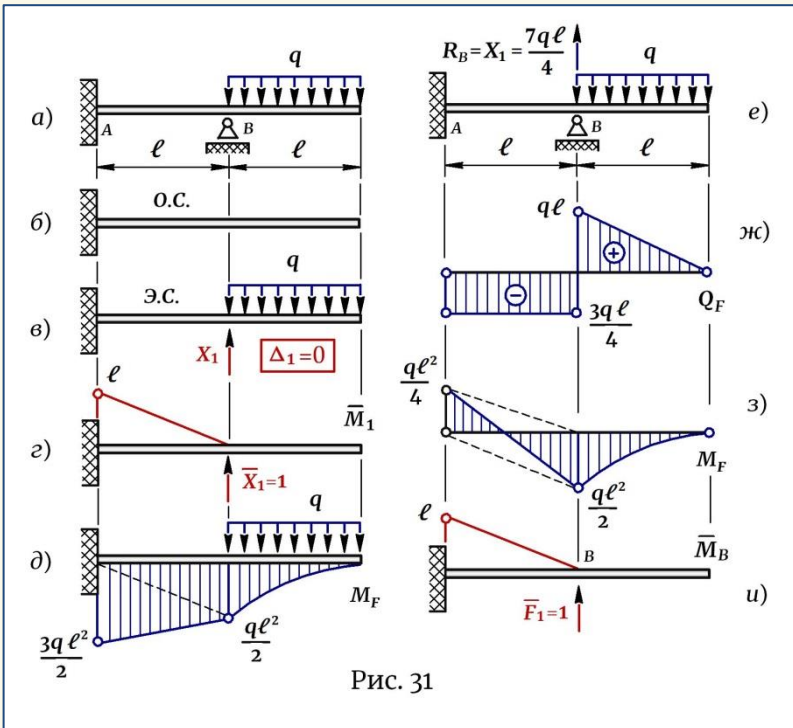


Рис. 31

③ Записываем условие $\Delta_1 = 0$ в виде КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, которое для балки один раз статически неопределимой имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

④ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. Для этого к ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ поочередно прикладываем единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ и заданную нагрузку q , строим *единичную* (рис. 31, г) и *грузовую* (рис. 31, д) эпюры моментов и по методу Верещагина перемножаем их соответствующим образом:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell \right) = \frac{\ell^3}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \ell \cdot \frac{q\ell^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \ell - \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{3q\ell^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \ell \right) = -\frac{7q\ell^2}{12EI_x}.$$

Подставляем значения коэффициентов в КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, решаем его и определяем силу X_1 :

$$\frac{\ell^3}{3EI_x} X_1 - \frac{7q\ell^2}{12EI_x} = 0 \rightarrow X_1 = 7q\ell/4.$$

⑤ Возвращаемся к исходной балке (рис. 31, е), где сила X_1 представляет собой реакцию на опоре B , т.е. $X_1 = R_B = 7q\ell/4$. Строим эпюры поперечных сил (рис. 31, ж) и изгибающих моментов (рис. 31, з).

⑥ Выполняем проверку расчетов. Докажем, что прогиб на опоре B равен нулю, для чего прикладываем в сечении B единичную силу $\bar{F} = 1$, строим от нее *единичную* эпюру \bar{M}_B (рис. 31, и) и перемножаем ее с *грузовой* эпюрой M_F (рис. 31, з):

$$y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \ell \cdot \frac{q\ell^2}{4} \cdot \frac{2}{3} \ell - \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{q\ell^2}{2} \cdot \frac{1}{3} \ell \right) = \frac{q\ell^4 - q\ell^4}{12EI_x} = 0.$$

Податливая (деформируемая) опора

ПРИМЕР. Консольная балка $AB (E_1, I_1, \ell_1)$, жестко защемленная в заделке, опирается свободным концом на середину пролета балки $CD (E_2, I_2, \ell_2)$ и нагружается силой F , в результате чего балка CD получает упругий прогиб посередине f_2 (рис. 32). Определить силу взаи-

действия балок в точке контакта.

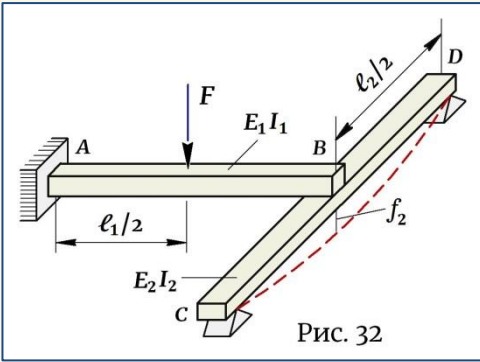


Рис. 32

① Рассмотрим балку AB. Балка один раз статически неопределима и ее расчетная схема представлена на рис. 33, а. Согласно *методу сил*, выбираем основную систему (О.С.) (рис. 33, б) и создаем эквивалентную систему (Э.С.), для чего основную систему нагружаем заданной силой F , а в направлении отброшенной связи прикладываем неизвестную пока силу X_1 (рис. 33, в). Задаем условие по перемещению: так как опорой балки AB является упругая балка CD , способная прогибаться под действием силы, значит, перемещение по направлению силы X_1 на балке AB будет равно *не нулю*, а прогибу балки CD в точке взаимодействия балок, т.е.

$$\Delta_1 = -f_2, \quad (32)$$

где Δ_1 — перемещение точки B от действия силы X_1 ; f_2 — перемещение точки B за счет прогиба балки CD . Так как сила X_1 (рис. 33, в) и прогиб балки CD в точке B (рис. 33, е) имеют противоположное направление, в уравнении (32) следует поставить знак «минус».

② Раскрываем левую часть уравнения (32) и представляем перемещение Δ_1 в виде канонического уравнения —

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F}, \quad (33)$$

коэффициенты которого определяют методом перемножения эпюр и на основании рис. 33, г, д соответственно равны:

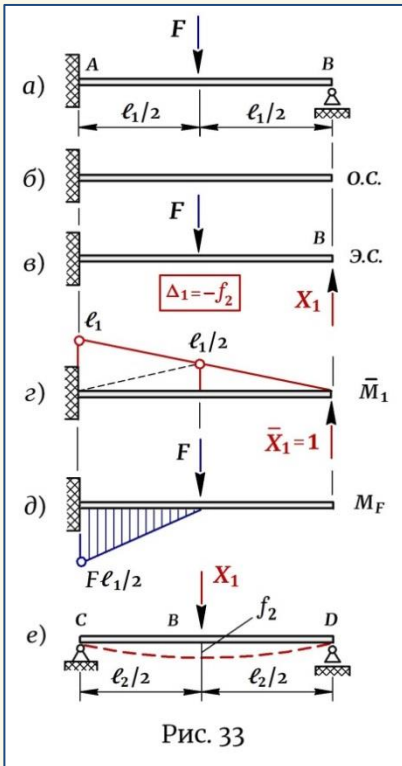


Рис. 33

$$\left. \begin{aligned} \boxed{\delta_{11}} &= \frac{1}{E_1 I_1} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{E_1 I_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell_1 \cdot \ell_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell_1 \right) = \frac{\ell_1^3}{3 E_1 I_1}; \\ \boxed{\Delta_{1F}} &= \frac{1}{E_1 I_1} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{E_1 I_1} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{F \ell_1}{2} \cdot \frac{\ell_1}{2} \left(\frac{2}{3} \ell_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell_1}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{5 F \ell_1^3}{48 E_1 I_1}. \end{aligned} \right\} (34)$$

Тогда выражение (33) с учетом значений (34) принимает вид:

$$\Delta_1 = \frac{\ell_1^3}{3 E_1 I_1} X_1 - \frac{5 F \ell_1^3}{48 E_1 I_1}. \quad (35)$$

③ Раскрываем правую часть уравнения (32). Сила X_1 , приложенная к балке AB (рис. 33, в), представляет собой силу, действующую со стороны балки CD , и значит, согласно закону противодействия, такая же сила воздействует на балку CD (рис. 33, е), вызывая прогиб, равный:

$$f_2 = \frac{X_1 \ell_2^3}{48 E_2 I_2}. \quad (36)$$

④ Подставляем значения (35) и (36) в уравнение (32) и определяем X_1 – силу взаимодействия балок в точке B :

$$\frac{\ell_1^3}{3 E_1 I_1} X_1 - \frac{5 F \ell_1^3}{48 E_1 I_1} = -\frac{X_1 \ell_2^3}{48 E_2 I_2} \rightarrow X_1 = \frac{5 F}{\left(16 + \frac{\ell_2^3}{\ell_1^3} \cdot \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \right)}.$$

Аналогичным образом решаются балки и с другими конструкциями упругих податливых опор, например, если такой опорой является пружина (рис. 34). В этом случае условие по перемещению имеет вид:

$$\Delta_1 = -\lambda \rightarrow \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = -\lambda,$$

где $\lambda = \frac{8 X_1 D^3 n}{G d^4}$ – осадка пружины, имеющей

параметры: D – диаметр пружины, d – диаметр прутка, n – число витков, G – модуль сдвига материала.

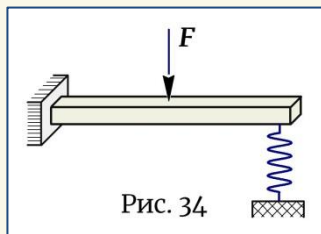


Рис. 34

Неразрезные балки. Раскрытие статической неопределенности с помощью УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ

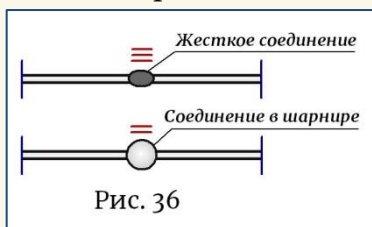
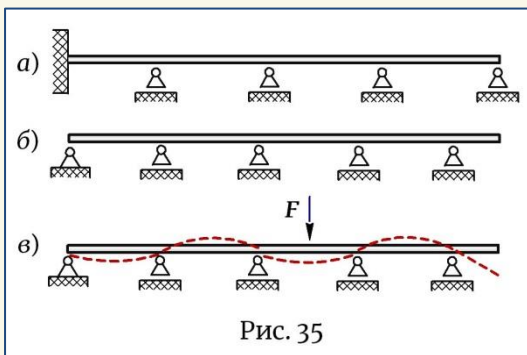
Балка называется **НЕРАЗРЕЗНОЙ**, если она опирается более чем на две опоры и не имеет на своем протяжении промежуточных разрезов или шарниров.

В неразрезных балках, чтобы обеспечить кинематическую неподвижность в горизонтальном направлении, одна из опор обязательно выполняется неподвижной (жесткая заделка, шарнирно-неподвижная опора). Все остальные опоры должны быть подвижными, чтобы в случае изменения температуры балка могла беспрепятственно изменять свою длину (рис. 35, а, б).

Главная особенность неразрезных балок заключается в том, что нагрузка, даже приложенная только на одном пролете, приведет к возникновению изгибающих моментов во всех сечениях и вызовет изгиб балки по всей длине (рис. 35, в).

Неразрезные балки всегда статически неопределимы и в большинстве случаев имеют высокую степень статической неопределенности. Решение неразрезных балок также осуществляется *методом сил*, однако для них при выборе **ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ** в качестве лишних связей *рациональнее отбрасывать связи внутренние*, разрезая балку и устанавливая на ней шарниры.

Как было сказано выше, шарнир убирает одну связь, позволяя сходящимся стержням поворачиваться друг относительно друга (рис. 36). А это значит, что, установив на балке число шарниров, равное степени ее статической неопределенности, балку можно сделать статически определимой, и именно этот вариант принять в качестве **ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ** для решения задачи.



При этом, шарниры следует устанавливать не произвольным образом, а в сечениях над лишними опорами. В результате балка будет опираться на опору не непосредственно, а через промежуточный шарнир, называемый **опорным шар-**

нием (рис. 37). Так как через шарнир изгибающий момент не передается, такая установка шарниров позволяет разбить балку на ряд отдельных однопролетных статически определимых балок, работающих под нагрузкой независимо друг от друга.

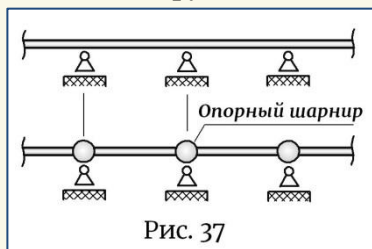


Рис. 37

Однако установив шарнир в опорных сечениях, необходимо задать условие по перемещению, суть которого заключается в том, что суммарный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, равен нулю, т.е. $\Theta = \Theta_{\text{лев}} + \Theta_{\text{прав}} = 0$ (рис. 38).

Рассмотрим часть неразрезной балки, опирающуюся на опоры $(n-1)$, n , $(n+1)$, и для двух соседних пролетов длиной ℓ_n и ℓ_{n+1} , нагруженных силами (рис. 39, а), раскроем статическую неопределенность, используя рассмотренную выше методику.

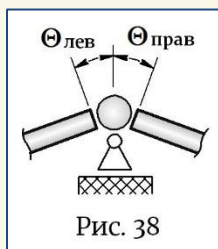


Рис. 38

Создаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ. Разрезаем балку над опорами, в опорных сечениях устанавливаем шарниры и получаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ в виде *левого* и *правого* пролетов, работающих как две независимые балки (рис. 39, б).

Создаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ. Загружаем каждый пролет заданной внешней нагрузкой, в месте установки шарниров по направлению отброшенных связей прикладываем моменты, обозначая их индексами, соответствующими обозначению опоры (рис. 39, в), и для сечений *левого* и *правого* пролетов, сходящихся на шарнире n , задаем условие, что суммарный угол поворота здесь по направлению моментов M_n равен нулю:

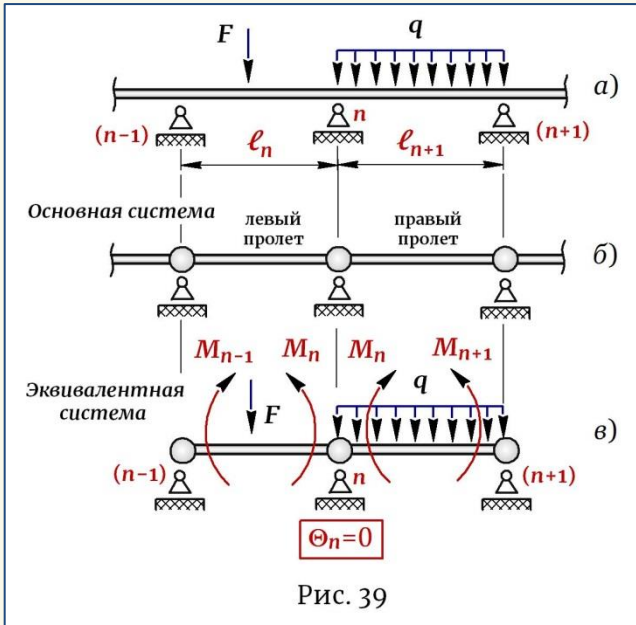
$$\Theta_n = \Theta_{\text{лев}} + \Theta_{\text{прав}} = 0. \quad (37)$$

Далее, на основании принципа независимости действия сил, запишем для каждого пролета значение угла поворота сечения n как суммарный результат действия всех сил, приложенных к данному пролету (рис. 39, в):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{\text{лев}} &= \Theta_{n(n-1)} + \Theta_{nF} + \Theta_{n(n)} \\ \Theta_{\text{прав}} &= \Theta_{n(n)} + \Theta_{nq} + \Theta_{n(n+1)} \end{aligned} \right\}, \quad (38)$$

где $\Theta_{n(n-1)}$, Θ_{nF} , $\Theta_{n(n)}$ – угол поворота по направлению M_n сечения n *левого* пролета от действия момента M_{n-1} , силы F и самого

момента M_n соответственно; $\Theta_{n(n)}$, Θ_{nq} , $\Theta_{n(n+1)}$ – угол поворота по направлению момента M_n сечения n правого пролета от действия этого момента, нагрузки q и момента M_{n+1} соответственно.



Как было сказано выше, любое перемещение можно определить как перемещение от единичной силы, умноженное на величину этой силы. Поэтому формулы (38) по аналогии с выражениями (3) могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{\text{лев}} &= \delta_{n(n-1)} M_{n-1} + \Theta_{nF} + \delta_{n(n)} M_n \\ \Theta_{\text{прав}} &= \delta_{n(n)} M_n + \Theta_{nq} + \delta_{n(n+1)} M_{n+1} \end{aligned} \right\}, \quad (39)$$

где $\delta_{n(n-1)}$, $\delta_{n(n)}$, $\delta_{n(n+1)}$ – это угол поворота сечения на опоре n по направлению момента M_n (слева и справа от шарнира) от единичного значения моментов $\bar{M}_{n-1} = 1$, $\bar{M}_n = 1$, $\bar{M}_{n+1} = 1$ соответственно.

Подставляем значения $\Theta_{\text{лев}}$ и $\Theta_{\text{прав}}$ (39) в суммарный угол поворота (37) и получаем уравнение вида:

$$\delta_{n(n-1)} M_{n-1} + \Theta_{nF} + \delta_{n(n)} M_n + \delta_{n(n)} M_n + \Theta_{nq} + \delta_{n(n+1)} M_{n+1} = 0. \quad (40)$$

По сути, коэффициенты уравнения (40) являются подобием коэффициентов канонических уравнений, где $\delta_n(n)$ можно считать *главным коэффициентом*; $\delta_n(n-1)$, $\delta_n(n+1)$ – *побочными коэффициентами* и $\Theta_n F$, $\Theta_n q$ – *грузовыми коэффициентами*. Эти коэффициенты являются угловыми перемещениями и их можно определить методом перемножения эпюр. Для этого поочередно к каждому пролету на соответствующих опорах прикладываем единичные моменты $\bar{M}_{n-1}=1$, $\bar{M}_n=1$, $\bar{M}_{n+1}=1$ и строим от них *единичные эпюры* (рис. 40, а, б, в). Затем к пролетам прикладываем заданную внешнюю нагрузку, строим *грузовые эпюры* M_F и M_q , определяем площади ω_n и ω_{n+1} эпюр на каждом пролете и находим здесь положение центра тяжести. Для каждого пролета всегда будем принимать: "а" – расстояние от центра тяжести до левой опоры, "b" – до правой опоры (рис. 40, з).

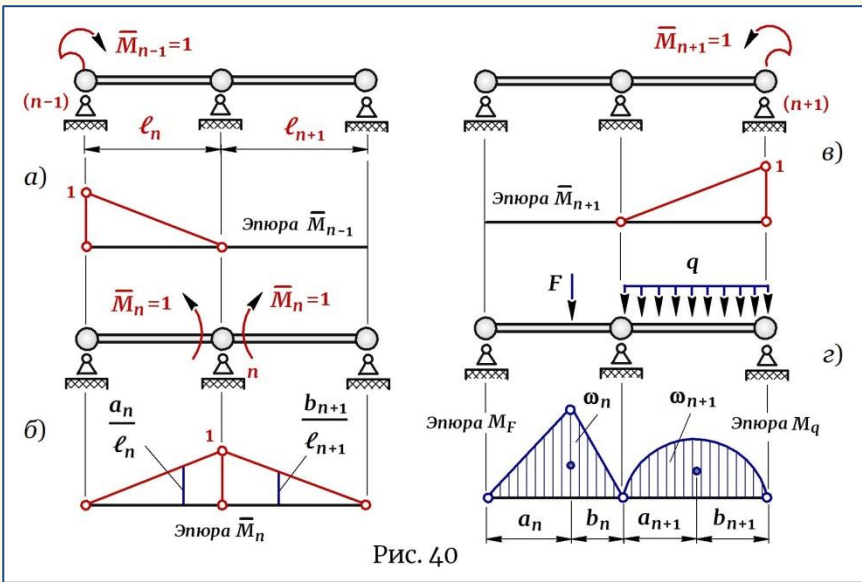


Рис. 40

Определяем коэффициенты уравнения (40):

$$\delta_{n(n-1)} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_{n-1} \cdot \bar{M}_n) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell_n}{6EI_x};$$

$$\delta_{n(n)} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_n \cdot \bar{M}_n) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_n \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell_n + \ell_{n+1}}{3EI_x};$$

$$\boxed{\delta_{n(n+1)}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_n \cdot \bar{M}_{n+1}) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{\ell_n}{6EI_x};$$

$$\boxed{\Theta_{nF}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \cdot \bar{M}_n) = \frac{1}{EI_x} \left(\omega_n \cdot \frac{a_n}{\ell_n} \right);$$

$$\boxed{\Theta_{nq}} = \frac{1}{EI_x} (M_q \cdot \bar{M}_n) = \frac{1}{EI_x} \left(\omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right),$$

где a_n/ℓ_n – ордината на единичной эпюре \bar{M}_n левого пролета, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_F ; b_{n+1}/ℓ_{n+1} – ордината на единичной эпюре \bar{M}_n правого пролета, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_q (рис. 40, б).

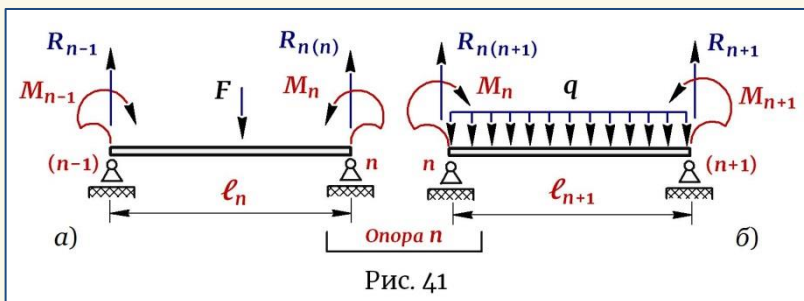
Подставляем коэффициенты в уравнение (40) и после преобразования получаем **УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ**:

$$M_{n-1}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1}\ell_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{\ell_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right). \quad (41)$$

Одно *уравнение трех моментов* записывается для одного шарнира или для двух соседних пролетов, сходящихся в этом шарнире. А это значит, что число *уравнений трех моментов* всегда будет столько, сколько раз балка статически неопределима.

Определение реакций опор

Определив из уравнения (41) опорный момент M_n , связывающий на шарнире два соседних пролета, переходим к определению реакций опор. Рассматриваем соседние пролеты как две независимые балки и, приложив на общей опоре n , принадлежащей *левому* и *правому* пролетам, связующий момент M_n , составляем для балок уравнения равновесия и определяем опорные реакции (рис. 41):



- ★ для балки *слева* (рис. 41, а) – $\sum M_{(n-1)} = 0 \rightarrow R_{n(n)}$;
 $\sum M_n = 0 \rightarrow R_{n-1}$;
- ★ для балки *справа* (рис. 41, б) – $\sum M_n = 0 \rightarrow R_{n+1}$;
 $\sum M_{(n+1)} = 0 \rightarrow R_{n(n+1)}$,

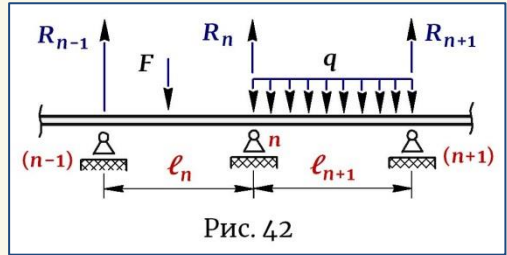
где R_{n-1} и R_{n+1} – реакции на опорах $(n-1)$ и $(n+1)$ соответственно; $R_{n(n)}$ – реакция на опоре n пролета ℓ_n ; $R_{n(n+1)}$ – реакция на опоре n пролета ℓ_{n+1} .

! Определяя реакции на пролетах, необходимо обязательно про-
 • верить статическое равновесие каждого по уравнению $\sum Y = 0$.

Так как опора n принадлежит двум пролетам, реакция на этой опоре определяется как алгебраическая сумма реакций (рис. 41) –

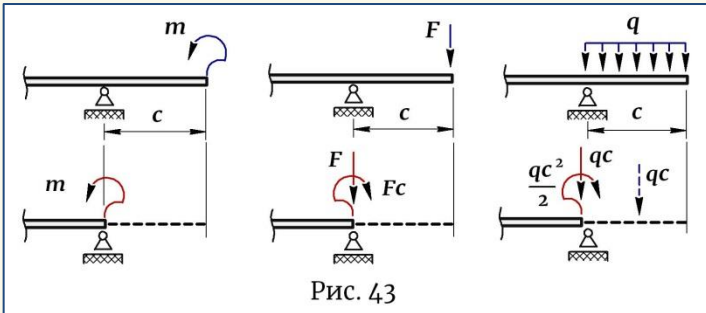
$$R_n = R_{n(n)} + R_{n(n+1)}. \quad (42)$$

Теперь возвращаемся к исходной балке (рис. 39, а) и указываем на ней окончательные реакции опор (рис. 42).



Неразрезные балки с консолью

Для решения неразрезных балок с помощью **уравнения трех моментов** балка должна иметь вид многопролетной балки с крайними опорами, расположенными по ее концам. А поэтому, если балка имеет консоль слева или справа, ее следует убрать, перенеся нагрузку с консоли на ближайшую опору (рис. 43):



Рассмотрим дважды статически неопределимую неразрезную балку с консолью (рис. 44, а) и выполним ее решение с помощью *уравнений трех моментов*, следуя указанной выше методике:

Шаг 1. Первоначально отбрасываем консоль, переносим с нее нагрузку на ближайшую опору и приводим балку к виду трехпролетной балки, которая называется ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА (рис. 44, б).

Шаг 2. Принимая крайние опоры как необходимые для обеспечения кинематической неподвижности балки, разрезаем балку над промежуточными (лишними) опорами и устанавливаем в сечениях опорные шарниры (рис. 44, в). Таким образом мы убираем две лишние внутренние связи и получаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ. На основной системе выполняем нумерацию опор и пролетов –

- ! Опоры и пролеты всегда нумеруются слева направо:
- опоры – с нуля, пролеты – с единицы.

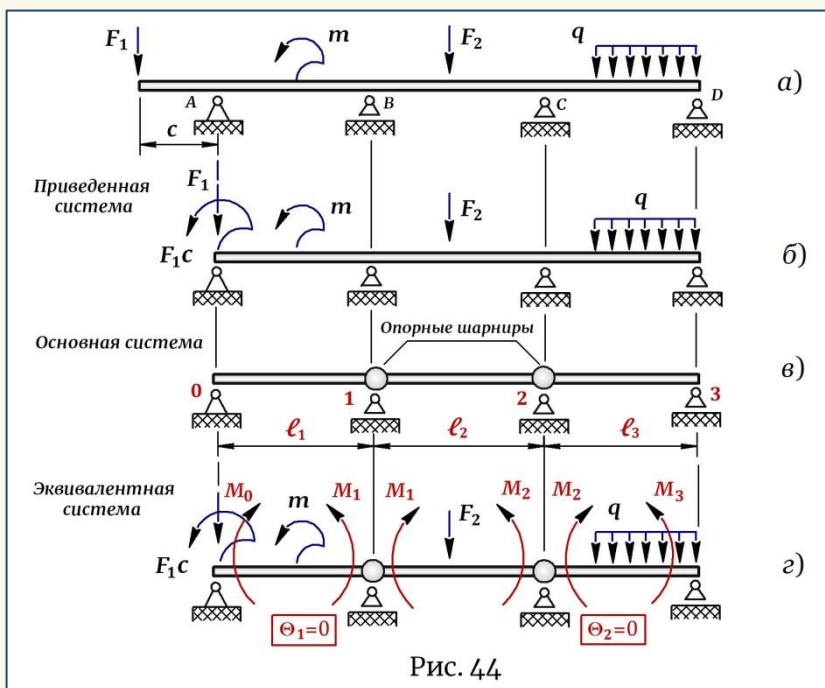


Рис. 44

Шаг 3. Создаем эквивалентную систему. Для этого загружаем каждый пролет заданными внешними силами, включая нагрузку, перенесенную с консоли, в месте установки шарниров по направлению отброшенных связей прикладываем моменты, обозначая их индексами,

соответствующими номеру опоры, и задаем условие для углов поворота сечений на шарнирах $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = 0$. Также прикладываем моменты на крайних опорах (рис. 44, з).

Шаг 4. Записываем для балки два уравнения трех моментов, каждое из которых отражает суть заданного условия по углам поворота. Одно уравнение записывается для одного шарнира или двух соседних пролетов, соединенных в этом шарнире –

$$\begin{cases} M_0 \ell_1 + 2M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right); \\ M_1 \ell_2 + 2M_2 (\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{\ell_2} + \frac{\omega_3 b_3}{\ell_3} \right). \end{cases}$$

В этих уравнениях неизвестными величинами являются моменты M_1 и M_2 , приложенные на шарнирах, и надо найти такое их значение, при котором суммарный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, действительно будет равен нулю. Моменты на крайних опорах M_0 и M_3 равны внешним моментам, приложенным на этих опорах, поэтому в данном примере $M_0 = -F_1 c$, но со знаком «минус», так как моменты имеют противоположное направление (рис. 44, в), а момент $M_3 = 0$. Значения: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 – длины пролетов; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – площади эпюр на пролетах; a_1, a_2 – расстояния от центра тяжести эпюр до левой опоры, b_2, b_3 – до правой на соответствующих пролетах.

Шаг 5. Далее каждый пролет рассматриваем как отдельную независимую балку. Прикладываем к пролетам рабочую нагрузку (при этом, моменты на крайних опорах прикладывать не следует, поскольку они уже учтены в левой части уравнений и не должны вторично войти в значение площади эпюры ω), строим грузовые эпюры моментов, определяем соответствующие для пролетов величины ω, a, b , подставляем результаты в систему уравнений и вычисляем значения искомых моментов M_1 и M_2 .

Шаг 6. Затем для каждого пролета с учетом моментов M_1 и M_2 по методике, рассмотренной выше (рис. 41), определяем реакции опор, далее возвращаем балку к исходному виду (см. рис. 42), строим окончательные эпюры и выполняем проверку, суть которой заключается в том, что нужно доказать, что перемещение по направлению любой отброшенной связи (внешней или внутренней) равно нулю.

Шаг 7. После раскрытия статической неопределенности для балки можно выполнять необходимые расчеты на прочность и на жесткость - подбор сечений, определение деформаций и т.д.

Нерезные балки с заделкой

Использование *уравнения трех моментов* для решения неразрезных балок, имеющих заделку слева или справа, также требует приведения их к виду многопролетной балки с крайними опорами, расположенными по концам. Для получения такой расчетной схемы заделку необходимо убрать, а вместо нее ввести фиктивный (несуществующий) пролет.

Рассмотрим *один раз статически неопределенную* балку (рис. 45, а) и выполним для нее решение по аналогии с предыдущим примером:

★ Консоль справа убираем, перенесем нагрузку на ближайшую опору, также убираем заделку, вводим фиктивный пролет и получаем ПРивЕДЕННУЮ СИСТЕМУ в виде двухпролетной балки (рис. 45, б).

★ Считаем крайние опоры необходимыми, над лишней промежуточной опорой устанавливаем шарнир и получаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ, на которой слева направо нумеруем опоры и пролеты (рис. 45, в).

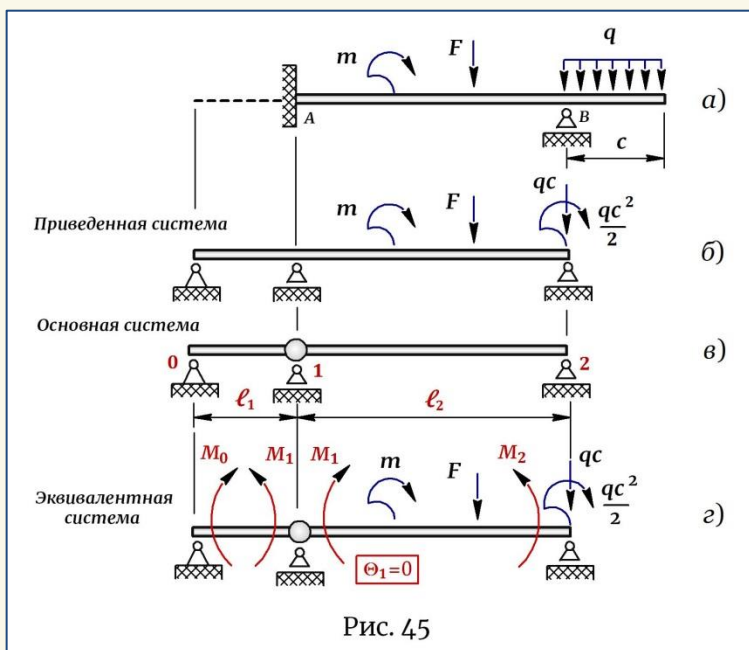


Рис. 45

★ Далее загружаем пролеты заданной нагрузкой, включая нагрузку, перенесенную с консоли, по направлению отброшенной связи прикладываем момент M_1 и задаем условие для угла поворота сечений на шарнире $\Theta_1 = 0$. Также прикладываем моменты на крайних опорах. Получаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ (рис. 45, з).

★ Записываем для балки уравнение трех моментов –

$$M_0 \ell_1 + 2M_1 (\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right),$$

в котором для несуществующего пролета принимаем $M_0 = 0$; $\ell_1 = 0$ и $\omega_1 = 0$, а момент $M_2 = -qc^2/2$.

Далее решение выполняется по аналогии с рассмотренным выше примером.

8. Энергетический метод (принцип наименьшей работы)

Метод определения лишних связей в статически неопределимых системах исходя из минимума потенциальной энергии был предложен итальянским ученым Федерико Менабреа в 1857 г. и получил название «*принцип наименьшей работы*». В применении к деформированным телам этот метод основан на том, что «*из всех возможных состояний равновесию системы, подверженной воздействию внешних сил, соответствует то, при котором полная энергия деформации системы принимает наименьшее значение*» (Пуассон, 1833 г.). Принцип наименьшей работы является частным выражением теоремы Кастилиано, сформулированной позже в 1875 г. для упругих деформируемых тел, согласно которой «*производная потенциальной энергии деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению*».

Рассмотрим энергетический метод решения на примере плоской рамы, представленной на стр.15, и сравним полученные результаты:

★ Рама (рис. 46, а) дважды статически неопределима. Убираем опору В и таким образом отбрасываем лишние связи как внешние. По направлению этих связей прикладываем силы R_B и H_B , являющиеся реакциями на этой опоре (рис. 46, б);

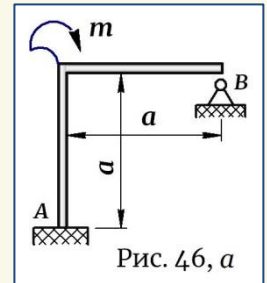


Рис. 46, а

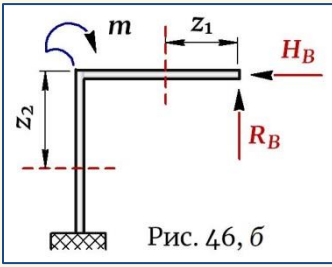


Рис. 46, б

★ Рассматриваем на участках рамы сечения z_1 и z_2 (рис. 46, б) и записываем для этих сечений значения изгибающих моментов \rightarrow

$$M_{z_1} = R_B z_1; \quad M_{z_2} = R_B a + H_B z_2 - m. \quad (a)$$

★ Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил, определяем потенциальную энергию деформации, накопленную в раме \rightarrow

$$U = \int_0^a \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^a \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x}. \quad (б)$$

★ Согласно теореме Кастилиано и *принципу наименьшей работы*, перемещения по направлению сил R_B и H_B равны нулю, т.е.

$$\Delta_B^{верт} = \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0; \quad \Delta_B^{гориз} = \frac{\partial U}{\partial H_B} = 0. \quad (в)$$

★ Дифференцируем значение энергии U (б) по соответствующим силам и получаем \rightarrow

$$\Delta_B^{верт} = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \int_0^a \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial R_B} + \int_0^a \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial R_B} = 0; \quad (г)$$

$$\Delta_B^{гориз} = \frac{\partial U}{\partial H_B} = \int_0^a \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial H_B} + \int_0^a \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial H_B} = 0, \quad (д)$$

где согласно выражениям (а) \rightarrow

$$\frac{\partial M_{z_1}}{\partial R_B} = z_1; \quad \frac{\partial M_{z_2}}{\partial R_B} = a; \quad \frac{\partial M_{z_1}}{\partial H_B} = 0; \quad \frac{\partial M_{z_2}}{\partial H_B} = z_2. \quad (е)$$

★ Подставляем значения (а) и (е) в формулы (г) и (д), интегрируем, преобразовываем и получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными R_B и H_B –

$$\begin{aligned} \Delta_B^{верт} &= \int_0^a \frac{R_B z_1 \cdot z_1}{EI_x} dz + \int_0^a \frac{(R_B a + H_B z_2 - m) a}{EI_x} dz = \\ &= \frac{R_B a^3}{3EI_x} + \frac{R_B a^3}{EI_x} + \frac{H_B a^3}{2EI_x} - \frac{ma^2}{EI_x} = \frac{4R_B a^3}{3EI_x} + \frac{H_B a^3}{2EI_x} - \frac{ma^2}{EI_x} = 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{8R_B a + 3H_B a - 6m = 0};$$

$$\Delta_B^{\text{гориз}} = \int_0^a \frac{(R_B a + H_B z_2 - m) z_2}{EI_x} dz_2 = \frac{R_B a^3}{2EI_x} + \frac{H_B a^3}{3EI_x} - \frac{m a^2}{2EI_x} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{3R_B a + 2H_B a - 3m = 0} \rightarrow \begin{cases} 8R_B a + 3H_B a - 6m = 0 \\ 3R_B a + 2H_B a - 3m = 0, \end{cases}$$

решением которой являются: $R_B = 3m/7a$; $H_B = 6m/7a$, что соответствует значениям на стр. 17.

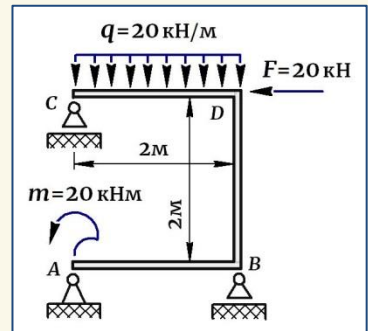
Энергетический способ раскрытия статической неопределимости является универсальным методом решения и может применяться для самых различных систем, элементы которых работают на растяжение (сжатие), изгиб, кручение, а также сложное сопротивление. Записав для заданной конструкции значение потенциальной энергии и проведя решение по алгоритму, рассмотренной выше, можно решать задачи для конструкций любых форм, конфигураций и любой степени сложности.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ РАМЫ

Задача 1

Раскрыть статическую неопределимость плоской рамы, принимая одинаковой жесткость вертикальных и горизонтальных участков ($EI_x = \text{const}$). Построить окончательные эпюры и выполнить проверку. Подобрать для рамы сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Определить горизонтальное перемещение узла D .



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Устанавливаем степень статической неопределимости рамы:

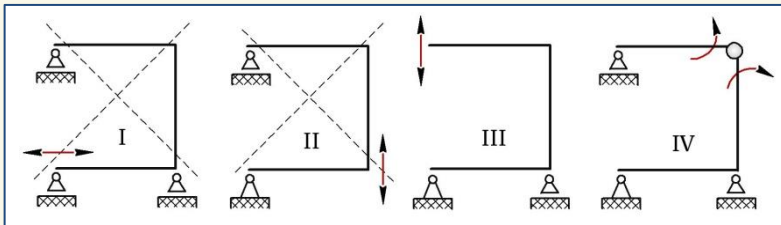
$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 4 + 6 - 3 \cdot 3 = 1 -$$

рама один раз статически неопределима.

② Выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ.

Примечание.

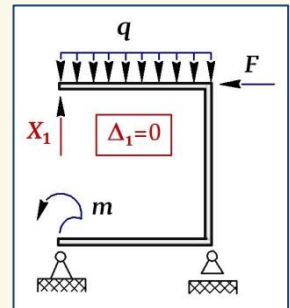
Согласно методу сил лишние связи от конструкции отбрасываем и она сразу становится статически определимой и называется «основная система». Так как лишние связи можно отбрасывать и как внешние, изменяя опоры, и как внутренние, устанавливая на раме шарниры, поэтому для каждой статически неопределимой системы можно подобрать несколько вариантов основных систем. Однако при этом, отбрасывая лишние связи, необходимо следить за тем, чтобы выполнялись следующие условия – система должна становиться статически определимой и она не должна под нагрузкой потерять кинематическую неподвижность.



Из рассмотренных выше вариантов *основных систем* варианты I и II – не подходят, так как они под нагрузкой потеряют кинематическую неподвижность. Поэтому для дальнейшего решения выбираем вариант III.

③ Создаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ.

Чтобы ОСНОВНАЯ СИСТЕМА по условиям работы соответствовала исходной раме, ее следует загрузить заданной внешней нагрузкой, а в направлении отброшенной связи приложить силу X_1 и задать условие, что перемещение по направлению этой силы равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$.



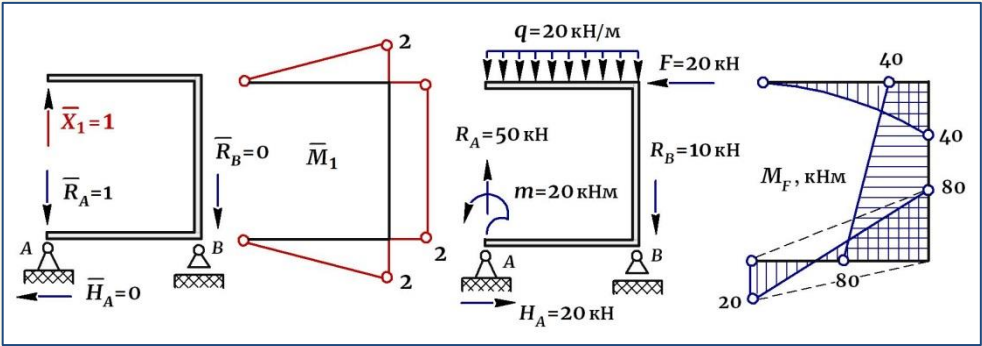
④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Раскрываем условие по перемещению $\Delta_1 = 0$ и получаем каноническое уравнение в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} и Δ_{1F} – коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от единичного значения этой силы и заданной внешней нагрузки соответственно.

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения. Так как суть коэффициентов – это перемещения, определяем их по методу

Верещагина (путем перемножения эпюр). Для этого поочередно прикладываем к ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ сначала единичную силу $\bar{X}_1 = 1$, а затем внешнюю нагрузку, определяем от этих сил реакции опор, строим эпюры изгибающих моментов – *единичную и грузовую* –



– от единичной силы – $\sum X = 0: \bar{H}_A = 0; \sum M_A = 0: \bar{R}_B = 0;$
 $\sum M_B = 0: \bar{X}_1 \cdot 2 - \bar{R}_A \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \bar{X}_1 = 1.$

– от заданной нагрузки – $\sum X = 0: H_A - F = 0 \rightarrow H_A = 20 \text{ кН};$
 $\sum M_A = 0: m + F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 = 0 \rightarrow R_B = 10 \text{ кН};$
 $\sum M_B = 0: m + F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = 50 \text{ кН}.$

Проверка – $\sum Y = 0: R_A - R_B - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 50 - 10 - 20 \cdot 2 = 0 -$

и, перемножая эпюры соответствующим образом, вычисляем коэффициенты канонических уравнений:

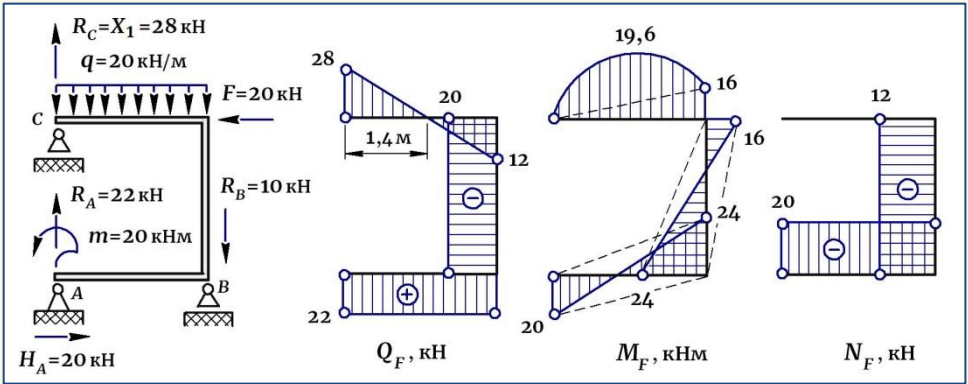
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \times 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \right) = \frac{40}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{40 + 80}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 80 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = -\frac{1120}{3EI_x}.$$

⑥ Подставляем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1F} в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 , при которой перемещение по ее направлению будет равно нулю:

$$\frac{40}{3EI_x} X_1 - \frac{1120}{3EI_x} = 0 \rightarrow \boxed{X_1 = 28 \text{ кН}}.$$

7 Возвращаемся к исходной раме. Определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:



$$\sum X = 0: H_A - F = 0 \rightarrow H_A = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: m + F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 = 0 \rightarrow R_B = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: m + F \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 - R_C \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = 22 \text{ кН}.$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_A - R_B + R_C - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 22 - 10 + 28 - 20 \cdot 2 = 0.$

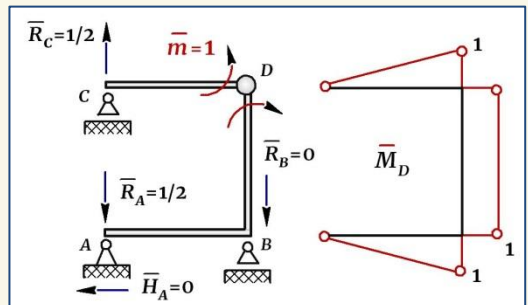
8 ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что перемещение по направлению любой отброшенной связи равно нулю. Для этого следует вернуться к вариантам ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ (см. п. 2) и выбрать для проверки любой из них.

Примечание.

Для проверки предпочтительнее выбирать не тот вариант основной системы, на котором было выполнено решение, а любой другой вариант.

Используем для проверки вариант IV, где в узле D установлен шарнир, и докажем, что угол поворота здесь равен нулю. Для этого приложим на шарнире единичный момент, вычислим от него реакции опор и построим единичную эпюру моментов, которую затем перемножим с окончательной грузовой эпюрой M_F (см. выше):



$$\sum X = 0: \bar{H}_A = 0; \quad \sum M_{D(\text{слева})} = 0: \bar{R}_C \cdot 2 - \bar{m} = 0 \rightarrow \bar{R}_C = \bar{m}/2 = 1/2;$$

$$\sum M_A = 0: \bar{m} - \bar{m} - \bar{R}_B \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_B = 0;$$

$$\sum M_B = 0: \bar{m} - \bar{m} + \bar{R}_C \cdot 2 - \bar{R}_A \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 1/2.$$

$$\boxed{\Theta_D = 0} : \Theta_D = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = \frac{0,01}{EI_x} \approx 0.$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

① Из условия прочности подбираем для рамы сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{24 \cdot 10^6}{160} = 150 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента выбираем двутавр №18, для которого – $W_x = 143 \text{ см}^3$; $I_x = 1290 \text{ см}^4$. Перенапряжение составляет:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{24 \cdot 10^6}{143 \cdot 10^3} = 167,8 \text{ МПа} \rightarrow \frac{167,8 - 160}{160} \cdot 100\% = 4,9\%,$$

что допустимо (перегрузка допускается до 5%).

② Определяем ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ узла D.

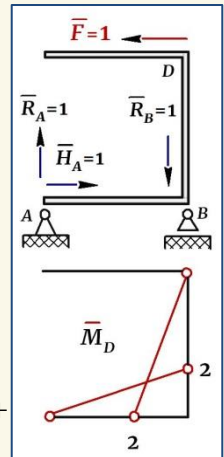
Для этого используем любой вариант ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ, прикладываем в заданном сечении горизонтально единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем от нее реакции опор и строим единичную эпюру \bar{M}_D , которую затем перемножаем с грузовой эпюрой моментов M_F :

$$\sum X = 0: \quad \bar{H}_A - \bar{F} = 0 \rightarrow \bar{H}_A = 1;$$

$$\sum M_A = 0: \quad \bar{F} \cdot 2 - \bar{R}_B \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_B = \bar{F} = 1;$$

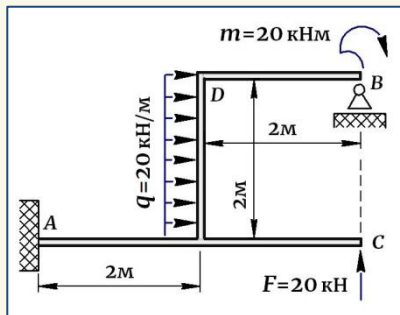
$$\sum M_B = 0: \quad \bar{F} \cdot 2 - \bar{R}_A \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \bar{F} = 1.$$

$$\boxed{\Delta_D^{\text{гориз}}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{40 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 15,5 \text{ мм}.$$



Задача 2

Раскрыть статическую неопределенность плоской рамы. Построить окончательные эпюры и выполнить проверку. Подобрать для рамы сечение двутавр, если $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$. Определить вертикальное перемещение точки C и горизонтальное – узла D . Принять для всех участков жесткость одинаковой ($EI_x = \text{const}$).



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

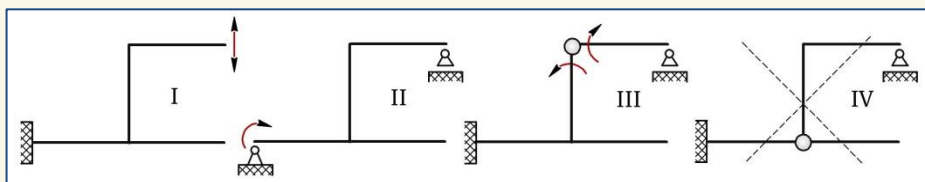
① Устанавливаем степень статической неопределенности рамы:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 4 + 9 - 3 \cdot 4 = 1 -$$

рама *один раз статически неопределима*.

② Выбираем основную систему.

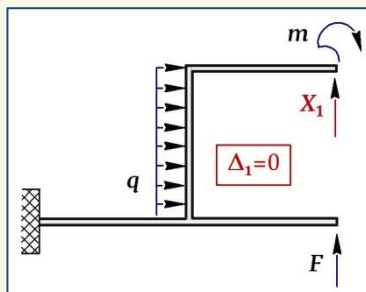
Согласно методу сил отбрасываем от конструкции лишние связи и получаем статически определимую (основную) систему. Рассматриваем варианты ОСНОВНЫХ СИСТЕМ:



Из рассмотренных конструкций вариант IV является неверным, так как при такой установке шарнира убирается не одна, а *две связи*, и система становится кинематически изменяемой. Для расчета могут быть использованы варианты I–III, однако наиболее удобным является вариант I, который и принимаем для дальнейшего решения.

③ Создаем эквивалентную систему.

Чтобы основная система по условиям работы соответствовала исходной раме, ее следует загрузить заданной внешней нагрузкой, а в направлении от-



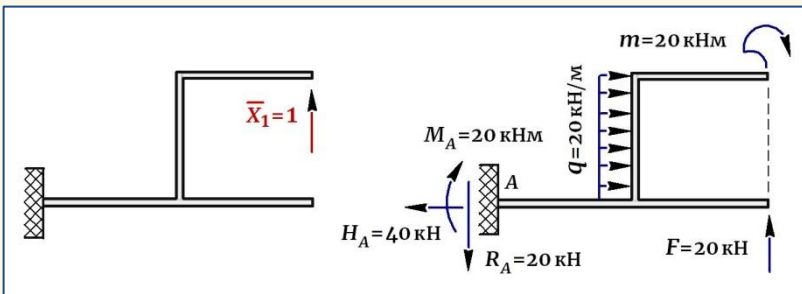
брошенной связи приложить силу X_1 и задать условие, что по направлению этой силы $\Delta_1 = 0$.

④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Раскрывая условие по перемещению $\Delta_1 = 0$, получаем каноническое уравнение в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

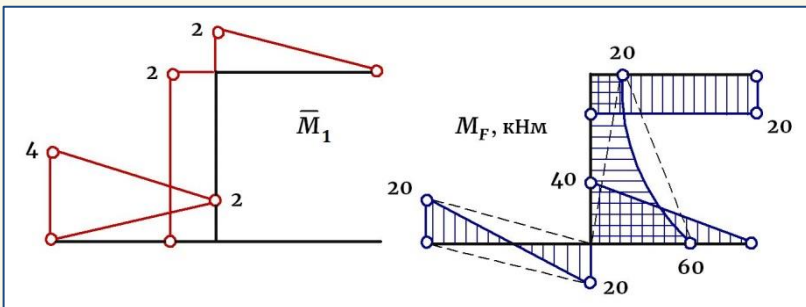
где δ_{11} и Δ_{1F} – коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от единичного значения этой силы и заданной внешней нагрузки соответственно.

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения. Так как суть коэффициентов – это перемещения, определяем их по методу Верещагина (путем перемножения эюр). Для этого поочередно прикладываем к основной системе сначала единичную силу $\bar{X}_1 = 1$, а затем внешнюю нагрузку, определяем от нее реакции опор и строим эюры изгибающих моментов – *единичную* и *грузовую*, после чего перемножаем эюры соответствующим образом:



$$\sum X = 0 \rightarrow H_A = 40 \text{ кН}; \quad \sum Y = 0 \rightarrow R_A = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: m - F \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 20 \text{ кНм}.$$



Вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{88}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 20 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 60 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \right] = -\frac{480}{3EI_x}.$$

⑥ Подставляем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1F} в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 , при которой перемещение по ее направлению будет равно нулю:

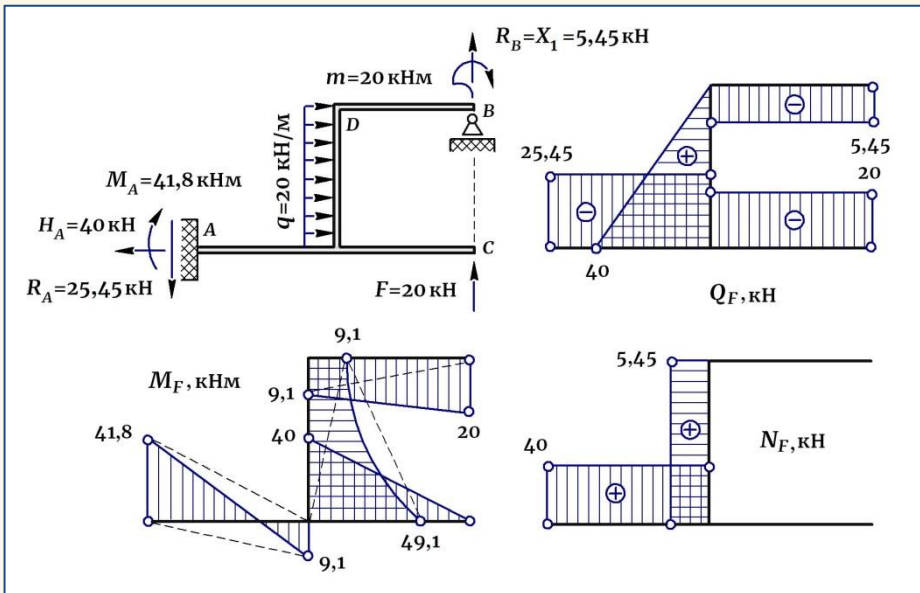
$$\frac{88}{3EI_x} X_1 - \frac{480}{3EI_x} = 0 \rightarrow X_1 = 5,45 \text{ кН}.$$

⑦ Возвращаемся к исходной раме. Определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:

$$\sum X = 0: \quad q \cdot 2 - H_A = 0 \rightarrow H_A = 40 \text{ кН};$$

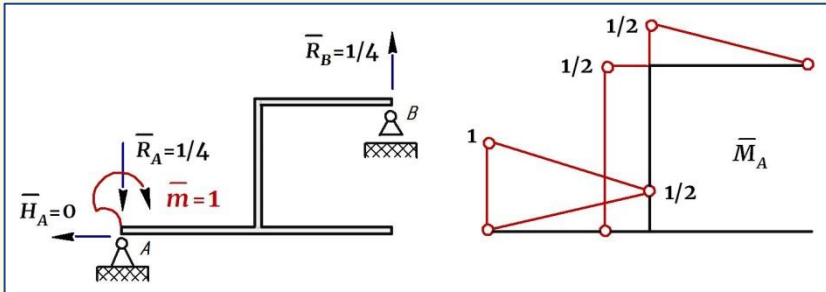
$$\sum Y = 0: \quad R_B + F - R_A = 0 \rightarrow R_A = 25,45 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + m + q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 4 - R_B \cdot 4 = 0 \rightarrow M_A = 41,8 \text{ кНм}.$$



8) ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Используем для проверки вариант II и докажем, что угол поворота в заделке равен нулю. Для этого приложим здесь единичный момент, построим единичную эпюру моментов и перемножим ее с окончательной грузовой эпюрой M_F (см. выше):



$$\sum X = 0: \bar{H}_A = 0; \quad \sum M_A = 0 \rightarrow \bar{R}_B = 1/4; \quad \sum M_B = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 1/4.$$

$$\boxed{\Theta_A = 0} : \Theta_A = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 9,1 + \frac{1}{3} \cdot 20 \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 49,1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 41,8 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,1 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{41,5 - 41,54}{EI_x} = -\frac{0,04}{EI_x} \approx 0.$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

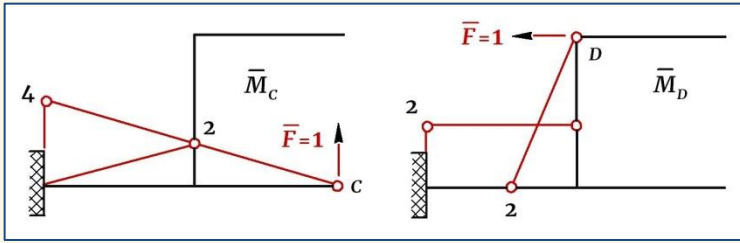
1) Из условия прочности подбираем для рамы сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad \text{откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{49,1 \cdot 10^6}{140} = 350,7 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №27, для которого — $W_x = 371 \text{ см}^3$, $I_x = 5010 \text{ см}^4$.

2) Определяем ВЕРТИКАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ точки С и ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ узла D.

Для этого используем любой вариант ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ (удобнее — I), прикладываем в заданном сечении единичную силу $\bar{F} = 1$ соответствующего направления, строим единичные эпюры \bar{M}_C и \bar{M}_D и перемножаем их с окончательной грузовой эпюрой моментов M_F :

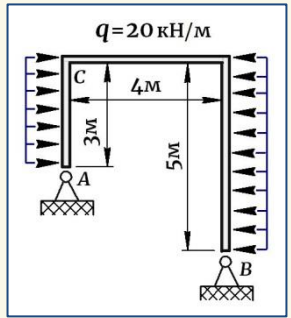


$$\Delta_C^{верт} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 41,8 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,1 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{168,4 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 16,8 \text{ мм} .$$

$$\Delta_D^{гориз} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 49,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 41,8 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 2 \right) = \frac{7,2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 5010 \cdot 10^4} = 0,72 \text{ мм} .$$

Задача 3

Раскрыть статическую неопределимость плоской рамы. Принять жесткость всех участков одинаковой ($EI_x = \text{const}$). Построить окончательные эпюры и выполнить проверку. Подобрать для рамы сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$. Определить горизонтальное перемещение узла С.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Устанавливаем степень статической неопределимости рамы:

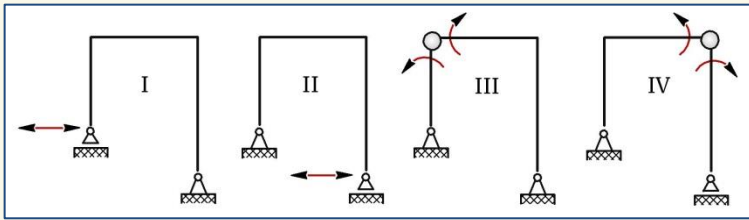
$$Л = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3Д = 4 + 6 - 3 \cdot 3 = 1 -$$

рама один раз статически неопределима.

② Выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ.

Примечание.

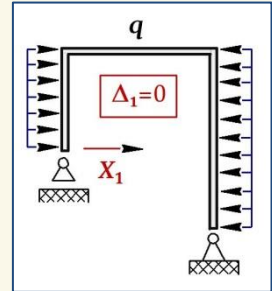
При создании основной системы следует помнить, что связи можно только отбрасывать, но их нельзя добавлять, т.е. нельзя заменять шарнирные опоры жесткой заделкой.



Из рассмотренных вариантов выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ I.

③ Создаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ.

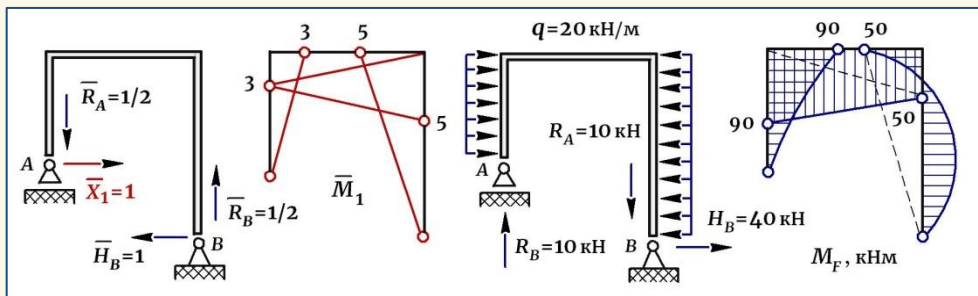
Загружаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ внешней нагрузкой, в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 и задаем условие $-\Delta_1 = 0$.



④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Раскрывая условие по перемещению $\Delta_1 = 0$, получаем каноническое уравнение: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$,

где δ_{11} и Δ_{1F} – коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от единичного значения этой силы и заданной внешней нагрузки соответственно.

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения:



– от единичной силы –

$$\sum X = 0 \rightarrow \bar{H}_B = 1; \sum M_A = 0 \text{ и } \sum M_B = 0 \rightarrow \bar{R}_B = \bar{R}_A = 1/2.$$

– от заданной нагрузки –

$$\sum X = 0: H_B + q \cdot 3 - q \cdot 5 = 0 \rightarrow H_B = 40 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 4 - H_B \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow R_B = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: q \cdot 3 \cdot 3,5 + R_A \cdot 4 - q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \rightarrow R_A = 10 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: R_A - R_B = 0 \rightarrow 10 - 10 = 0.$$

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 5 \right) \right] = \frac{348}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \times \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 50 \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 90 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) \right] = \frac{3575}{3EI_x}.$$

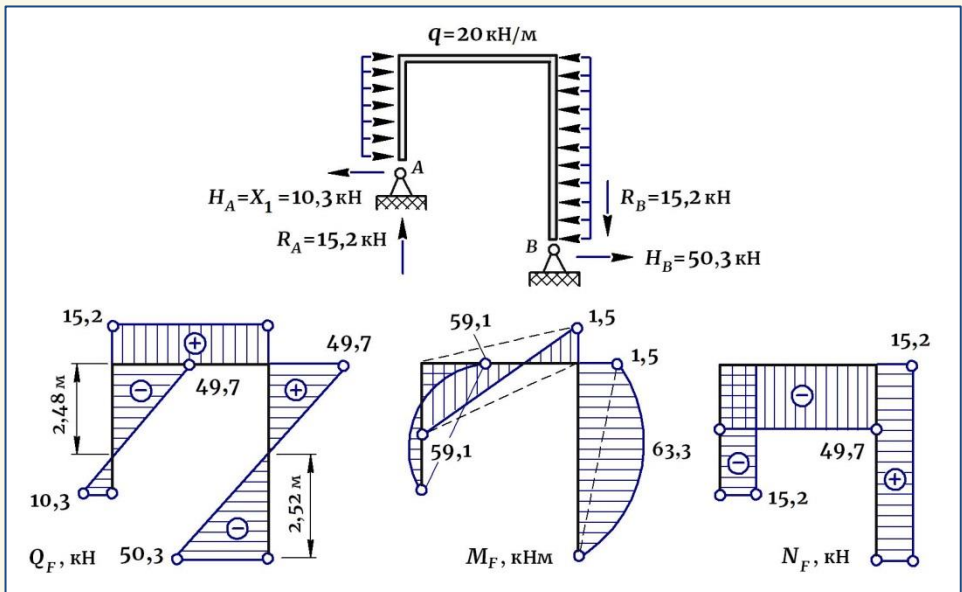
⑥ Подставляем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1F} в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 , при которой перемещение по ее направлению будет равно нулю:

$$\frac{348}{3EI_x} X_1 + \frac{3575}{3EI_x} = 0 \rightarrow X_1 = -10,3 \text{ кН}.$$

Примечание.

Знак «минус» означает, что сила X_1 будет иметь направление, обратное направлению, указанному на эквивалентной системе.

⑦ Возвращаемся к исходной раме. Определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:



$$\sum X = 0: q \cdot 3 - q \cdot 5 - H_A + H_B = 0 \rightarrow H_B = 50,3 \text{ кН};$$

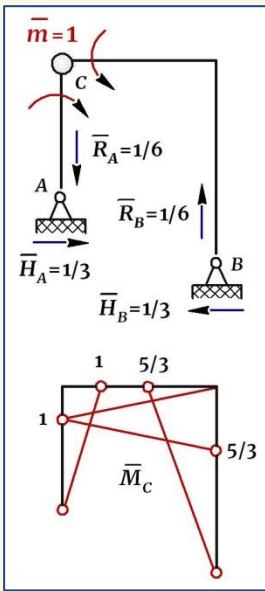
$$\sum M_A = 0: q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 4 - H_B \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow R_B = 15,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: q \cdot 3 \cdot 3,5 + R_A \cdot 4 - H_A \cdot 2 - q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0 \rightarrow R_A = 15,2 \text{ кН}.$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_A - R_B = 0 \rightarrow 15,2 - 15,2 = 0$.

8) ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Используем для проверки вариант III, где в узле С установлен шарнир, и докажем, что угол поворота здесь равен нулю. Для этого приложим на шарнире единичный момент, построим единичную эпюру моментов и перемножим ее с эпюрой M_F :



$$\sum M_{C(\text{слева})} = 0: \bar{H}_A \cdot 3 - \bar{m} = 0 \rightarrow \bar{H}_A = \bar{m}/3 = 1/3;$$

$$\sum X = 0: \bar{H}_A - \bar{H}_B = 0 \rightarrow \bar{H}_B = 1/3;$$

$$\sum M_A = 0: \bar{m} - \bar{m} - \bar{R}_B \cdot 4 + \bar{H}_B \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_B = 1/6;$$

$$\sum M_B = 0: \bar{m} - \bar{m} - \bar{R}_A \cdot 4 + \bar{H}_A \cdot 2 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 1/6.$$

$$\Theta_C = 0 :$$

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \times \right. \\ \left. \times 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 59,1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 59,1 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 5^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \right] = \frac{203,77 - 204,61}{EI_x} = -\frac{0,84}{EI_x} \approx 0.$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

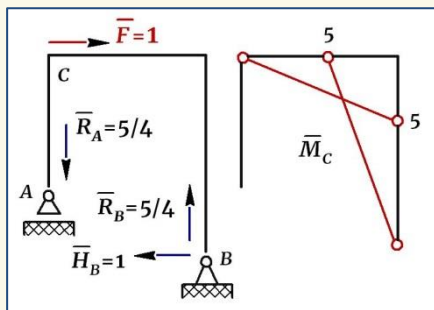
1) Из условия прочности подбираем для рамы сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{63,3 \cdot 10^6}{140} = 452 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №30, для которого $W_x = 472 \text{ см}^3$, $I_x = 7080 \text{ см}^4$.

2) Определяем ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ узла С.

Для этого используем любой вариант ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ, например I, прикладываем в заданном сечении горизонтально единичную силу $\bar{F}=1$, строим единичную эпюру \bar{M}_C и перемножаем с грузовой M_F :



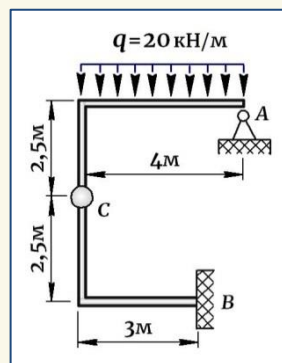
$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \rightarrow \bar{H}_B = 1; \\ \sum M_A &= 0 \rightarrow \bar{R}_B = 5/4; \\ \sum M_B &= 0 \rightarrow \bar{R}_A = 5/4. \end{aligned}$$

$$\Delta_C^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 59,1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 5 \times \right. \\ \left. \times 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 5^5}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = \frac{-346,33 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = -24,5 \text{ мм}$$

– точка C переместится влево.

Задача 4

Раскрыть статическую неопределимость плоской рамы. Принять жесткость всех участков одинаковой ($EI_x = \text{const}$). Построить окончательные эпюры и выполнить проверку. Подобрать для рамы сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Определить угол поворота на шарнире C.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

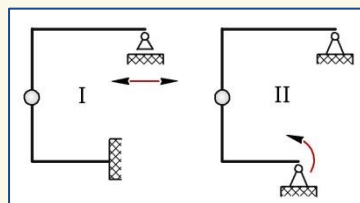
① Устанавливаем степень статической неопределимости рамы:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 5 + 8 - 3 \cdot 4 = 1 -$$

рама один раз статически неопределима.

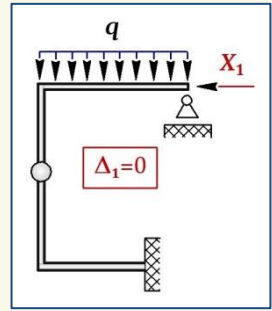
② Выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ.

Для дальнейшего решения из рассмотренных вариантов выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ I.



③ Создаем эквивалентную систему.

Загружаем основную систему внешней нагрузкой, в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 и задаем условие, что перемещение по направлению этой силы $\rightarrow \Delta_1 = 0$.

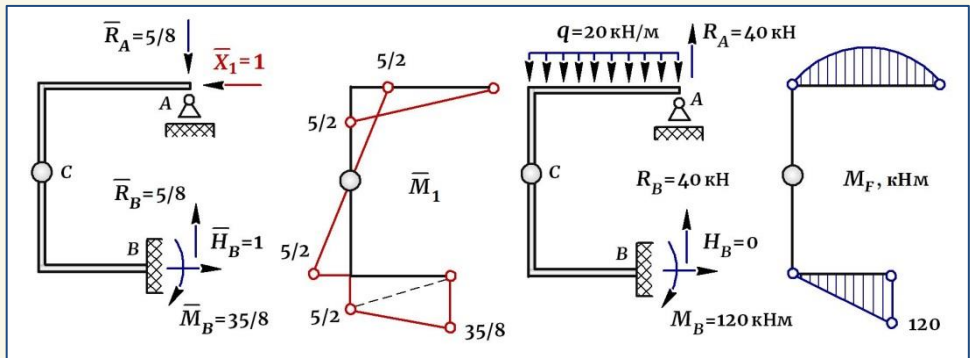


④ Каноническое уравнение метода сил. Раскрывая условие по перемещению $\Delta_1 = 0$, получаем каноническое уравнение в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} и Δ_{1F} – коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от ее единичного значения и заданной нагрузки соответственно.

⑤ Определяем коэффициенты канонического уравнения:



– от единичной силы –

$$\sum M_C (\text{сверху}) = 0: \bar{X}_1 \cdot 2,5 - \bar{R}_A \cdot 4 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 5/8;$$

$$\sum M_B = 0: \bar{M}_B + \bar{R}_A \cdot 1 - \bar{X}_1 \cdot 5 = 0 \rightarrow \bar{M}_B = 35/8;$$

$$\sum X = 0 \rightarrow \bar{H}_B = \bar{X}_1 = 1; \quad \sum Y = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \bar{R}_B = 5/8.$$

– от заданной нагрузки –

$$\sum M_C (\text{сверху}) = 0: R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = 40 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: M_B - R_A \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 1 = 0 \rightarrow M_B = 120 \text{ кНм};$$

$$\sum X = 0 \rightarrow H_B = 0; \quad \sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 4 = 0 \rightarrow R_B = 40 \text{ кН}.$$

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

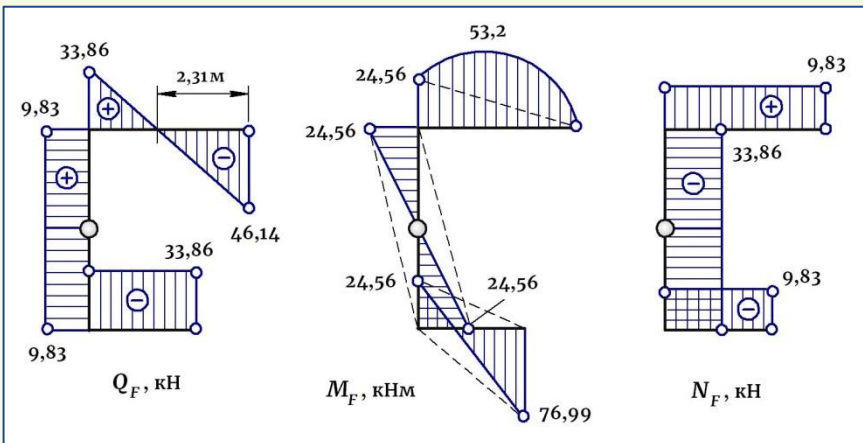
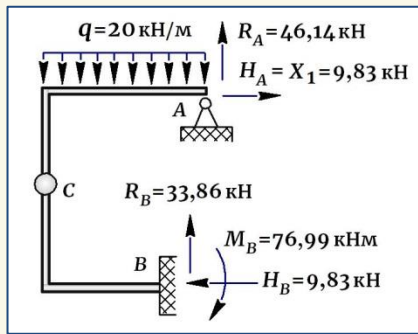
$$\boxed{\delta_{11}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{35}{8} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{35}{8} \right) \right] = \frac{55,08}{EI_x};$$

$$\boxed{\Delta_{1F}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{35}{8} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \right] = \frac{541,67}{EI_x}.$$

⑥ Подставляем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1F} в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 , при которой перемещение по ее направлению будет равно нулю:

$$\frac{55,08}{EI_x} X_1 + \frac{541,67}{EI_x} = 0 \rightarrow \boxed{X_1 = -9,83 \text{ кН}}.$$

⑦ Возвращаемся к исходной раме. Задаем правильное направление $X_1 = H_A$, определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:



$$\sum M_C (\text{сверху}) = 0: R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - H_A \cdot 2,5 = 0 \rightarrow R_A = 46,14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: M_B - R_A \cdot 1 - q \cdot 4 \cdot 1 + H_A \cdot 5 = 0 \rightarrow M_B = 76,99 \text{ кНм};$$

$$\sum X = 0: H_A - H_B = 0 \rightarrow H_B = 9,83 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 4 = 0 \rightarrow R_B = 33,86 \text{ кН}.$$

8) ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что перемещение по направлению любой отброшенной связи равно нулю. Для этого возвращаемся к вариантам ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ (см. п. 2) и выбираем для проверки вариант I, где докажем, что горизонтальное перемещение на опоре A равно нулю:

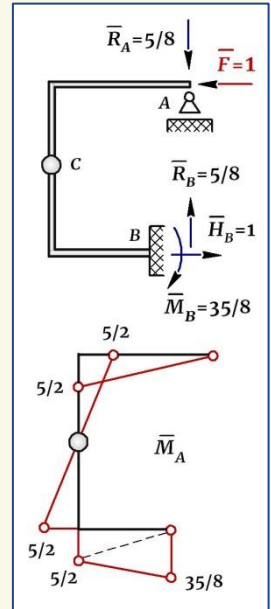
$$\sum M_C (\text{сверху}) = 0: \bar{F} \cdot 2,5 - \bar{R}_A \cdot 4 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 5/8;$$

$$\sum M_B = 0: \bar{M}_B + \bar{R}_A \cdot 1 - \bar{F} \cdot 5 = 0 \rightarrow \bar{M}_B = 35/8;$$

$$\sum X = 0 \rightarrow \bar{H}_B = \bar{F} = 1; \quad \sum Y = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \bar{R}_B = 5/8.$$

$$\Delta_A^{\text{гориз}} = 0: \Delta_A^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 24,56 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 24,56 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot 24,56 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 76,99 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{35}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \times \right. \\ \left. \times 24,56 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{35}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \right) \right] = \frac{433,07 - 432,47}{EI_x} = \frac{0,6}{EI_x} \approx 0.$$



II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

1) Из условия прочности подбираем для рамы сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{76,99 \cdot 10^6}{160} = 481,2 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №30, для которого $W_x = 472 \text{ см}^3$, $I_x = 7080 \text{ см}^4$. Перегрузка составляет $\approx 2\%$, что допустимо.

② Определяем УГОЛ ПОВОРОТА на шарнире С.

Для этого используем любой вариант *основной системы*, например I, прикладываем на шарнире С единичный момент $\bar{m}=1$, строим единичную эпюру \bar{M}_C и перемножаем с грузовой эпюрой M_F :

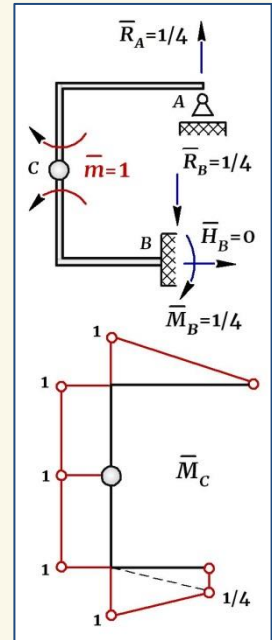
$$\sum M_C (\text{сверху}) = 0: \bar{m} - \bar{R}_A \cdot 4 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 1/4;$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow \bar{R}_A = \bar{R}_B = 1/4;$$

$$\sum X = 0 \rightarrow \bar{H}_B = 0;$$

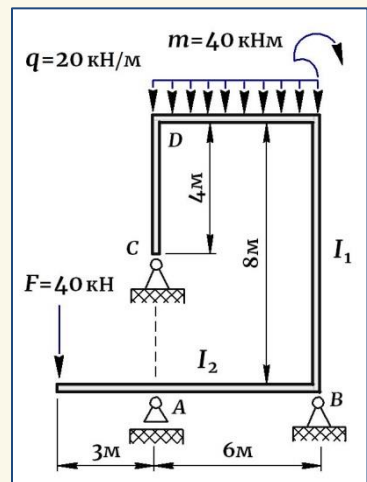
$$\sum M_C (\text{снизу}) = 0: \bar{m} - \bar{M}_B - \bar{R}_B \cdot 3 = 0 \rightarrow \bar{M}_B = 1/4.$$

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 24,56 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 24,56 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 24,56 \cdot 1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 24,56 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 76,99 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) \right) = \\ = \frac{116,2}{EI_x} = \frac{116,2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} \approx 0,0082 \text{ рад} \approx 0,5^\circ.$$



Задача 5

Раскрыть статическую неопределимость плоской рамы, принимая соотношение жесткостей вертикальных I_1 и горизонтальных I_2 участков $\rightarrow I_1 = 1,5 I_2$. Построить окончательные эпюры и выполнить проверку решения. Подобрать сечение двутавр, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, и принять $I_x = I_2$. Определить горизонтальное перемещение узла D.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

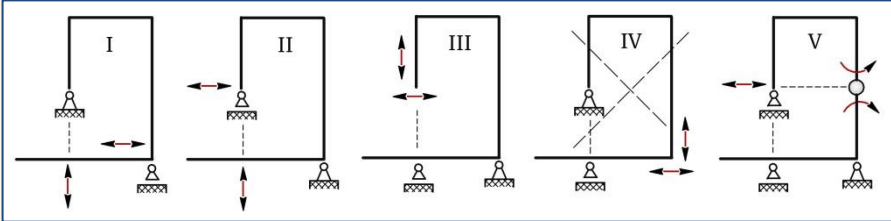
① Устанавливаем степень статической неопределенности рамы:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 5 + 9 - 3 \cdot 4 = 2 -$$

рама дважды статически неопределима.

② Выбираем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ.

Отбрасываем от рамы две лишние связи и рассматриваем варианты основных систем:



Для дальнейшего решения выбираем вариант III.

Примечание.

1. При замене опор следует помнить, что связи можно только отбрасывать, их нельзя добавлять. А поэтому шарнирно-подвижные или шарнирно-неподвижные опоры нельзя заменять на жесткую заделку, имеющую большее число связей, чем шарнирные опоры.

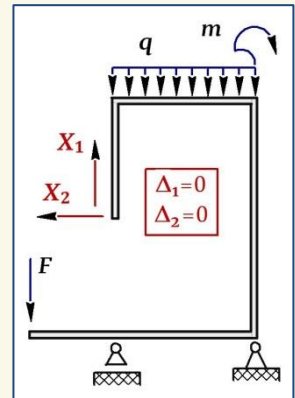
2. Если на раме одна из опор является жесткой заделкой, ее рациональнее сохранить и основную систему выбрать с этой заделкой, что обеспечит при решении задачи более легкое построение эпюр.

③ Создаем ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ.

Загружаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ заданной внешней нагрузкой, в направлении отброшенных связей прикладываем силы $X_1 - X_2$ и задаем условие, что перемещение по их направлению равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$.

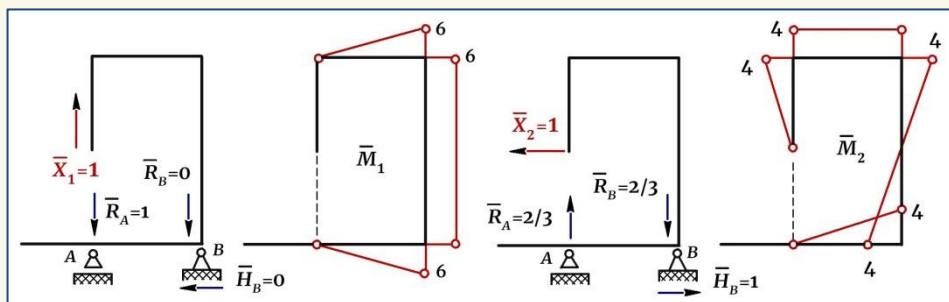
④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Раскрывая условия $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, получаем систему канонических уравнений относительно неизвестных сил X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases}$$



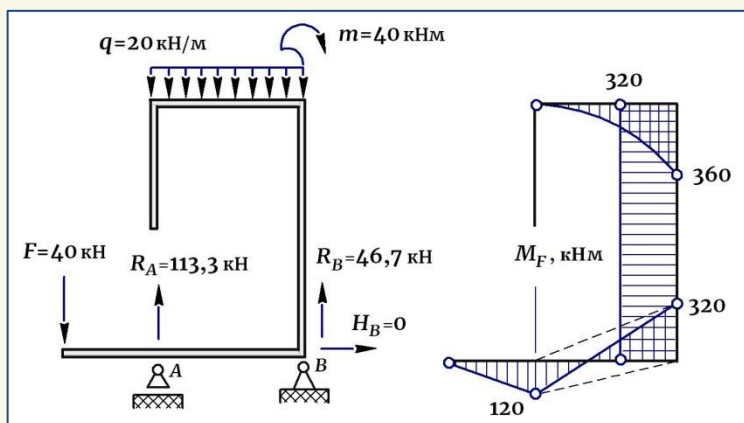
где δ_{11} и δ_{22} – главные, δ_{12} и δ_{21} – побочные (на основании *теоремы о взаимности перемещений* $\delta_{12}=\delta_{21}$) и Δ_{1F} и Δ_{2F} – грузовые коэффициенты, представляющие собой перемещения по направлению сил X_1 и X_2 от единичных значений этих сил и заданной внешней нагрузки соответственно.

5 КОЭФФИЦИЕНТЫ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. Так как коэффициенты – это перемещения, определяем их по методу Верещагина путем перемножения эпюр. Для этого поочередно прикладываем к основной системе сначала единичные силы $\bar{X}_1=1$ и $\bar{X}_2=1$, а затем внешнюю нагрузку, определяем от этих сил реакции опор и строим эпюры изгибающих моментов – *единичные* и *грузовую*, после чего перемножаем эпюры соответствующим образом:



$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad & \bar{H}_B = 0; \\ \sum M_A = 0: \quad & \bar{R}_B = 0; \\ \sum M_B = 0: \quad & \bar{R}_A = \bar{X}_1 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad & \bar{H}_B = \bar{X}_2 = 1; \\ \sum M_A = 0: \quad & \bar{X}_2 \cdot 4 - \bar{R}_B \cdot 6 = 0 \rightarrow \bar{R}_B = 2/3; \\ \sum M_B = 0: \quad & \bar{X}_2 \cdot 4 - \bar{R}_A \cdot 6 = 0 \rightarrow \bar{R}_A = 2/3. \end{aligned}$$



$$\sum X = 0: \quad H_B = 0;$$

$$\sum M_A = 0: \quad F \cdot 3 + R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - m = 0 \rightarrow R_B = 46,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad F \cdot 9 + q \cdot 6 \cdot 3 - R_A \cdot 6 - m = 0 \rightarrow R_A = 113,3 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: \quad R_A + R_B - q \cdot 6 - F = 0 \rightarrow 113,3 + 46,7 - 20 \cdot 6 - 40 = 0.$$

Примечание.

Вычисление коэффициентов следует выполнять очень внимательно, не забывая о различной жесткости вертикальных и горизонтальных участков и учитывая заданное соотношение I_1/I_2 в расчетах. Для этого следует перемножать отдельно горизонтальные и отдельно вертикальные участки. При этом все рассчитанные коэффициенты, если числитель в них не делится точно на 3, 6, 9 и т.д., их все желательно приводить к одному знаменателю, что позволит его сократить в уравнениях и получить более точное решение.

$$\begin{aligned} \boxed{\delta_{11}} &= \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \times 2 + \frac{1}{EI_1} (6 \cdot 8 \cdot 6) = \frac{144}{EI_2} + \frac{288}{E \cdot 1,5I_2} = \\ &= \frac{336}{EI_2} = \frac{1008}{3EI_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\delta_{22}} &= \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_2 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} \left(4 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \times 3 = \\ &= \frac{128}{EI_2} + \frac{64}{E \cdot 1,5I_2} = \frac{512}{3EI_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} &= \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 6 \right) = \frac{72}{3EI_2}; \end{aligned}$$

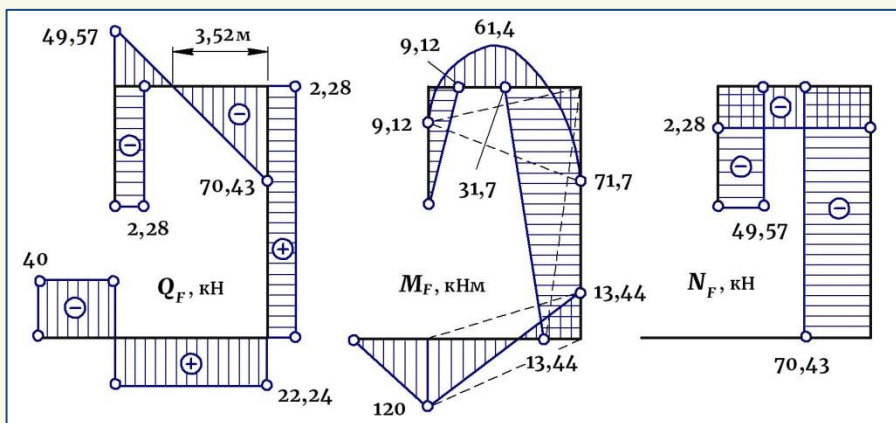
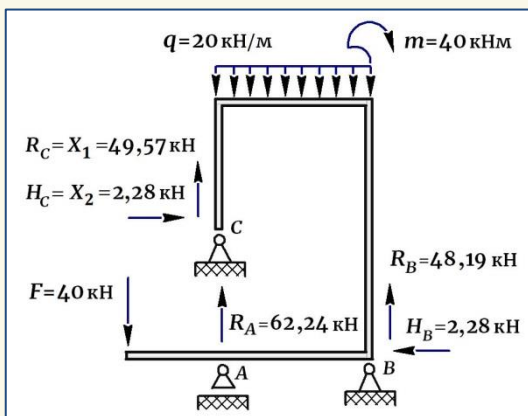
$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_{1F}} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 320 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{(-320 \cdot 8 \cdot 6)}{EI_1} = \frac{-6360}{EI_2} + \frac{-15360}{E \cdot 1,5I_2} = -\frac{49800}{3EI_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta_{2F}} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{2} \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 320 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 320 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 320 \right) = -\frac{2400}{3EI_2}. \end{aligned}$$

⑥ Подставляем коэффициенты в систему канонических уравнений, сокращаем слагаемые на знаменатель $3EI_2$, решаем систему и определяем силы X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{1008X_1}{3EI_2} + \frac{72X_2}{3EI_2} - \frac{49800}{3EI_2} = 0 \\ \frac{72X_1}{3EI_2} + \frac{512X_2}{3EI_2} - \frac{2400}{3EI_2} = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \boxed{\begin{matrix} X_1 = 49,57 \text{ кН} \\ X_2 = -2,28 \text{ кН} \end{matrix}}.$$

⑦ Возвращаемся к исходной раме. Вычисленные силы X_1 и X_2 являются реакциями на опоре С, при этом, учитывая, что сила X_2 получилась отрицательной, горизонтальная реакция H_C будет направлена в сторону, обратную направлению X_2 . Определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:



$$\sum X = 0: H_C - H_B = 0 \rightarrow H_B = 2,28 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: F \cdot 3 + R_B \cdot 6 - H_C \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 - m = 0 \rightarrow R_B = 48,19 \text{ кН};$$

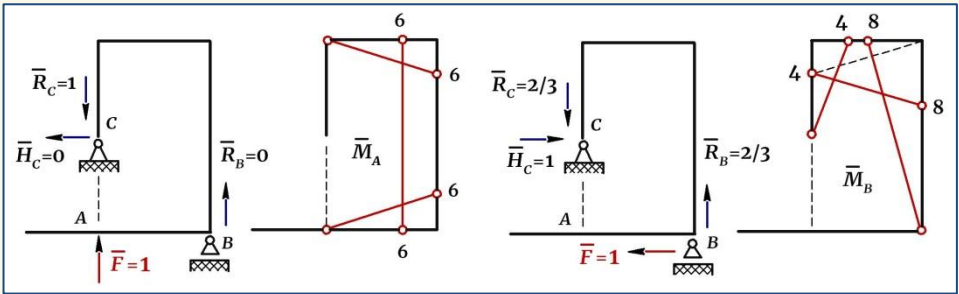
$$\sum M_B = 0: F \cdot 9 + q \cdot 6 \cdot 3 - R_A \cdot 6 - H_C \cdot 4 - R_C \cdot 6 - m = 0 \rightarrow R_A = 62,24 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0: R_A + R_B + R_C - q \cdot 6 - F = 0 \rightarrow$$

$$62,24 + 48,19 + 49,57 - 20 \cdot 6 - 40 = 0.$$

8) ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Рама дважды статически неопределима, поэтому проверку следует проводить для двух любых отброшенных связей. Используем для проверки вариант I и докажем, что вертикальное перемещение на опоре A и горизонтальное перемещение на опоре B, там где были отброшены связи, равны нулю. Для этого приложим в указанных направлениях единичные силы $\bar{F} = 1$, вычислим от них реакции опор и построим единичные эпюры моментов, которые затем перемножим с окончательной грузовой эпюрой момента M_F :



$$\begin{array}{l} \sum X = 0: \bar{H}_C = 0; \\ \sum M_C = 0: \bar{R}_B = 0; \\ \sum M_B = 0: \bar{R}_C = \bar{F} = 1. \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} \sum X = 0: \bar{H}_C = \bar{F} = 1; \\ \sum M_C = 0: \bar{F} \cdot 4 - \bar{R}_B \cdot 6 = 0 \rightarrow \bar{R}_B = 2/3; \\ \sum M_B = 0: \bar{R}_C \cdot 6 - \bar{H}_C \cdot 4 = 0 \rightarrow \bar{R}_C = 2/3. \end{array} \right.$$

Примечание.

При выполнении проверки, также как и при ранее выполненных расчетах, следует учитывать различную жесткость вертикальных и горизонтальных участков и заданное соотношение $I_1 = 1,5I_2$.

$$\Delta_A^{\text{верт}} = 0 \quad \left[\Delta_A^{\text{верт}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9,12 \cdot \frac{1}{3} \times \right. \right.$$

$$\left. \times 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 71,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13,44 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 31,7 \cdot 6 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13,44 \cdot 6) = \frac{-1080 + 54,72 + 860,4 + 161,28 - 720}{EI_2} + \frac{1083,36}{E \cdot 1,5I_2} = \\
 & = \frac{1798,64 - 1800}{EI_2} = \frac{-1,36}{EI_2}. \quad \text{Погрешность: } \frac{|1,36|}{1798,64} \cdot 100\% = 0,08\%.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_B^{\text{гориз}} = 0 : \Delta_B^{\text{гориз}} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_2} \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{4+8}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \times \right. \\
 & \times 9,12 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 71,7 \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) \left. \right] + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \times \right. \\
 & \times 31,7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13,44 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \left. \right) = \frac{-2160 + 145,92 + 1434}{EI_2} + \\
 & + \frac{48,64 + 676,27 + 143,36}{E \cdot 1,5I_2} = \frac{-2160 + 2158,77}{EI_2} = \frac{-1,23}{EI_2}. \\
 & \text{Погрешность: } \frac{|1,23|}{2158,77} \cdot 100\% = 0,06\%.
 \end{aligned}$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

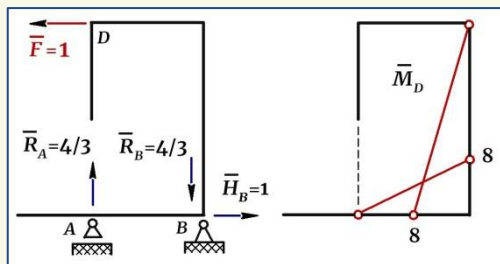
① Из условия прочности подбираем для рамы сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^6}{160} = 750 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №36, для которого $W_x = 743 \text{ см}^3$ и $I_x = I_2 = 13380 \text{ см}^4$. Перегрузка составляет 0,9%.

② Определяем ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ сечения D.

Для этого используем любой вариант основной системы, прикладываем в заданном сечении горизонтально единичную силу $\bar{F} = 1$, определяем от нее реакции опор, строим единичную эпюру \bar{M}_D и



умножаем ее с грузовой эпюрой моментов M_F :

$$\begin{aligned}
 \sum X = 0 &\rightarrow \bar{H}_B = \bar{F} = 1; \\
 \sum M_A = 0 &\rightarrow \bar{R}_B = 4/3; \\
 \sum M_B = 0 &\rightarrow \bar{R}_A = 4/3.
 \end{aligned}$$

При вычислении перемещения также следует учитывать соотношение жесткостей $I_1=1,5I_2$:

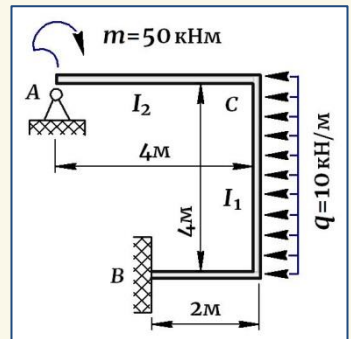
$$\Delta_D^{\text{гориз}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_D) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13,44 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 \right) + \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \left(\frac{2}{3} \cdot 13,44 + \frac{1}{3} \cdot 31,4 \right) \right] = \frac{-744,96}{EI_2} + \frac{621,65}{E \cdot 1,5I_2} = -\frac{330,52}{EI_2} = -\frac{330,52 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 13380 \cdot 10^4} = -12,4 \text{ мм, узел } D \text{ переместится вправо.}$$

Задача 6

Раскрыть статическую неопределенность плоской рамы, принимая соотношение жесткостей вертикальных I_1 и горизонтальных I_2 участков, равным $I_1 = 2I_2$.

Построить окончательные эпюры и выполнить проверку решения. Определить вертикальное перемещение и угол поворота узла С. Принять для рамы:

$$I_x = I_2 = 450 \text{ см}^4, E = 2 \times 10^5 \text{ МПа.}$$



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

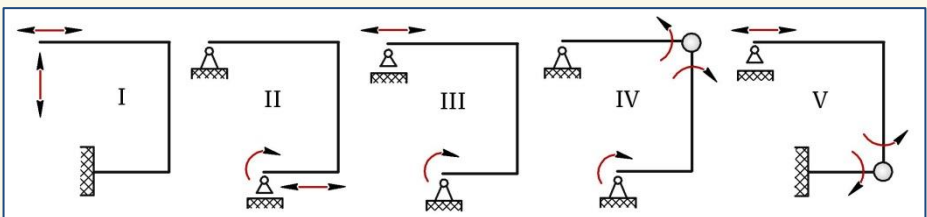
① Устанавливаем степень статической неопределенности рамы:

$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 5 + 6 - 3 \cdot 3 = 2 -$$

рама дважды статически неопределима.

② Выбираем основную систему.

Отбрасываем от рамы две лишние связи и рассматриваем варианты основных систем:



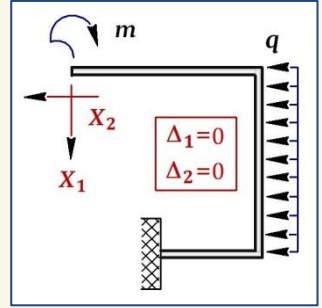
Для дальнейшего решения выбираем вариант I.

Примечание.

Если на раме одна из опор является жесткой заделкой, ее рациональнее сохранить и основную систему выбрать с этой заделкой, что обеспечит при решении задачи более легкое построение эпюр – грузовой и единичных.

③ Создаем эквивалентную систему.

Загружаем основную систему заданной внешней нагрузкой, в направлении отброшенных связей прикладываем силы $X_1 - X_2$ и задаем условие, что перемещение по их направлению равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$.



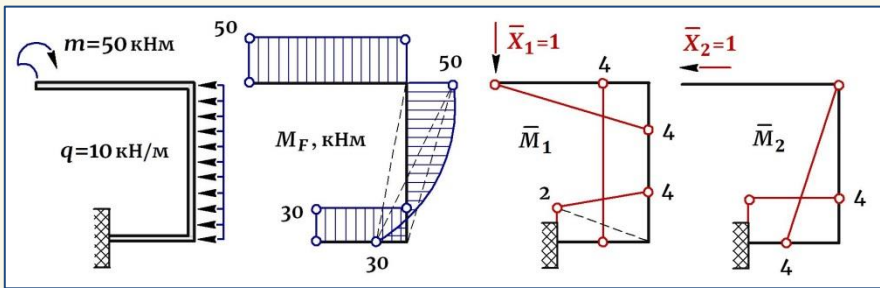
④ Каноническое уравнение метода сил.

Раскрывая условие по перемещениям $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, получаем систему канонических уравнений метода сил относительно неизвестных сил X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases}$$

где δ_{11} и δ_{22} – главные, δ_{12} и δ_{21} – побочные (на основании теоремы о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$) и Δ_{1F} и Δ_{2F} – грузовые коэффициенты, представляющие собой перемещения по направлению сил X_1 и X_2 от единичных значений этих сил и заданной внешней нагрузки соответственно.

⑤ Определяем коэффициенты канонического уравнения:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \times \right]$$

$$\times \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \Bigg] + \frac{1}{EI_1} (4 \cdot 4 \cdot 4) = \frac{120}{3EI_2} + \frac{64}{E \cdot 2I_2} = \frac{216}{3EI_2};$$

$$\boxed{\delta_{22}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_2 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} (4 \cdot 2 \cdot 4) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{32}{EI_2} + \frac{64}{3E \cdot 2I_2} =$$

$$= \frac{96}{3EI_2} + \frac{32}{3EI_2} = \frac{128}{3EI_2};$$

$$\boxed{\delta_{12} = \delta_{21}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} \left(4 \cdot 2 \cdot \frac{4+2}{2} \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{24}{EI_2} +$$

$$+ \frac{32}{E \cdot 2I_2} = \frac{72}{3EI_2} + \frac{96}{E \cdot 2I_2} = \frac{120}{3EI_2};$$

$$\boxed{\Delta_{1F}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 50 + 30 \cdot 2 \cdot \frac{4+2}{2} \right) + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 30 \cdot 4 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 50 \cdot 4 \right) = -\frac{220}{EI_2} - \frac{1120}{3E \cdot 2I_2} = -\frac{1220}{3EI_2};$$

$$\boxed{\Delta_{2F}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_2) = \frac{1}{EI_2} (2 \cdot 30 \cdot 4) + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 50 \cdot \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{720}{3EI_2} - \frac{240}{3E \cdot 2I_2} = \frac{600}{3EI_2}.$$

Примечание.

При вычислении коэффициентов не следует забывать о различной жесткости вертикальных и горизонтальных участков, учитывая заданное соотношение $I_1 = 2I_2$ в расчетах.

⑥ Подставляем коэффициенты в систему канонических уравнений, сокращаем слагаемые на знаменатель $3EI_2$, решаем систему и определяем силы X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{216X_1}{3EI_2} + \frac{120X_2}{3EI_2} - \frac{1220}{3EI_2} = 0 \\ \frac{120X_1}{3EI_2} + \frac{128X_2}{3EI_2} + \frac{600}{3EI_2} = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \boxed{\begin{matrix} X_1 = 17,22 \text{ кН} \\ X_2 = -20,83 \text{ кН} \end{matrix}}.$$

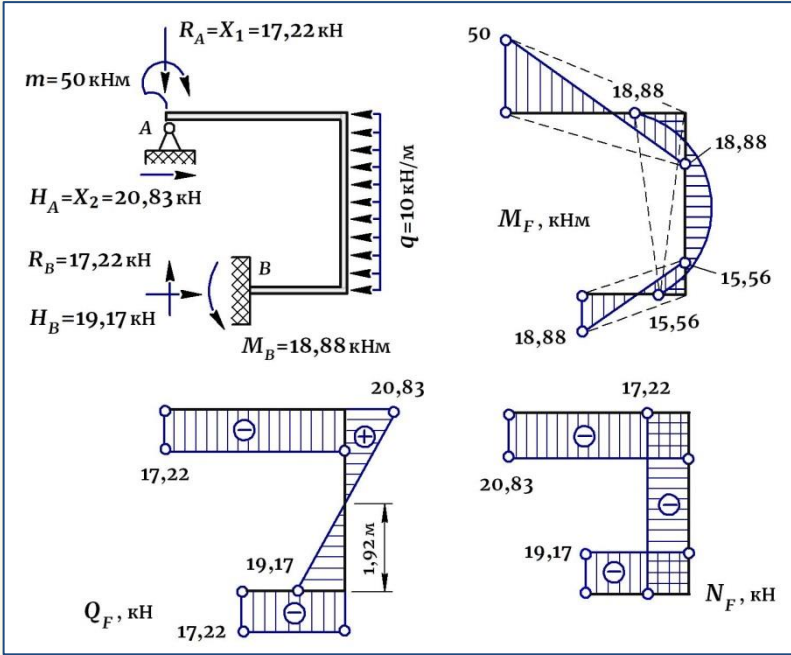
⑦ Возвращаемся к исходной раме. Вычисленные силы X_1 и X_2 являются реакциями на опоре А, при этом, учитывая, что сила X_2 получилась отрицательной, горизонтальная реакция H_A будет направ-

лена в сторону, обратную направлению X_2 . Определяем остальные реакции опор и строим окончательные эпюры:

$$\sum X = 0: H_A + H_B - q \cdot 4 = 0 \rightarrow H_B = 19,17 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: R_B - R_A = 0 \rightarrow R_B = 17,22 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: M_B + q \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 2 - H_A \cdot 4 - m = 0 \rightarrow M_B = 18,88 \text{ кНм}.$$

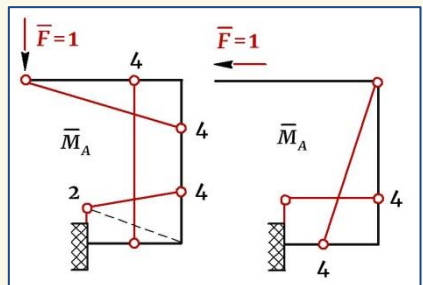


8 ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА.

Используем для проверки тот же вариант I и докажем, что вертикальное и горизонтальное перемещение на опоре А равно нулю. Для этого в указанных направлениях прикладываем единичные силы $\bar{F}=1$, строим единичные эпюры и перемножаем их с грузовой эпюрой моментов M_F :

Примечание.

При выполнении проверки, также как и при ранее выполненных расчетах, следует учитывать различную жесткость вертикальных и горизонтальных участков и заданное соотношение $I_1 = 2I_2$.



$$\Delta_A^{верт} = 0 : \Delta_A^{верт} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 18,88 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 50 \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15,56 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18,88 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) \right] + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 18,88 \times \right. \\ \left. \times 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15,56 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{100,69 - 133,33 + 51,87 - 50,35}{EI_2} + \\ + \frac{151,04 + 124,48 - 213,33}{E \cdot 2I_2} = \frac{290,34 - 290,34}{EI_2} = 0.$$

$$\Delta_A^{гориз} = 0 : \Delta_A^{гориз} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15,56 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18,88 \times \right. \\ \left. \times 4 \right) + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 18,88 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15,56 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ = \frac{62,24 - 75,52}{EI_2} + \frac{-106,67 + 50,35 + 82,98}{E \cdot 2I_2} = \frac{128,91 - 128,85}{EI_2} = \frac{0,06}{EI_2} \approx 0.$$

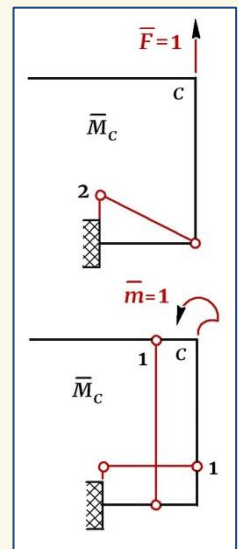
II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ РАМЫ

Определяем ВЕРТИКАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ и УГОЛ ПОВОРОТА узла С. Используем для решения вариант основной системы I, прикладываем в узле С единичную силу $\bar{F}=1$ и единичный момент $\bar{m}=1$, строим единичные эпюры и перемножаем их с грузовой эпюрой моментов M_F , не забывая учитывать соотношение жесткостей $I_1=2I_2$:

$$\Delta_C^{верт} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18,88 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15,56 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{-14,8}{EI_2} = \frac{-14,8 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 450 \cdot 10^4} = -16,4 \text{ мм},$$

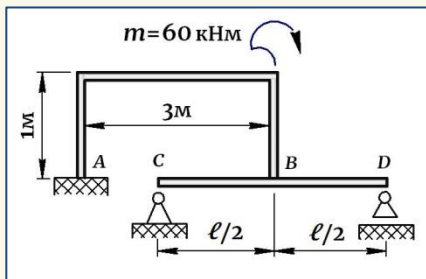
т.е. точка С переместится вниз.

$$\Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 18,88 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 15,56 \cdot 1 \right) + \frac{1}{E \cdot 2I_2} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 18,88 \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15,56 \cdot 1 \right) = \frac{4,45 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 450 \cdot 10^4} = 0,005 \text{ рад} \approx 0,3^\circ.$$



Задача 7

Стальная плоская рама AB с одинаковой жесткостью участков одним концом закреплена в заделке, а другим опирается на середину пролета деревянной балки CD длиной $\ell = 2\text{ м}$, которая от воздействия рамы прогибается. Учитывая деформируемость правой опоры, раскрыть статическую неопределимость рамы и выполнить проверку расчетов. Принять для рамы AB и балки CD соответственно:



$$I_{AB} = 1290 \text{ см}^4, E_{AB} = 2 \times 10^5 \text{ МПа},$$

$$I_{CD} = 6000 \text{ см}^4, E_{CD} = 1 \times 10^4 \text{ МПа}.$$

РЕШЕНИЕ:

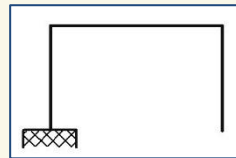
I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Устанавливаем степень статической неопределимости рамы, рассматривая для нее опору как шарнирно-подвижную:

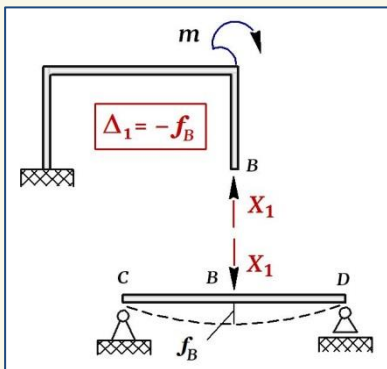
$$L = C_{\text{опор}} + C_{\text{вн}} - 3D = 4 + 6 - 3 \cdot 3 = 1 -$$

рама *один раз статически неопределима*.

② Выбираем основную систему. В качестве лишней связи убираем опорную балку и получаем статически определимую раму с заделкой.



③ Создаем эквивалентную систему. Для этого загружаем раму заданной внешней нагрузкой (моментом m), в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 — силу, с которой опорная балка CD действует на раму, и задаем условие, что по направлению этой



силы перемещение Δ_1 равно прогибу упругой опоры в точке B , т.е.

$$\Delta_1 = -f_B, \quad (1)$$

где f_B — прогиб опорной балки в середине пролета. Так как направление силы X_1 на раме выбрано вверх, а перемещение точки произойдет вниз, в правой части уравнения (1) следует ставить знак «минус».

④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Учитывая, что опорная балка изгибается от действия такой же силы X_1 , ее прогиб в середине пролета может быть определен по формуле:

$$f_B = \frac{X_1 \ell^3}{48 E_{CD} I_{CD}}. \quad (2)$$

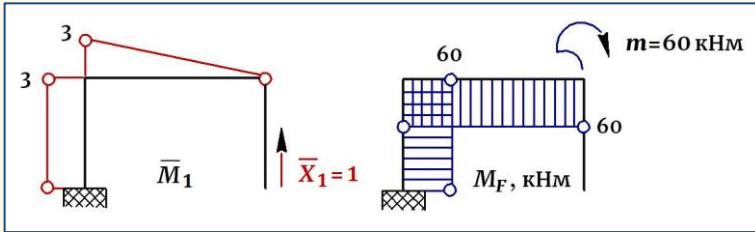
Принимая также –

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1F}, \quad (3)$$

на основании (1) КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ принимает вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = - \frac{X_1 \ell^3}{48 E_{CD} I_{CD}}. \quad (4)$$

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения (4):



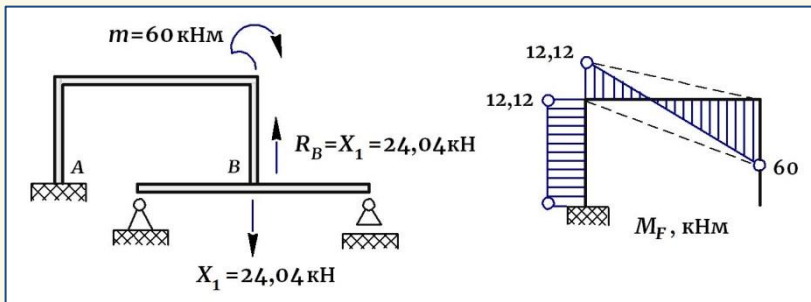
$$\delta_{11} = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3 \right) = \frac{18}{E_{AB} I_{AB}};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 60 - 3 \cdot 1 \cdot 60 \right) = - \frac{450}{E_{AB} I_{AB}}.$$

Подставляем полученные коэффициенты, а также значение (2) в уравнение (4) и получаем:

$$\begin{aligned} \frac{18}{E_{AB} I_{AB}} X_1 - \frac{450}{E_{AB} I_{AB}} &= - \frac{X_1 \ell^3}{48 E_{CD} I_{CD}} \rightarrow \\ \frac{18 \cdot 10^9 \cdot X_1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} + \frac{X_1 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 6000 \cdot 10^4} &= \frac{450 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} \rightarrow \\ 6,977 X_1 + 0,278 X_1 &= 174,42 \rightarrow \boxed{X_1 = 24,04 \text{ кН}}. \end{aligned}$$

⑥ Возвращаемся к исходной раме, опирающейся в точке B на упругую балку, и строим окончательную эпюру моментов:

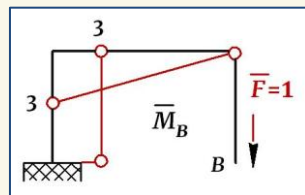


II. ПРОВЕРОЧНЫЙ РАСЧЕТ

Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что перемещение точки B рамы будет равно прогибу середины пролета опорной балки CD , т.е. $\Delta_B^{верт} = f_B$, где согласно (2) –

$$f_B = \frac{X_1 \ell^3}{48 E_{CD} I_{CD}} = \frac{24,04 \cdot 10^3 (2 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 6000 \cdot 10^4} = 6,7 \text{ мм.} \quad (5)$$

Для определения $\Delta_B^{верт}$ прикладываем на раме в точке B единичную силу $\bar{F} = 1$, строим единичную эпюру моментов и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (см. выше):



$$\Delta_B^{верт} = f_B : \Delta_B^{верт} = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{E_{AB} I_{AB}} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - 12,12 \cdot 1 \cdot 3 \right) = \frac{17,28 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 6,7 \text{ мм,}$$

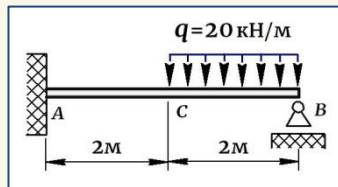
что соответствует значению прогиба f_B , вычисленному по формуле (5).

2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Раскрытие статической неопределенности с помощью УРАВНЕНИЯ ИЗОГНУТОЙ ОСИ БАЛКИ (метод Навье)

Задача 8

Раскрыть статическую неопределенность балки, построить окончательные эпюры, сделать проверку. Подобрать для балки круглое сечение, если для материала $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$, и определить прогиб посередине пролета. Принять для балки: $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка один раз статически неопределима. Составляем для балки уравнения равновесия:

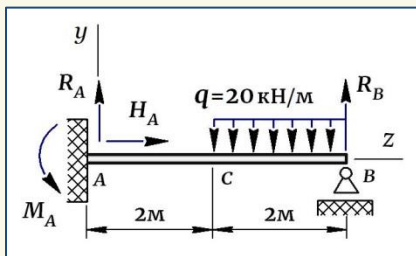
$$\sum Z = 0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: M_A + R_B \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$M_A + R_B \cdot 4 - 120 = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0: M_A - R_A \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$M_A - R_A \cdot 4 + 40 = 0. \quad (2)$$



Примечание.

Определение реакций опор из уравнений статики является невозможным, так как число неизвестных превышает число уравнений, поэтому для решения необходимо найти дополнительное уравнение.

② Записываем для балки уравнение прогибов по методу начальных параметров:

$$EIy_z = EIy_0 + EI\Theta_0 \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{q(z-2)^4}{24},$$

где y_0 и Θ_0 – прогиб и угол поворота сечения в начале координат. Но так как начало координат попадает в заделку, то здесь $EIy_0 = 0$ и $EI\Theta_0 = 0$. Задаем условие, что на опоре B, т.е. при $z = 4 \text{ м}$, прогиб равен нулю, и получаем уравнение прогибов –

$$EIy_B \text{ (при } z=4\text{м)} = 0 \rightarrow -\frac{M_A \cdot 4^2}{2} + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{q(4-2)^4}{24} = 0,$$

которое после арифметических преобразований принимает вид:

$$6M_A - 8R_A + 10 = 0. \quad (3)$$

③ Объединяем выражения (1)–(3) в систему уравнений, решаем ее и определяем реакции опор:

$$\begin{cases} M_A + R_B \cdot 4 - 120 = 0 \\ M_A - R_A \cdot 4 + 40 = 0 \\ 6M_A - 8R_A + 10 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{matrix} R_A = 14,4 \text{ кН} \\ R_B = 25,6 \text{ кН} \\ M_A = 17,6 \text{ кНм} \end{matrix}.$$

Статическая проверка – $\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 2 = 0$.

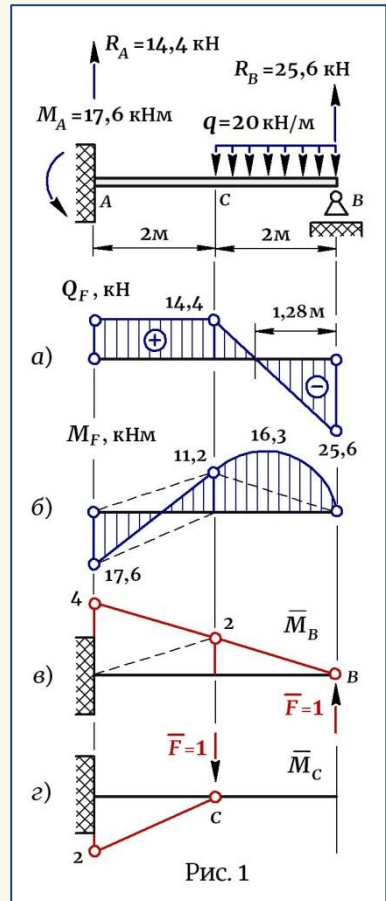
④ Строим на балке ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ ЭПЮРЫ поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 1, а, б).

⑤ Выполняем ПРОВЕРКУ. Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что по направлению любой отброшенной связи перемещение равно нулю. В качестве лишней связи рассматриваем опорную связь на опоре В, отбрасываем ее и доказываем, что прогиб здесь равен нулю, т.е. $y_B = 0$. Для этого прикладываем в сечении В единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 1, в), строим единичную эпюру \bar{M}_B и перемножаем с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 1, б):

$$y_B = 0 : y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \times \right. \\ \left. \times 11,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11,2 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17,6 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \\ = \frac{58,13 - 58,67}{EI_x} = - \frac{0,54}{EI_x}.$$

Погрешность: $\frac{|0,54|}{58,13} \cdot 100\% = 0,93\% -$

– что допустимо.



II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

① Из условия прочности подбираем для балки круглое сечение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{M_{\max}}{(\pi d^3/32)} \leq [\sigma], \text{ откуда}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 17,6 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 200}} = 96 \text{ мм.}$$

② Определяем ПРОГИБ в точке С

Для определения прогиба рассматриваем балку без внешней нагрузки, исключая также в качестве внешней силы реакцию на опоре В, в заданной точке прикладываем единичную силу $\bar{F}=1$, строим единичную эпюру моментов \bar{M}_C (рис. 1, з) и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (рис. 1, б) :

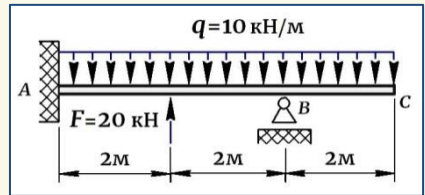
$$\begin{aligned} \boxed{y_C} &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 17,6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 11,2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{16}{EI_x} = \\ &= \left| I_x = \frac{\pi d^4}{64} \right| = \frac{16 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 (3,14 \cdot 96^4 / 64)} = 19,2 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Примечание.

Знак «плюс» говорит о том, что прогиб в точке С произойдет по направлению единичной силы, т.е. вниз.

Задача 9

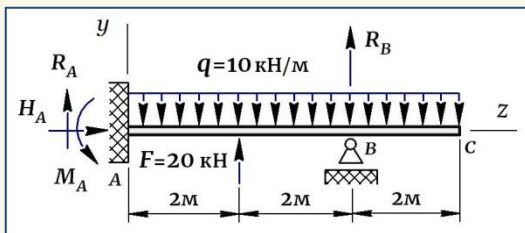
Раскрыть статическую неопределимость балки, построить окончательные эпюры, сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если для материала $[\sigma]=160$ МПа, и определить прогиб на конце консоли.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка один раз статически неопределима. Составляем для балки уравнения равновесия:



$$\sum Z=0: H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0: M_A + F \cdot 2 + R_B \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0 \rightarrow M_A + R_B \cdot 4 - 140 = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0: M_A + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$M_A - R_A \cdot 4 + 20 = 0. \quad (2)$$

② Записываем для балки уравнение прогибов по методу начальных параметров:

$$EIy_z = EIy_0 + EI\Theta_0 \cdot z - \frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{q z^4}{24} + \frac{F(z-2)^3}{6} + \frac{R_B(z-4)^3}{6},$$

где y_0 и Θ_0 – прогиб и угол поворота сечения в начале координат, равные в заделке $EIy_0 = 0$ и $EI\Theta_0 = 0$. Задаем условие, что на опоре В (при $z = 4$ м), прогиб равен нулю, и получаем уравнение прогибов –

$$EIy_B \text{ (при } z=4\text{м)} = 0 \rightarrow$$

$$-\frac{M_A \cdot 4^2}{2} + \frac{R_A \cdot 4^3}{6} - \frac{q \cdot 4^4}{24} + \frac{F(4-2)^3}{6} + \frac{R_B(4-4)^3}{6} = 0,$$

которое после арифметических преобразований принимает вид:

$$48M_A - 64R_A + 480 = 0. \quad (3)$$

③ Объединяем выражения (1)–(3) в систему уравнений, решаем ее и определяем реакции опор:

$$\begin{cases} M_A + R_B \cdot 4 - 140 = 0 \\ M_A - R_A \cdot 4 + 20 = 0 \\ 48M_A - 64R_A + 480 = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} R_A = 3,75 \text{ кН} \\ R_B = 36,25 \text{ кН} \\ M_A = -5 \text{ кНм} \end{cases}.$$

Статическая проверка – $\sum Y = 0: R_A + R_B + F - q \cdot 6 = 0$.

④ Строим на балке ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ ЭПЮРЫ поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 1, а, б).

⑤ Выполняем ПРОВЕРКУ. В качестве лишней связи рассматриваем опорную связь на опоре B , отбрасываем ее и доказываем, что прогиб здесь равен нулю, т.е. $y_B = 0$. Для этого прикладываем в сечении B единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 1, в), строим единичную эпюру \bar{M}_B и перемножаем с грузовой эпюрой M_F (рис. 1, б):

$$\begin{aligned}
 \boxed{y_B = 0} : y_B &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \\
 &= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,5 \times \right. \\
 &\times \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \times \\
 &\times \frac{4+2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \times \\
 &\left. \times 7,5 \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{0,01}{EI_x} \approx 0.
 \end{aligned}$$

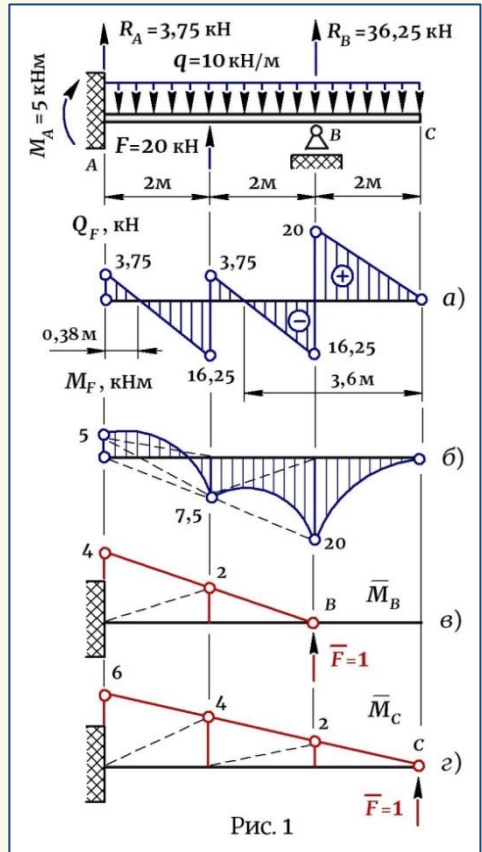


Рис. 1

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

① Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^6}{160} = 125 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №18, для которого — $W_x = 143 \text{ см}^3$, $I_x = 1290 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

② Определяем ПРОГИБ в точке C

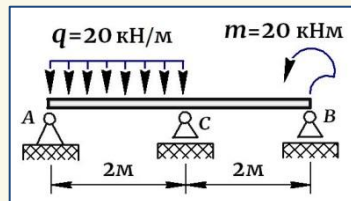
Для определения прогиба рассматриваем балку без внешней нагрузки, исключая также в качестве внешней силы реакцию на опоре B , в заданной точке прикладываем единичную силу $\bar{F} = 1$, строим единичную эпюру моментов \bar{M}_C (рис. 1, з) и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (рис. 1, б):

$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4+2}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,5 \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4+6}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,5 \left(\frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] = \frac{-53,34 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = \\
 &= -20,7 \text{ мм, т.е. точка } C \text{ получит перемещение вниз.}
 \end{aligned}$$

Раскрытие статической неопределимости МЕТОДОМ СИЛ

Задача 10

Раскрыть статическую неопределимость балки, построить окончательные эпюры, сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, и определить угол поворота опорного сечения А.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

- ① Балка является *один раз статически неопределимой*, так как здесь возникают четыре реакции опор, но для плоских систем можно составить только три уравнения равновесия (рис. 1, а).
- ② Выбираем **ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ**. Согласно методу сил отбрасываем одну лишнюю связь, например, опору С, и получаем **ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ** в виде (рис. 1, б).
- ③ Создаем **ЭКВИВАЛЕНТНУЮ СИСТЕМУ**. Для этого загружаем **ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ** заданной внешней нагрузкой, а в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 (пока неизвестную) и задаем условие, что перемещение по направлению этой силы равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$ (рис. 1, в).
- ④ **КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ**. Раскрывая условие по перемещению $\Delta_1 = 0$, получаем каноническое уравнение в виде:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} и Δ_{1F} – это коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от единичного ее значения и заданной внешней нагрузки соответственно.

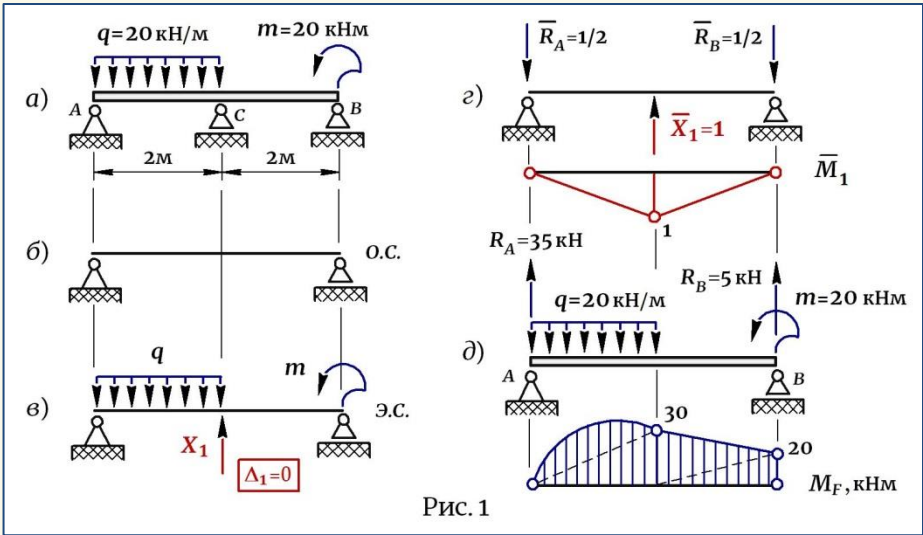


Рис. 1

5) Определяем коэффициенты канонического уравнения. Так как суть коэффициентов – перемещения, определяем их методом перемножения эпюр. Для этого поочередно прикладываем к основной системе сначала единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 1, з), а затем внешнюю нагрузку (рис. 1, д), определяем от этих сил реакции опор и строим эпюры изгибающих моментов – *единичную* и *грузовую*, после чего перемножаем их соответствующим образом:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \times 2 = \frac{4}{3EI_x};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -\frac{160}{3EI_x}.$$

6) Подставляем коэффициенты в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 :

$$\frac{4}{3EI_x} X_1 - \frac{160}{3EI_x} = 0 \rightarrow X_1 = 40 \text{ кН}.$$

⑦ Возвращаемся к исходной балке. Определяем остальные реакции опор (рис. 2, а) и строим окончательные эпюры (рис. 2, б, в):

$$\sum M_A = 0: m + R_C \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 4 = 0 \rightarrow R_B = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: m + q \cdot 2 \cdot 3 - R_A \cdot 4 - R_C \cdot 2 = 0 \rightarrow R_A = 15 \text{ кН}.$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_A - R_B + R_C - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 15 - 15 + 40 - 20 \cdot 2 = 0$.

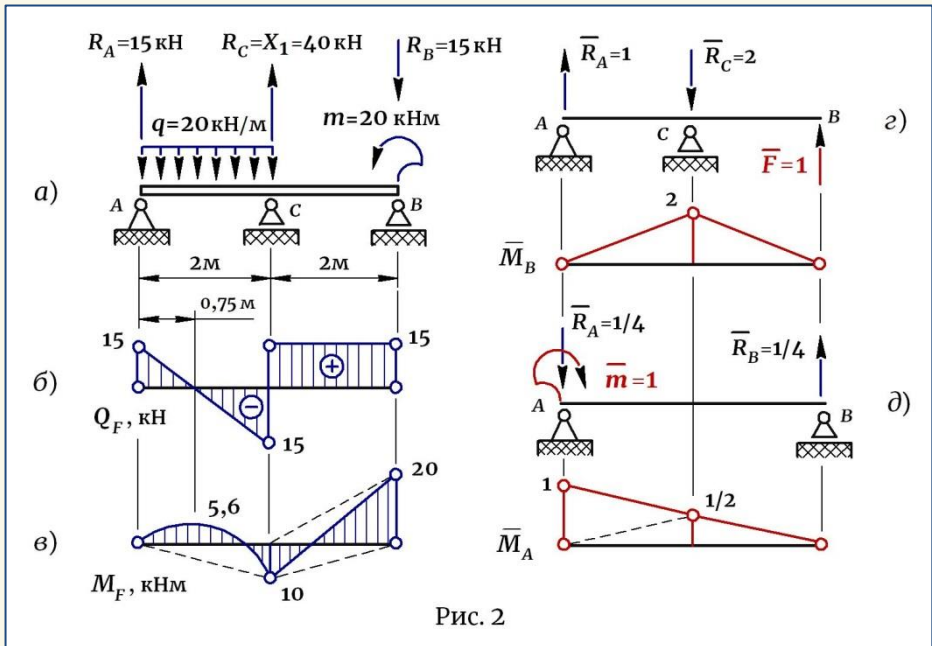


Рис. 2

⑧ Выполняем ПРОВЕРКУ. Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что по направлению любой отброшенной связи перемещение равно нулю.

Примечание.

Для проверки предпочтительнее выбирать какой-либо другой вариант основной системы, а не тот, на котором выполнялось решение.

Поэтому сейчас в качестве лишней связи рассмотрим опорную связь на опоре B , отбросим ее и докажем, что прогиб этого сечения равен нулю, т.е. $y_B = 0$. Для этого прикладываем в точке B единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 2, г), строим единичную эпюру моментов \bar{M}_B и перемножаем с грузовой эпюрой M_F (рис. 2, в):

$$y_B = 0 : y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{40}{3} - \frac{40}{3} + \frac{40}{3} - \frac{40}{3} \right) = 0.$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

① Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^6}{160} = 125 \text{ см}^3.$$

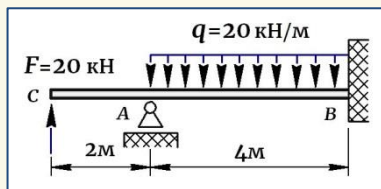
Из таблиц сортамента подбираем двутавр №18, для которого $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $W_x = 143 \text{ см}^3$, $I_x = 1290 \text{ см}^4$.

② Определяем УГОЛ ПОВОРОТА сечения А. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, исключая также как внешнюю силу реакцию, например, на опоре С, прикладываем в сечении А единичный момент $\bar{m} = 1$ (рис. 2, д), строим единичную эпюру моментов \bar{M}_A и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (рис. 2, в):

$$\Theta_A = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_A) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1+1/2}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{3,33 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 1290 \cdot 10^4} = 0,0013 \text{ рад} \approx 0,07^\circ.$$

Задача 11

Раскрыть статическую неопределимость балки, построить окончательные эпюры, сделать проверку. Подобрать для балки сечение в виде двух рядом стоящих швеллеров, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Определить прогиб и угол поворота конца консоли С.

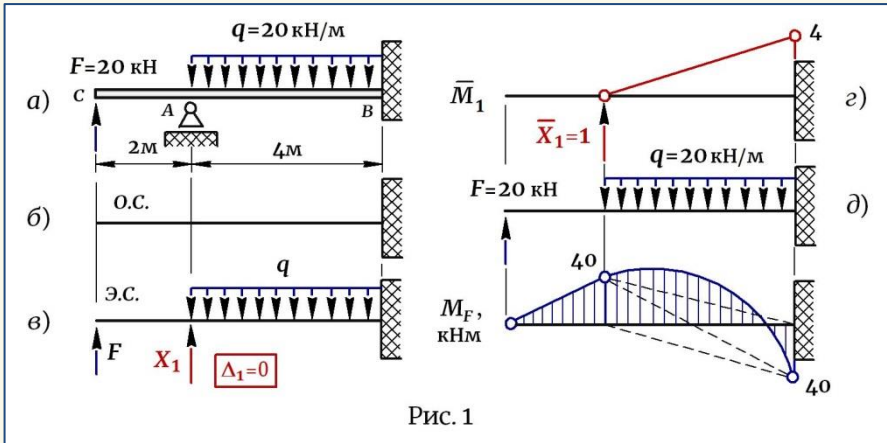


РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка является *один раз статически неопределимой*, так как здесь возникают четыре реакции опор, но для плоских систем можно составить только три уравнения равновесия (рис. 1, а).

② Выбираем основную систему. Согласно методу сил отбрасываем одну лишнюю связь, например, опору A , и получаем основную систему в виде (рис. 1, б).



③ Создаем эквивалентную систему. Для этого загружаем *основную систему* заданной внешней нагрузкой, а в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 (пока неизвестную) и задаем условие, что перемещение по направлению этой силы равно нулю, т.е. $\Delta_1 = 0$ (рис. 1, в).

④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Раскрывая условие по перемещению $\Delta_1 = 0$, получаем каноническое уравнение в виде:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} и Δ_{1F} – это коэффициенты канонического уравнения, представляющие собой перемещения по направлению силы X_1 от единичного ее значения и заданной внешней нагрузки соответственно.

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения. Так как суть коэффициентов – перемещения, определяем их по методу Верещагина. Для этого поочередно прикладываем к основной системе сначала единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 1, г), затем внешнюю нагрузку (рис. 1, д) и строим эпюры изгибающих моментов – *единичную* и *грузовую*, после чего перемножаем их соответствующим образом:

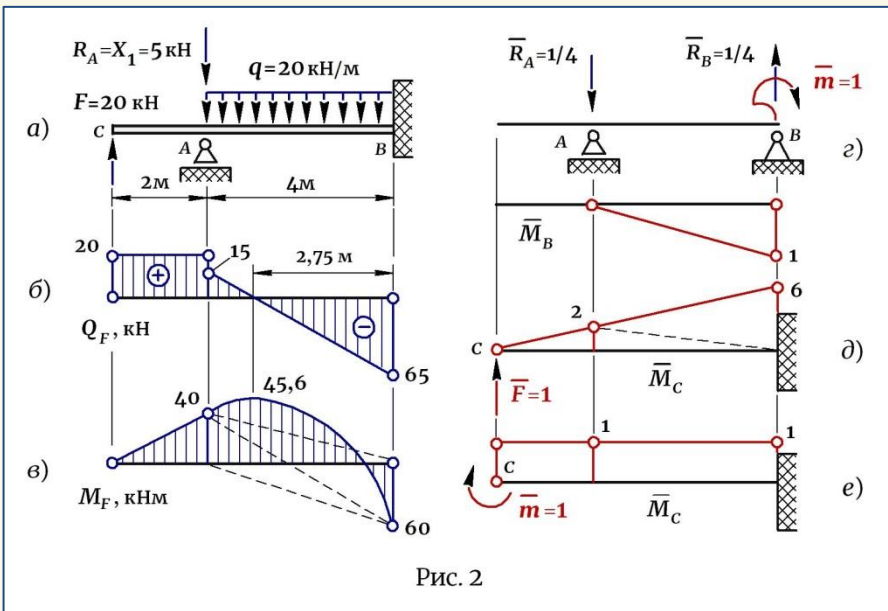
$$\boxed{\delta_{11}} = \frac{1}{EI_x} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{64}{3EI_x};$$

$$\boxed{\Delta_{1F}} = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{320}{3EI_x}.$$

⑥ Подставляем коэффициенты в каноническое уравнение, решаем его и определяем силу X_1 :

$$\frac{64}{3EI_x} X_1 + \frac{320}{3EI_x} = 0 \rightarrow \boxed{X_1 = -5 \text{ кН}}.$$

⑦ Возвращаемся к исходной балке. Сила X_1 , являющаяся реакцией на опоре А, получилась отрицательной, значит, R_A будет направлена в сторону, обратную направлению X_1 (рис. 2, а), т.е. вниз. Двигаясь от свободного конца консоли, строим на балке окончательные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 2, б, в):



⑧ Выполняем ПРОВЕРКУ. Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что по направлению любой отброшенной связи перемещение равно нулю. Отбросим в качестве лишней связи момент в заземлении, т.е. заменим жесткую заделку на шарнирно-неподвижную опору, и докажем, что угол поворота на опоре В равен нулю. Для это-

го прикладываем здесь единичный момент $\bar{m}=1$ (рис. 2, з), находим реакции - $\bar{R}_A = \bar{R}_B = \bar{m}/4 = 1/4$, строим единичную эпюру и перемножаем ее с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 2, в):

$$\boxed{\Theta_B = 0} : \Theta_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{640}{3} + \frac{320}{3} - \frac{960}{3} \right) = 0.$$

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

① Из условия прочности подбираем для балки сечение в виде двух рядом стоящих швеллеров, для которого $I_{н.о.} = 2I_x$ и $W_{н.о.} = 2W_x$, где I_x и W_x – момент инерции и момент сопротивления одного швеллера соответственно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{н.о.}} = \frac{M_{\max}}{2W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^6}{2 \cdot 160} = 187,5 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем швеллер №22, для которого $W_x = 192 \text{ см}^3$, $I_x = 2110 \text{ см}^4$, $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$.

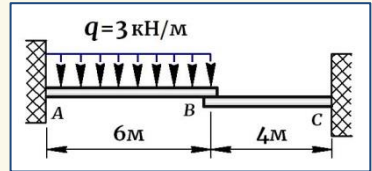
② Определяем ПРОГИБ и УГОЛ ПОВОРОТА конца консоли С. Для этого рассматриваем балку без внешней нагрузки, исключая также реакцию R_A , прикладываем в сечении С единичные силу $\bar{F}=1$ (рис. 2, д) и момент $\bar{m}=1$ (рис. 2, е), строим соответствующие единичные эпюры и перемножаем их с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 2, в):

$$\boxed{y_C} = \frac{1}{EI_{н.о.}} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{E \cdot 2I_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{2+6}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \times \right. \\ \left. \times 40 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 60 \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{186,67 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^4} = 22,1 \text{ мм};$$

$$\boxed{\Theta_C} = \frac{1}{EI_{н.о.}} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{E \cdot 2I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 40 \cdot 1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 60 \cdot 1 \right) = \frac{106,67 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 2110 \cdot 10^4} = 0,0126 \text{ рад} \approx 0,72^\circ.$$

Задача 12

Балка AB круглого поперечного сечения диаметром $d=18$ см и длиной $\ell_{AB}=6$ м одним концом заделана в заделке, а другим опирается на конец консольной балки BC , имеющей длину $\ell_{BC}=4$ м и квадратное сечение размером $a=12$ см. Обе балки выполнены из одинакового материала ($E_{AB}=E_{BC}=E$). Определить в балках максимальные напряжения.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка AB , на которой возникают четыре реакции опор (три в заделке и одна в точке B – на конце консоли балки BC), является *одним раз статически неопределимой* (рис. 1, а). Выполняем решение по МЕТОДУ СИЛ, учитывая деформируемость правой опоры, т.е. изгиб балки BC .

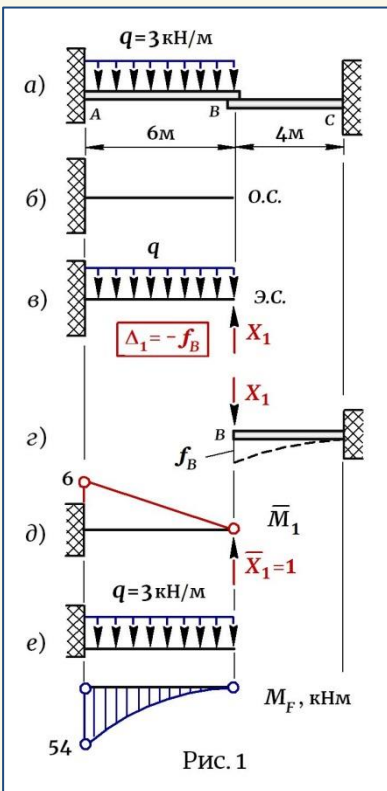


Рис. 1

② Выбираем основную систему. В качестве лишней связи убираем опорную балку BC и получаем консольную балку с заделкой (рис. 1, б).

③ Создаем эквивалентную систему. Для этого загружаем балку AB заданной внешней нагрузкой, в направлении отброшенной связи прикладываем силу X_1 (пока неизвестную) и задаем условие, что перемещение Δ_1 по направлению этой силы равно деформации упругой опоры в точке B (рис. 1, в), т.е.

$$\Delta_1 = -f_B, \quad (1)$$

где f_B – прогиб опорной балки на конце консоли. Так как направление силы X_1 в балке AB выбрано вверх, а перемещение точки произойдет вниз, в правой части выражения (1) следует ставить знак «минус».

④ КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА СИЛ. Учитывая, что балка BC изгибается от действия такой же силы X_1 (рис. 1, z), ее прогиб на конце консоли может быть определен по формуле:

$$f_B = \frac{X_1 \ell_{BC}^3}{3EI_{BC}}. \quad (2)$$

Принимая также –

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F}, \quad (3)$$

на основании (1) КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ принимает вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = -\frac{X_1 \ell_{BC}^3}{3EI_{BC}}. \quad (4)$$

⑤ Определяем КОЭФФИЦИЕНТЫ канонического уравнения (4). Для этого к основной системе балки AB поочередно прикладываем единичную силу $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 1, δ), затем заданную внешнюю нагрузку (рис. 1, e), строим *единичную* и *грузовую* эпюры моментов и перемножаем их соответствующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \boxed{\delta_{11}} &= \frac{1}{EI_{AB}} (\bar{M}_1 \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_{AB}} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \frac{72}{EI_{AB}}; \\ \boxed{\Delta_{1F}} &= \frac{1}{EI_{AB}} (M_F \bar{M}_1) = \frac{1}{EI_{AB}} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6^2}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 \right) = -\frac{486}{EI_{AB}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Вычисляем геометрические характеристики сечений балок AB и BC , необходимые для дальнейшего решения задачи:

$$\left[\begin{aligned} I_{AB} &= \pi d^4 / 64 = 3,14 \cdot 18^4 / 64 = 5150,4 \text{ см}^4; \\ I_{BC} &= a^4 / 12 = 12^4 / 12 = 1728 \text{ см}^4. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left[\begin{aligned} W_{AB} &= \pi d^3 / 32 = 3,14 \cdot 18^3 / 32 = 572,3 \text{ см}^3; \\ W_{BC} &= a^3 / 6 = 12^3 / 6 = 288 \text{ см}^3. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Подставляем коэффициенты (5) и выражение (2) в уравнение (4) и с учетом значений (6) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{72}{EI_{AB}} X_1 - \frac{486}{EI_{AB}} &= -\frac{X_1 \ell_{BC}^3}{3EI_{BC}} \rightarrow \\ \frac{72 \cdot 10^9 \cdot X_1 \cdot 10^3}{E \cdot 5150,4 \cdot 10^4} + \frac{X_1 \cdot 10^3 (4 \cdot 10^3)^3}{3E \cdot 1728 \cdot 10^4} &= \frac{486 \cdot 10^{12}}{E \cdot 5150,4 \cdot 10^4} \rightarrow \end{aligned}$$

$$13,98X_1 + 12,35X_1 = 94,36 \rightarrow \boxed{X_1 = 3,58 \text{ кН}}$$

⑥ Возвращаемся к исходной конструкции (рис. 2, а) и для расчетной схемы балки АВ (рис. 2, б) строим окончательную эпюру моментов (рис. 2, в).

⑦ ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА. Суть проверки заключается в том, что нужно доказать, что прогиб точки В в балке АВ равен прогибу конца консоли опорной балки ВС, т.е. $y_B = f_B$, где согласно формуле (2) с учетом значений (6) –

$$f_B = \frac{X_1 \ell_{BC}^3}{3EI_{BC}} = \frac{3,58 \cdot 10^3 (4 \cdot 10^3)^3}{3E \cdot 1728 \cdot 10^4} = \frac{0,044 \cdot 10^8}{E} \text{ (мм)}. \quad (8)$$

Для определения прогиба y_B на балке АВ прикладываем в точке В единичную силу $\bar{F}=1$, строим единичную эпюру моментов (рис. 2, г) и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (рис. 2, в):

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{1}{EI_{AB}} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_{AB}} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 32,52 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) = \frac{228,24 \cdot 10^{12}}{E \cdot 5150,4 \cdot 10^4} = \\ &= \frac{0,044 \cdot 10^8}{E} \text{ (мм)}, \end{aligned}$$

что соответствует значению прогиба f_B , вычисленного по формуле (8).

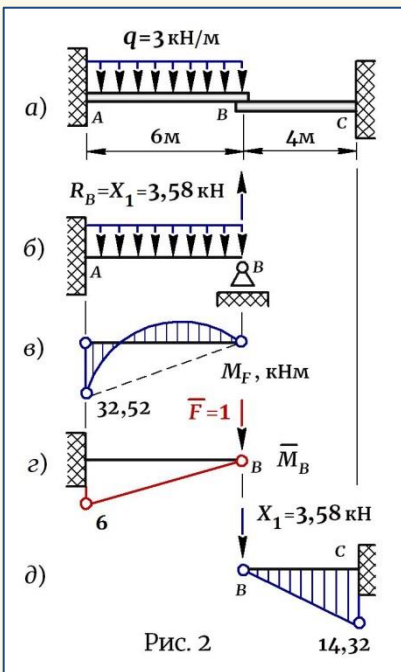


Рис. 2

II. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

① Максимальные напряжения в балке АВ согласно эпюре (рис. 2, в) и с учетом значения (7) равны:

$$\sigma_{\max(AB)} = \frac{M_{\max}}{W_{AB}} = \frac{32,52 \cdot 10^6}{572,3 \cdot 10^3} = 56,8 \text{ МПа}.$$

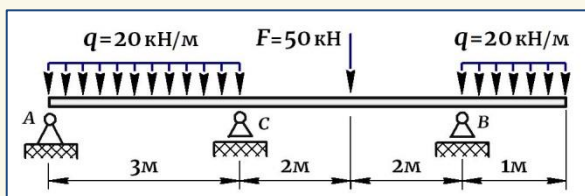
② Максимальные напряжения на балке BC согласно эпюре моментов (рис. 2, д) и с учетом значения (7) равны:

$$\sigma_{\max(BC)} = \frac{M_{\max}}{W_{BC}} = \frac{14,32 \cdot 10^6}{288 \cdot 10^3} = 49,7 \text{ МПа.}$$

Раскрытие статической неопределенности с помощью УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Задача 13

С помощью «уравнения трех моментов» раскрыть статическую неопределенность балки, определить опорные моменты и реакции опор, построить окончательные эпюры и сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка *один раз статически неопределима* (рис. 1, а), так как на ней возникают четыре реакции опор, а уравнений равновесия для плоской системы можно составить только три.

② Создаем ПРИВЕДЕННУЮ СИСТЕМУ. Для выполнения решения с использованием «уравнения трех моментов» балку необходимо привести к соответствующему виду:

- ★ если на балке есть **консоль** (слева или справа), ее нужно убрать и нагрузку с консоли перенести на ближайшую опору;

- ★ если на балке есть **заделка** (слева или справа), ее также нужно убрать и ввести условный фиктивный пролет.

Таким образом, балка приводится к виду многопролетной балки (без консолей и заделки) и называется ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА.

В заданной балке (рис. 1, а), имеющей консоль справа, переносим распределенную нагрузку на опору B и получаем на опоре силу $(q \cdot 1\text{м}) = 20 \text{ кН}$ и момент $m_{np} = (q \cdot 1 \cdot 0,5) = 10 \text{ кНм}$ (рис. 1, б).

③ Создаем основную систему. Для решения балки применяем МЕТОД СИЛ, однако теперь в качестве лишней связи отбрасываем связь внутреннюю путем установки на балке промежуточного шарнира. Считая крайние опоры A и B необходимыми для обеспечения кинематической неподвижности балки, шарнир устанавливаем над «*лишней*» опорой C (рис. 1, в). Так как через шарнир изгибающий момент не передается, такая установка шарнира позволяет разбить балку на две независимые однопролетные балки и решение выполнять с каждой из них в отдельности. Полученная балка с шарниром становится статически определимой и называется ОСНОВНАЯ СИСТЕМА. На основной системе *слева направо* указываем нумерацию опор и пролетов (рис. 1, в): опоры нумеруются с нуля, пролеты – с единицы.

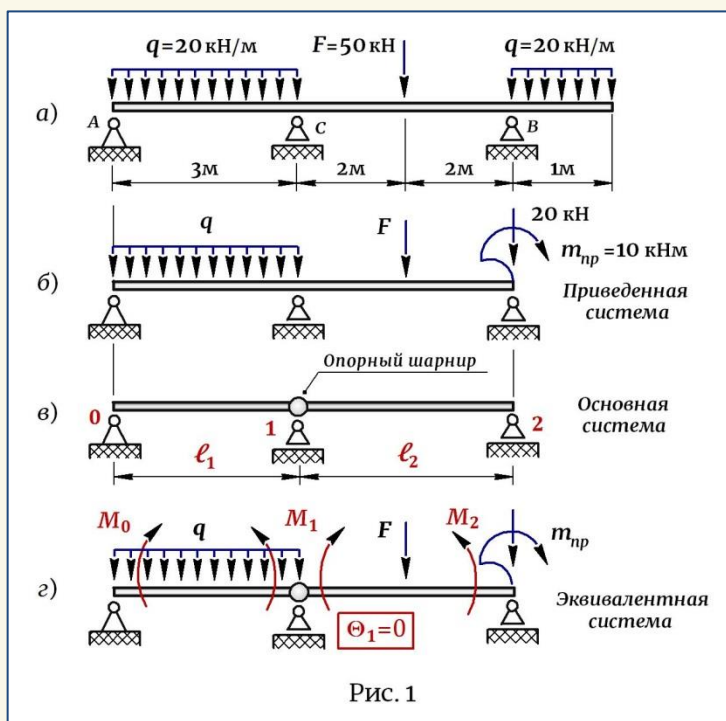


Рис. 1

④ Создаем эквивалентную систему. Чтобы основная система по условиям работы соответствовала исходной балке, загружаем пролеты заданной нагрузкой (не забывая про нагрузку, перенесенную с консоли), а в направлении отброшенной внутренней связи прикладываем момент M_1 , а также прикладываем моменты на крайних опорах M_0 и M_2 в соответствии с их номерами, и задаем условие, что сум-

марный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, равен нулю, т.е. $\Theta_1 = 0$ (рис. 1, з).

⑤ Записываем для балки УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ, которое является раскрытым выражением условия $\Theta_1 = 0$, и решаем его относительно момента M_1 :

$$M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right), \quad (1)$$

где $\ell_1 = 3\text{ м}$, $\ell_2 = 4\text{ м}$ – длины пролетов; моменты M_0 и M_2 равны внешним моментам, приложенным на соответствующих опорах, и для данной балки $M_0 = 0$ и $M_2 = m_{np} = -10\text{ кНм}$ («минус» указывает, что моменты M_2 и m_{np} имеют противоположное направление) (рис. 1, з); ω_1 и ω_2 – площади эпюр изгибающих моментов на соответствующих пролетах; a_1 и b_2 – это расстояния от центра тяжести эпюр на пролетах соответственно – "а" – до левой опоры, "b" – до правой опоры.

Вычисляем правую часть уравнения (1). Для этого рассматриваем каждый пролет в отдельности, строим на нем эпюру моментов и вычисляем значения $\omega_1 a_1$ и $\omega_2 b_2$ (рис.2, а, б):

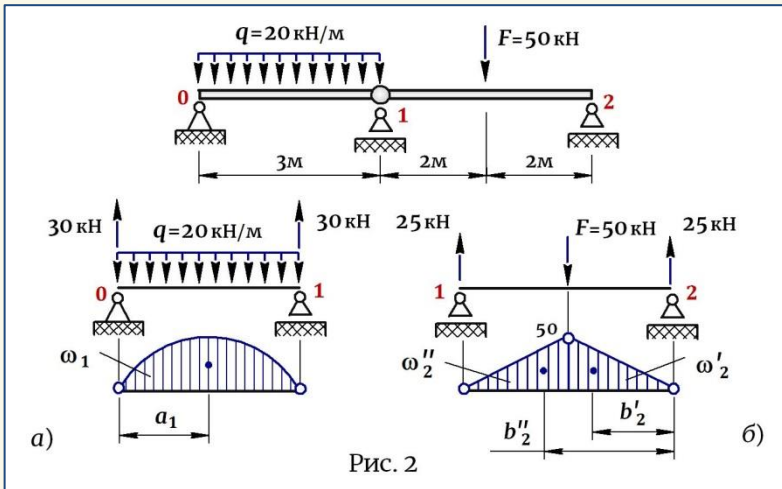


Рис. 2

$$\omega_1 a_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot 1,5 = 67,5\text{ кНм}^3;$$

$$\omega_2 b_2 = \omega'_2 b'_2 + \omega''_2 b''_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 50 \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = 200\text{ кНм}^3.$$

Примечание.

★ При построении эпюры на пролете ℓ_2 (рис. 2, б) силу и момент на опоре 2, полученные при переносе нагрузки с консоли, учитывать не надо. Сила, приложенная на опоре, не влияет на вид эпюры моментов, так как она алгебраически суммируется с реакцией на этой опоре и в результате опорная реакция принимает значение, как если бы оно было вычислено без учета этой силы. Что касается момента m_{np} , он должен учитываться в уравнении (1) только один раз – либо в левой части как момент $m_{np} = M_2$ (что и было сделано), и тогда его не надо прикладывать на опоре 2 и повторно учитывать в площади ω_2 , либо в правой части уравнения (1), приложив m_{np} на опоре 2 и построив с его участием эпюру. В этом случае он будет учтен в площади ω_2 , но тогда следует принять $M_2 = 0$.

★ Если на пролете два и более участков, эпюру следует разбивать на участки, для каждого участка вычислять площадь, определять на этой площади положение центра тяжести и расстояние до левой или до правой опоры, согласно условию задачи.

★ Если эпюра лежит сверху оси балки, ее площадь считается положительной, если ниже оси – отрицательной, и ее в расчеты следует подставлять со знаком «минус».

Подставляем значения –

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0; & \ell_1 &= 3\text{ м}; & \omega_1 a_1 &= 67,5 \text{ кНм}^3; \\ M_2 &= -10 \text{ кНм}; & \ell_2 &= 4\text{ м}; & \omega_2 b_2 &= 200 \text{ кНм}^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в уравнение (1), решаем его и определяем опорный момент M_1 :

$$2M_1(3+4) - 10 \cdot 4 = -6 \left(\frac{67,5}{3} + \frac{200}{4} \right) \rightarrow \boxed{M_1 = -28,2 \text{ кНм}}$$

Знак «минус» означает, что момент M_1 имеет направление, обратное направлению, заданному в эквивалентной системе (рис. 1, з).

⑥ Определяем РЕАКЦИИ ОПОР на пролетах. Для этого рассматриваем каждый пролет в отдельности (консоль на втором пролете можно вернуть) и, приложив к пролету заданную нагрузку, а также опорный момент M_1 в установленном направлении, вычисляем опорные реакции (рис. 3) –

★ Левый пролет (рис. 3, а):

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= 0: & -q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_1 + R_{11} \cdot 3 &= 0 \rightarrow \\ & -20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 28,2 + R_{11} \cdot 3 &= 0 \rightarrow \boxed{R_{11} = 39,4 \text{ кН}}; \end{aligned}$$

$$\sum M_1 = 0: q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_1 - R_{01} \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$20 \cdot 3 \cdot 1,5 - 28,2 - R_{01} \cdot 3 = 0 \rightarrow \boxed{R_{01} = 20,6 \text{ кН}} .$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_{01} + R_{11} - q \cdot 3 = 0 \rightarrow 20,6 + 39,4 - 20 \cdot 3 = 0.$

★ Правый пролет (рис. 3, б):

$$\sum M_1 = 0: M_1 + R_{22} \cdot 4 - F \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 4,5 = 0 \rightarrow$$

$$28,2 + R_{22} \cdot 4 - 50 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 4,5 = 0 \rightarrow \boxed{R_{22} = 40,45 \text{ кН}} ;$$

$$\sum M_2 = 0: M_1 - R_{12} \cdot 4 + F \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow$$

$$28,2 - R_{12} \cdot 4 + 50 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow \boxed{R_{12} = 29,55 \text{ кН}} .$$

Проверка -

$$\sum Y = 0: R_{12} + R_{22} - F - q \cdot 1 = 0 \rightarrow 29,55 + 40,45 - 50 - 20 \cdot 1 = 0.$$

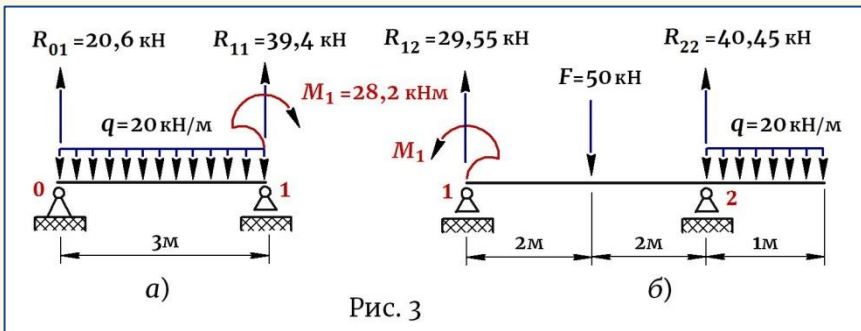


Рис. 3

⑦ Возвращаемся к исходной балке (рис. 1, а) и записываем для нее окончательные реакции опор с индексом соответствующей опоры. Учитывая, что опора 1 принадлежит левому и правому пролетам (рис. 3, а, б), реакция на ней определяется как алгебраическая сумма реакций на этих пролетах:

$$R_A = R_{01} = 20,6 \text{ кН}; \quad R_B = R_{22} = 40,45 \text{ кН};$$

$$R_C = R_1 = R_{11} + R_{12} = 39,4 + 29,55 = 68,95 \text{ кН}.$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_A + R_B + R_C - F - q \cdot 3 - q \cdot 1 = 0 \rightarrow$

$$20,6 + 40,45 + 68,95 - 50 - 20 \cdot 3 - 20 \cdot 1 = 0 \rightarrow 130 - 130 = 0.$$

Указываем на балке реакции опор (рис. 4, а) и строим эпюры поперечных сил (рис. 4, б) и изгибающих моментов (рис. 4, в).

⑧ Выполняем окончательную проверку. Для этого докажем, что угол поворота на шарнире С равен нулю, т.е. $\Theta_C = 0$. Прикладываем в

месте установки шарнира единичный момент $\bar{m} = 1$ (рис. 4, з), строим единичную эпюру \bar{M}_C и перемножаем ее с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 4, в):

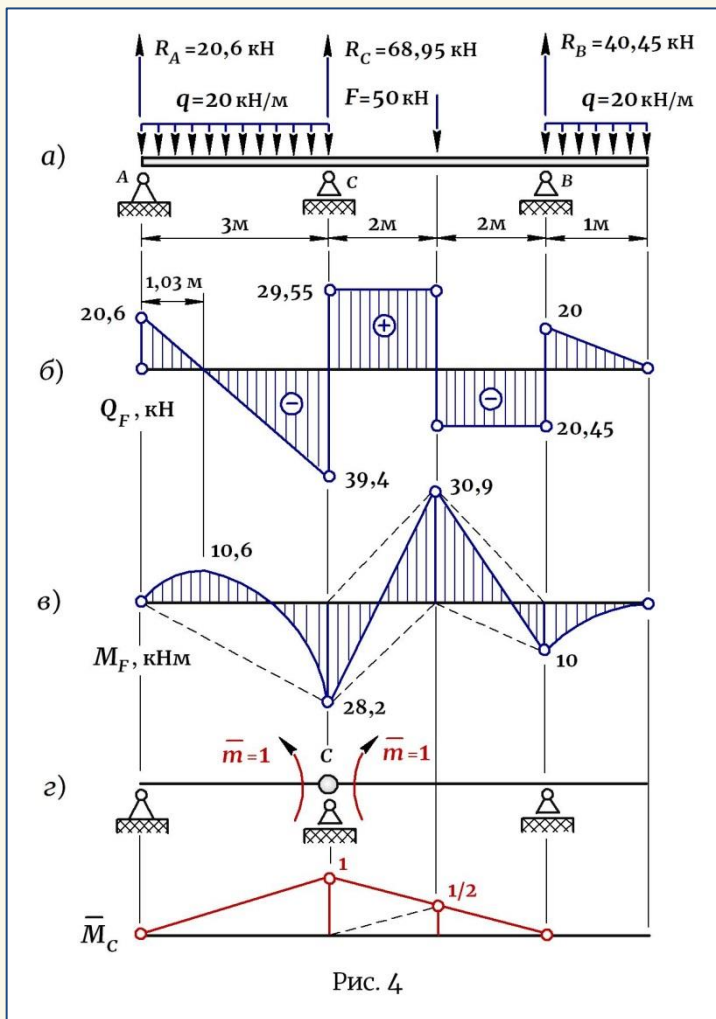


Рис. 4

$$\boxed{\Theta_C = 0} : \Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 28,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30,9 \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 28,2 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30,9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \times \right.$$

$$\times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \Big] = \frac{1}{EI_x} (22,5 - 28,2 + 20,6 - 24 + 10,3 - 1,67) = \frac{53,4 - 53,87}{EI_x} = -\frac{0,47}{EI_x}.$$

Погрешность: $\frac{|0,47|}{53,4} \cdot 100\% = 0,88\%$, что допустимо.

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

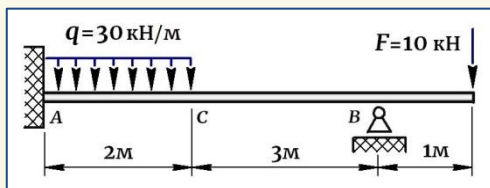
Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{30,9 \cdot 10^6}{160} = 193,125 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №22 — $W_x = 232 \text{ см}^3$.

Задача 14

С помощью «уравнения трех моментов» раскрыть статическую неопределимость неразрезной балки, определить опорные моменты и реакции опор, построить окончательные эпюры и сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, и определить прогиб сечения С.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка *один раз статически неопределима* (рис. 1, а), так как на ней возникают четыре реакции опор, а уравнений равновесия для плоской системы можно составить только три.

② Создаем ПРИВЕДЕННУЮ СИСТЕМУ, т.е. приводим балку к виду двухпролетной балки (рис. 1, б). Для этого убираем консоль справа и переносим силу F на ближайшую опору, в результате на опоре В получаем силу $F = 20 \text{ кН}$ и момент $m_{np} = (F \cdot 1\text{м}) = 10 \text{ кНм}$. Убираем заделку слева и вводим условный фиктивный пролет.

③ Создаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ. На приведенной балке (рис. 1, б), считая крайние опоры D и B необходимыми для обеспечения кинематиче-

ской неподвижности, шарнир устанавливаем над промежуточной опорой A , в результате чего балка становится статически определимой и называется **ОСНОВНАЯ СИСТЕМА**. На **ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ** слева направо указываем нумерацию опор и пролетов: опоры нумеруем с нуля, пролеты – с единицы (рис. 1, в).

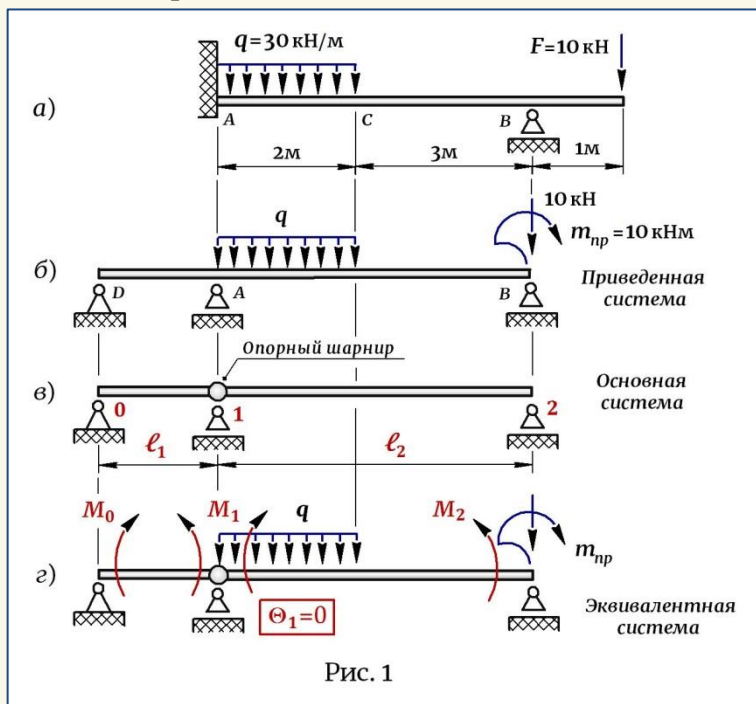


Рис. 1

④ Создаем эквивалентную систему. Загружаем пролеты заданной нагрузкой (не забывая про нагрузку, перенесенную с консоли), в направлении отброшенной внутренней связи прикладываем момент M_1 , а также моменты на крайних опорах M_0 и M_2 в соответствии с их номерами, и задаем условие, что суммарный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, равен нулю, т.е. $\Theta_1 = 0$ (рис. 1, г).

⑤ Записываем для балки уравнение трех моментов и решаем его относительно момента M_1 :

$$M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right), \quad (1)$$

где l_1 и l_2 – длины пролетов, равные $l_1 = 0$ (длина несуществующего пролета) и $l_2 = 5 \text{ м}$; моменты M_0 и M_2 равны внешним моментам,

приложенным на соответствующих опорах, и для данной балки $M_0 = 0$ и $M_2 = m_{np} = -10$ кНм, где знак «минус» указывает, что моменты M_2 и m_{np} имеют обратное направление) (рис. 1, з); ω_1 и ω_2 – площади эпюр изгибающих моментов на соответствующих пролетах, при этом на фиктивном пролете $\omega_1 = 0$; a_1 и b_2 – это расстояния от центра тяжести эпюр на пролетах соответственно – "а" – до левой опоры, "b" – до правой опоры.

Вычисляем правую часть уравнения (1). Так как на несуществующем (фиктивном) пролете $\omega_1 a_1 = 0$, рассматриваем только пролет l_2 , определяем реакции опор, строим эпюру моментов и вычисляем $\omega_2 b_2$ (рис. 2):

$$\begin{aligned} \boxed{\omega_2 b_2} &= \omega'_2 b'_2 + \omega''_2 b''_2 + \omega'''_2 b'''_2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 36 \left(3 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \\ &+ \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = 320 \text{ кНм}^3. \end{aligned}$$

Подставляем значения –

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0; & l_1 &= 0; & \omega_1 a_1 &= 0; \\ M_2 &= -10 \text{ кНм}; & l_2 &= 5 \text{ м}; & \omega_2 b_2 &= 320 \text{ кНм}^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в уравнение (1), решаем его и определяем опорный момент M_1 :

$$2M_1(0+5) - 10 \cdot 5 = -6 \left(0 + \frac{320}{5} \right) \rightarrow \boxed{M_1 = -33,4 \text{ кНм}} -$$

где знак «минус» говорит о том, что момент M_1 имеет направление, обратное направлению, заданному на Э.С. (рис. 1, з).

⑥ Определяем РЕАКЦИИ ОПОР на пролетах. Так как пролета l_1 не существует, он введен в расчет формально, поэтому рассматриваем только пролет l_2 (консоль справа можно вернуть), прикладываем к пролету заданную нагрузку, а также опорный момент M_1 в установленном направлении, учитывая, что он получился отрицательным, и вычисляем реакции опор (рис. 3) –

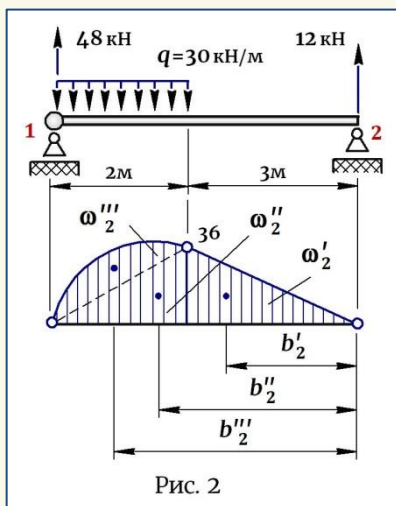
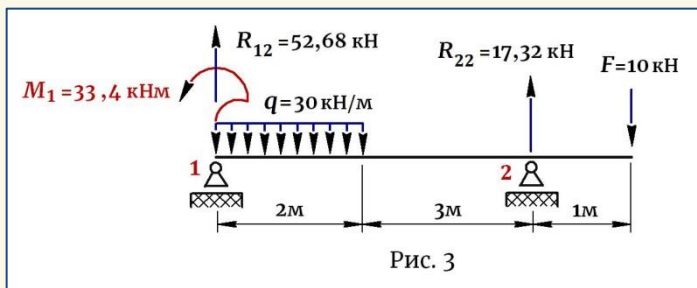


Рис. 2



$$\sum M_1 = 0: M_1 + R_{22} \cdot 5 - q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 6 = 0 \rightarrow$$

$$33,4 + R_{22} \cdot 5 - 30 \cdot 2 \cdot 1 - 10 \cdot 6 = 0 \rightarrow R_{22} = 17,32 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0: M_1 + q \cdot 2 \cdot 4 - R_{12} \cdot 5 - F \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$33,4 + 30 \cdot 2 \cdot 4 - R_{12} \cdot 5 - 10 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{12} = 52,68 \text{ кН}.$$

Проверка -

$$\sum Y = 0: R_{12} + R_{22} - F - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 52,68 + 17,32 - 10 - 30 \cdot 2 = 0.$$

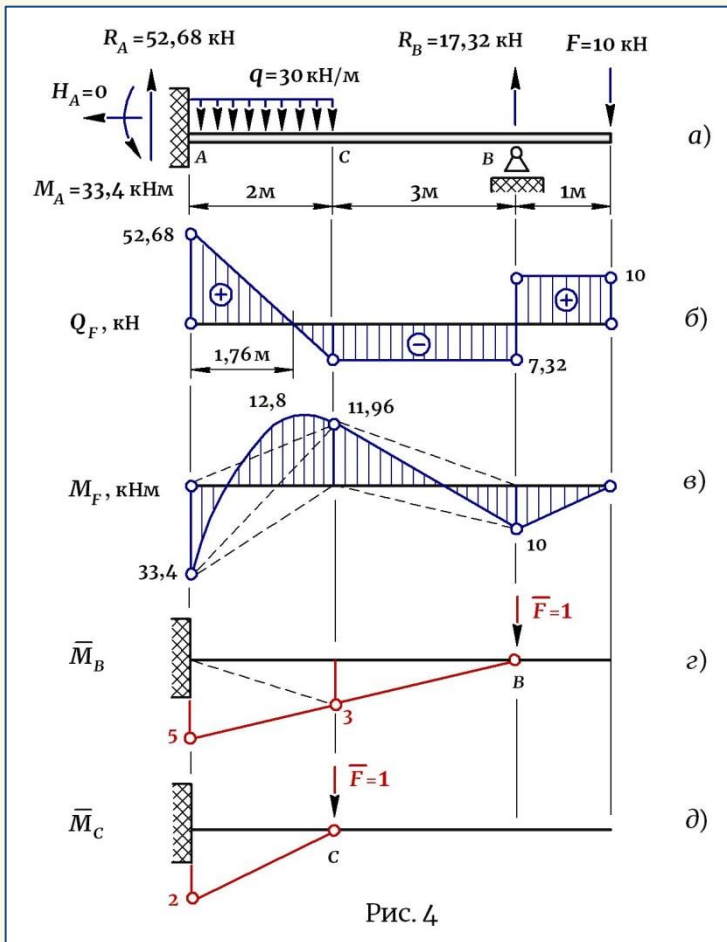
⑦ Возвращаемся к исходной балке (рис. 1, а) и записываем для нее окончательные реакции опор с индексом соответствующей опоры. Учитывая, что M_1 и R_{12} являются реакциями в заделке, получаем:

$$M_A = M_1 = 33,4 \text{ кНм}; R_A = R_{12} = 52,68 \text{ кН}; R_B = R_{22} = 17,32 \text{ кН}.$$

Указываем на балке реакции опор (рис. 4, а) и строим эпюры поперечных сил (рис. 4, б) и изгибающих моментов (рис. 4, в).

⑧ Выполняем ОКОНЧАТЕЛЬНУЮ ПРОВЕРКУ. Для этого докажем, что прогиб на опоре В равен нулю, т.е. $y_B = 0$. Для определения этого прогиба прикладываем в месте установки опоры единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 4, з), строим единичную эпюру \bar{M}_B и перемножаем ее с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 4, в):

$$\boxed{y_B = 0}: y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 33,4 \left(\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 5 \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{8} \times \right. \\ \left. \times 2 \cdot \frac{5+3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11,96 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 11,96 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right] = \\ = \frac{144,73 - 80 - 43,85 - 35,88 + 15}{EI_x} = \frac{159,73 - 159,73}{EI_x} = 0.$$



II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

① Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{33,4 \cdot 10^6}{160} = 208,75 \text{ см}^3.$$

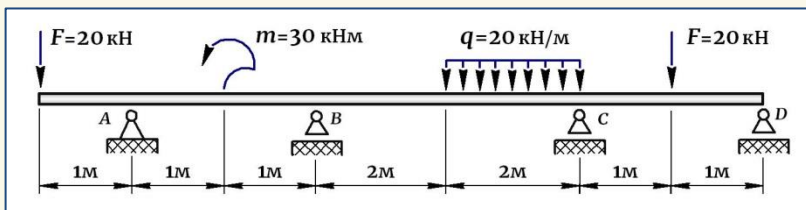
Из таблиц сортамента подбираем двутавр №22, для которого $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$, $W_x = 232 \text{ см}^3$, $I_x = 2550 \text{ см}^4$.

② Определяем прогиб сечения C: прикладываем в заданной точке единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 4, д), строим единичную эпюру \bar{M}_C и перемножаем ее с грузовой эпюрой M_F (рис. 4, в):

$$y_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 11,96 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 33,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{16,56 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2550 \cdot 10^4} = 3,2 \text{ мм.}$$

Задача 15

С помощью «уравнения трех моментов» раскрыть статическую неопределенность неразрезной балки, определить опорные моменты и реакции опор, построить окончательные эпюры и сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

- ① Балка дважды статически неопределима (рис. 1, а), так как на ней возникают пять реакций опор, а уравнений равновесия для плоской системы можно составить только три.
- ② Создаем ПРИВЕДЕННУЮ СИСТЕМУ. Для этого на балке убираем консоль слева, нагрузку с консоли переносим на ближайшую опору А (рис. 1, б) и получаем на опоре силу и момент, равные $F = 20 \text{ кН}$ $m_{пр} = (F \cdot 1\text{м}) = 20 \text{ кНм}$.
- ③ Создаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ. Отбрасываем на балке две лишние внутренние связи путем установки двух промежуточных шарниров. Считая крайние опоры А и D необходимыми для обеспечения кинематической неподвижности балки, шарниры устанавливаем над «лишними» опорами В и С (рис. 1, в), разбивая таким образом балку на три однопролетные балки. Получаем статически определимую балку, называемую ОСНОВНОЙ СИСТЕМОЙ. На ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ слева направо производим нумерацию опор и пролетов (рис. 1, в): опоры нумеруются с нуля, пролеты – с единицы.

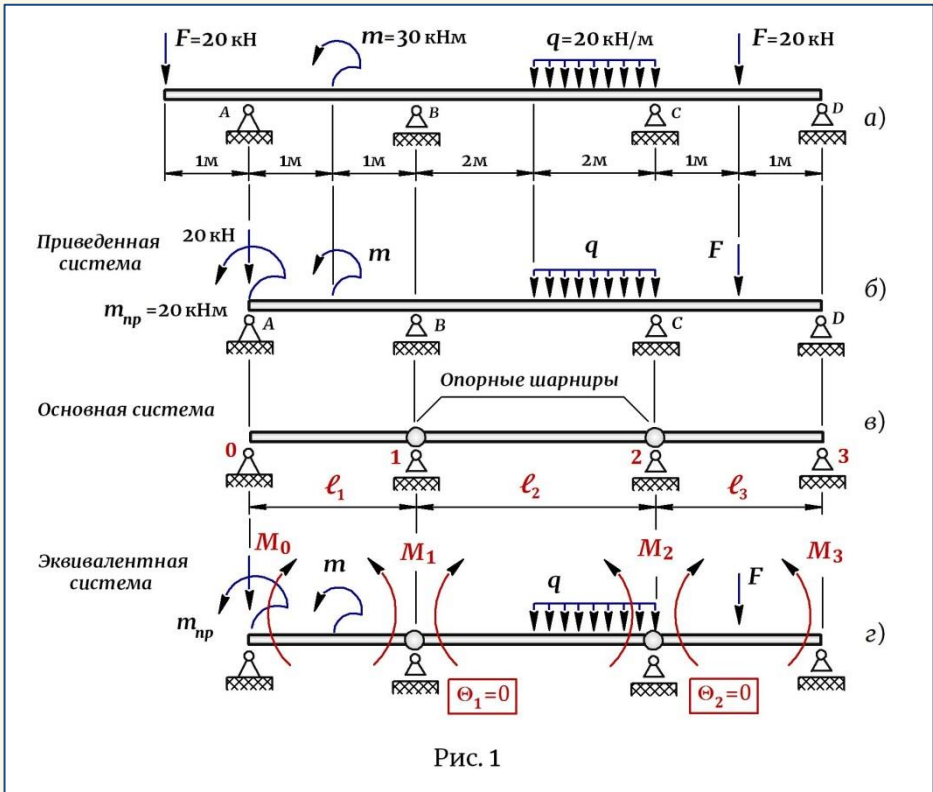


Рис. 1

④ Создаем эквивалентную систему. Чтобы основная система по условиям работы соответствовала исходной балке, загружаем пролеты заданной нагрузкой (не забывая про нагрузку, перенесенную с консоли), а в направлении отброшенных связей прикладываем моменты M_1 и M_2 , а также прикладываем моменты на крайних опорах M_0 и M_3 в соответствии с номерами опор, и задаем условие, что суммарный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, равен нулю, т.е. $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = 0$ (рис. 1, г).

⑤ Записываем для балки уравнения трех моментов. Так как одно уравнение записывается для одного шарнира или для двух соседних пролетов, сходящихся в шарнире, значит, для балки с двумя шарнирами следует записать два «уравнения трех моментов», выражающих условия $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = 0$. Полученную систему уравнений решаем относительно моментов M_1 и M_2 :

$$\begin{cases} M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right) \\ M_1 \ell_2 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{\ell_2} + \frac{\omega_3 b_3}{\ell_3} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где $\ell_1 = 2\text{ м}$, $\ell_2 = 4\text{ м}$, $\ell_3 = 2\text{ м}$ – длины соответствующих пролетов; моменты M_0 и M_3 равны внешним моментам, приложенным на указанных опорах, т.е. $M_0 = m_{np} = -20\text{ кНм}$ (знак «минус» указывает, что моменты M_0 и m_{np} имеют обратное направление) и $M_3 = 0$ (рис. 1, з); $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – площади эпюр изгибающих моментов на соответствующих пролетах; a_1, a_2, b_2, b_3 – расстояния от центра тяжести эпюр на пролетах соответственно – "а" – до левой опоры, "b" – до правой опоры.

Вычисляем правую часть уравнений (1). Для этого рассматриваем каждый пролет балки (рис. 2, а) в отдельности, строим на нем эпюру моментов и вычисляем $\omega_1 a_1, \omega_2 a_2, \omega_2 b_2, \omega_3 b_3$ (рис. 2, б, в, з, д):

$$\boxed{\omega_1 a_1} = \omega'_1 a'_1 - \omega''_1 a''_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = -5 \text{ кНм}^3;$$

$$\begin{aligned} \boxed{\omega_2 a_2} &= \omega'_2 a'_2 + \omega''_2 a''_2 + \omega'''_2 a'''_2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot (2+1) = 120 \text{ кНм}^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\omega_2 b_2} &= \omega'_2 b'_2 + \omega''_2 b''_2 + \omega'''_2 b'''_2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 1 = 93,33 \text{ кНм}^3; \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega_3 b_3} = \omega'_3 b'_3 + \omega''_3 b''_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 10 \text{ кНм}^3.$$

Примечание.

★ При построении эпюры моментов на первом пролете и вычислении $\omega_1 a_1$ нагрузку, перенесенную с консоли, на нулевой опоре не указываем, так как сила, приложенная на опоре, не влияет на вид эпюры, а момент, полученный здесь, учитывается в левой части первого «уравнения трех моментов» как $m_{np} = M_0$.

★ На первом пролете часть эпюры лежит ниже оси балки, поэтому ее площадь считается отрицательной и в выражении $\omega_1 a_1$ ставится со знаком «минус».

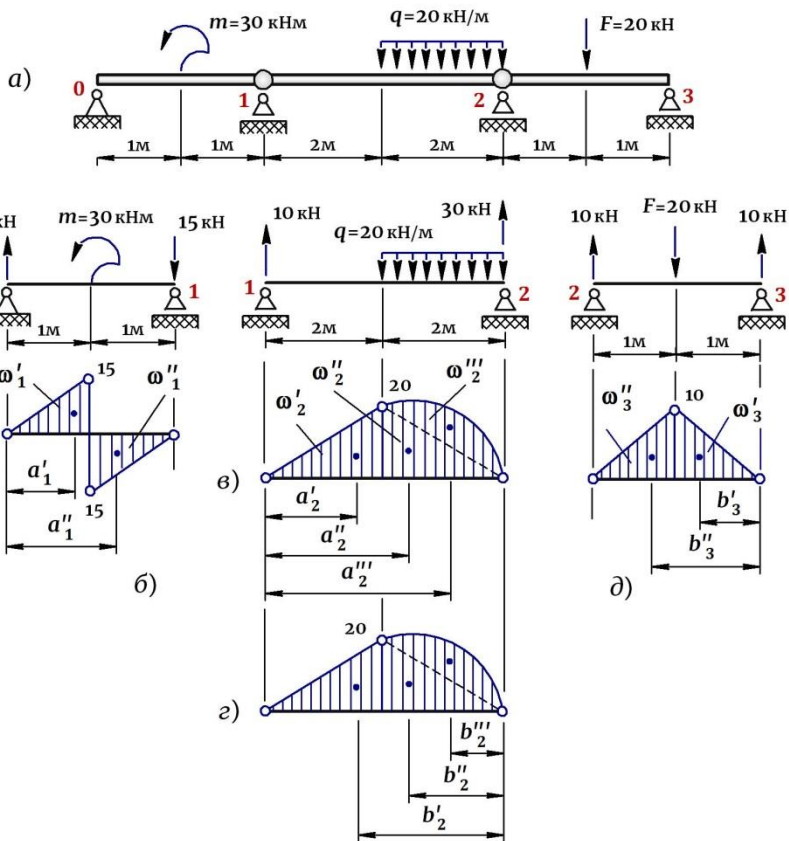


Рис. 2

Подставляем значения —

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -20 \text{ кНм}; M_3 = 0; \ell_1 = 2 \text{ м}; \ell_2 = 4 \text{ м}; \ell_3 = 2 \text{ м}; \\ \omega_1 a_1 &= -5 \text{ кНм}^3; \omega_2 a_2 = 120 \text{ кНм}^3; \\ \omega_2 b_2 &= 93,33 \text{ кНм}^3; \omega_3 b_3 = 10 \text{ кНм}^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в систему уравнений (1), решаем ее и определяем опорные моменты на шарнирах M_1 и M_2 :

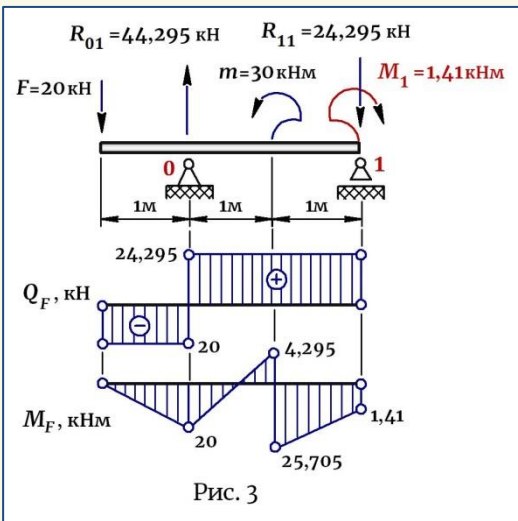
$$\begin{cases} -20 \cdot 2 + 2M_1(2+4) + M_2 \cdot 4 = -6(-5/2 + 93,33/4) \\ M_1 \cdot 4 + 2M_2(4+2) = -6(120/4 + 10/2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 12M_1 + 4M_2 + 85 = 0 \\ 4M_1 + 12M_2 + 210 = 0, \text{ откуда} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = -1,41 \text{ кНм} \\ M_2 = -17,03 \text{ кНм} \end{cases}.$$

⑥ Определяем РЕАКЦИИ ОПОР на пролетах. Для этого рассматриваем каждый пролет в отдельности (*консоль слева можно вернуть*) и, приложив к пролетам заданную нагрузку, а также опорные моменты M_1 и M_2 в установленном направлении, вычисляем опорные реакции. При этом, определив реакции опор на пролете, удобнее сразу на пролете строить окончательные эпюры поперечных сил и моментов, а потом при возвращении к исходной балке соответствующие эпюры объединить на оси балки. Это значительно облегчит решение, так как балка имеет большое количество участков и построение эпюр на полной длине приведет к громоздким выражениям Q_z и M_z и сложному вычислению значений на границах участков.

Рассматриваем **первый пролет**, определяем здесь реакции опор с учетом момента M_1 и строим эпюры (рис. 3):



$$\sum M_0 = 0:$$

$$F \cdot 1 + m - M_1 - R_{11} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$20 \cdot 1 + 30 - 1,41 - R_{11} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$R_{11} = 24,295 \text{ кН};$$

$$\sum M_1 = 0:$$

$$F \cdot 3 + m - M_1 - R_{01} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$20 \cdot 3 + 30 - 1,41 - R_{01} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$R_{01} = 44,295 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка} - \sum Y = 0:$$

$$R_{01} - R_{11} - F = 0 \rightarrow$$

$$44,295 - 24,295 - 20 = 0.$$

Рассматриваем **второй пролет**, определяем здесь реакции опор с учетом моментов M_1 и M_2 и строим эпюры (рис. 4):

$$\sum M_1 = 0: M_1 + R_{22} \cdot 4 - M_2 - q \cdot 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$1,41 + R_{22} \cdot 4 - 17,03 - 20 \cdot 2 \cdot 3 = 0 \rightarrow R_{22} = 33,905 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0: M_1 - R_{12} \cdot 4 - M_2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$1,41 - R_{12} \cdot 4 - 17,03 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow R_{12} = 6,095 \text{ кН}.$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_{12} + R_{22} - q \cdot 2 = 0 \rightarrow 6,095 + 33,905 - 20 \cdot 2 = 0$.

Рассматриваем **третий пролет**, определяем здесь реакции опор с учетом момента M_2 и строим эпюры (рис. 5):

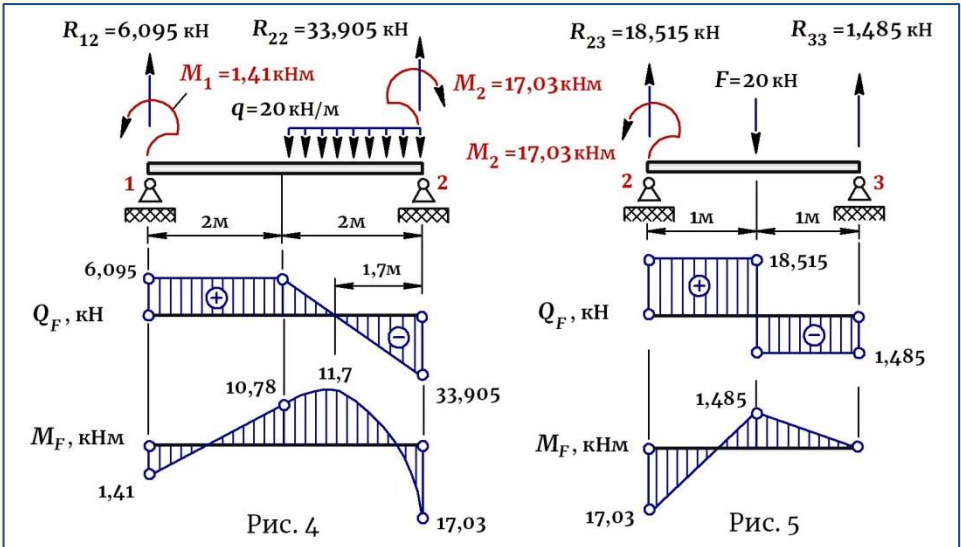
$$\sum M_2 = 0: M_2 + R_{33} \cdot 2 - F \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$17,03 + R_{33} \cdot 2 - 20 \cdot 1 = 0 \rightarrow \boxed{R_{33} = 1,485 \text{ кН}} ;$$

$$\sum M_3 = 0: M_2 - R_{23} \cdot 2 + F \cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$17,03 - R_{23} \cdot 2 + 20 \cdot 1 = 0 \rightarrow \boxed{R_{23} = 18,515 \text{ кН}} .$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_{23} + R_{33} - F = 0 \rightarrow 18,515 + 1,485 - 20 = 0$.



⑦ Возвращаемся к исходной балке (рис. 6, а) и записываем для нее окончательные реакции опор с индексом соответствующей опоры. Учитывая, что опоры 1 и 2 принадлежат левому и правому пролетам (см. рис. 3, 4, 5), реакции на опорах В и С определяются как алгебраическая сумма реакций на этих пролетах:

$$R_A = R_{01} = 44,295 \text{ кН};$$

$$R_B = R_{11} + R_{12} = -24,295 + 6,095 = 18,2 \text{ кН (вниз)};$$

$$R_C = R_{22} + R_{23} = 33,905 + 18,515 = 52,42 \text{ кН};$$

$$R_D = R_{33} = 1,485 \text{ кН}.$$

Проверка $-\sum Y = 0: R_A - R_B + R_C + R_D - 2 \times F - q \cdot 2 = 0 \rightarrow$

$$44,295 - 18,2 + 52,42 + 1,485 - 2 \times 20 - 20 \cdot 2 = 0 \rightarrow 98,2 - 98,2 = 0.$$

Указываем на балке реакции опор (рис. 6, а) и с рис. 3-5 переносим эпюры поперечных сил (рис. 6, б) и моментов (рис. 6, в).

⑧ Выполняем ОКОНЧАТЕЛЬНУЮ ПРОВЕРКУ. Так как балка дважды статически неопределима, проверку необходимо выполнять для двух отброшенных связей. Установим шарниры над «*лишними*» опорами В и С и докажем, что углы поворота на этих шарнирах равны нулю, т.е. $\Theta_B = 0$ и $\Theta_C = 0$. Для определения этих углов прикладываем в местах установки шарниров единичный момент $\bar{m}=1$ (рис. 6, з, д), строим единичные эпюры \bar{M}_B и \bar{M}_C и перемножаем их с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 6, в):

$$\boxed{\Theta_B = 0} : \Theta_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,295 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,41 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 25,705 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,41 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10,78 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,41 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10,78 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17,03 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{EI_x} (0,72 - 1,67 - 0,59 - 8,57 + 7,19 - 1,175 + 3,33 + 3,59 - 2,84) = \frac{14,83 - 14,845}{EI_x} = \frac{|0,015|}{EI_x}.$$

$$\text{Погрешность: } \frac{0,015}{14,83} \cdot 100\% = 0,1\%, \text{ что допустимо.}$$

$$\boxed{\Theta_C = 0} : \Theta_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10,78 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,41 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1+1/2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10,78 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 17,03 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,485 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 17,03 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,485 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{EI_x} (3,59 - 0,235 + 10 + 7,19 - 14,19 + 0,495 - 7,096 + 0,247) = \frac{21,522 - 21,521}{EI_x} = \frac{0,001}{EI_x}.$$

$$\text{Погрешность: } \frac{0,001}{21,521} \cdot 100\% = 0,005\%.$$

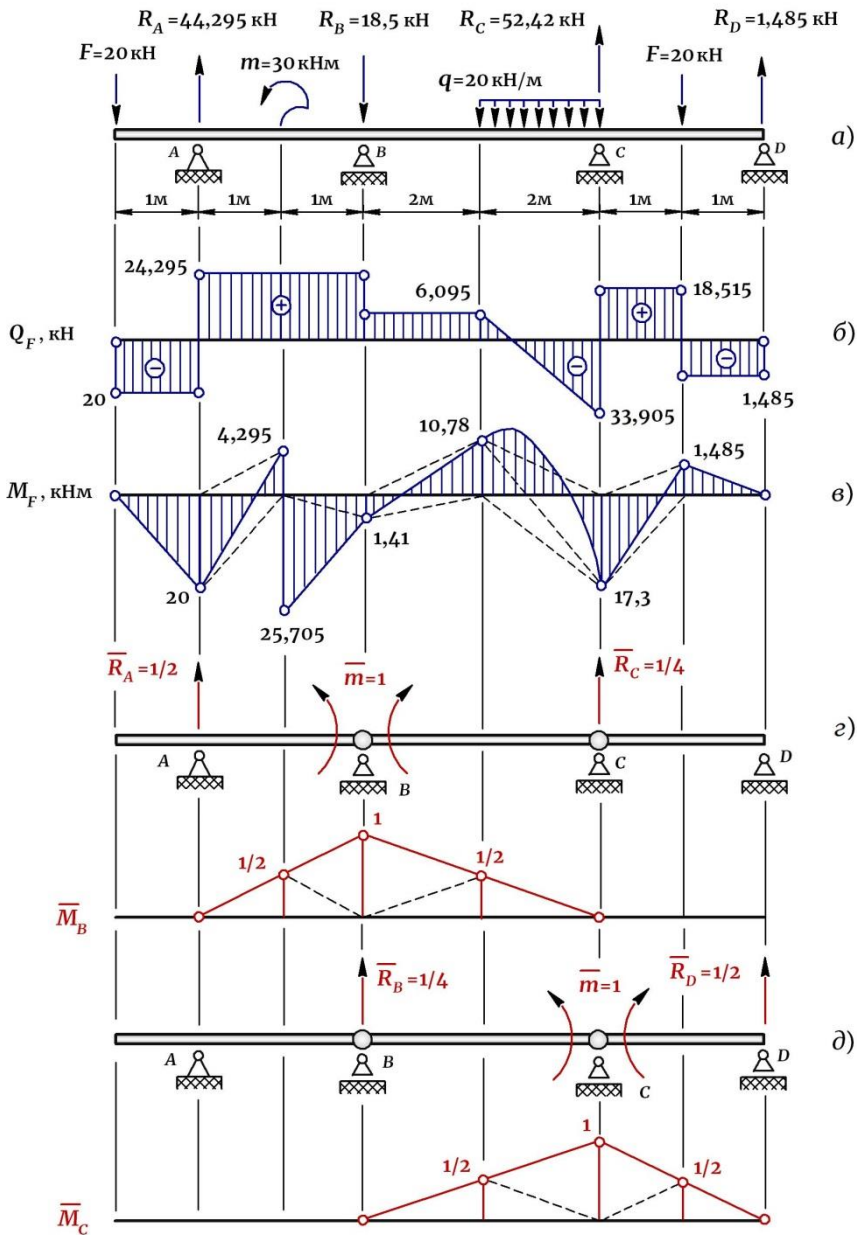


Рис. 6

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

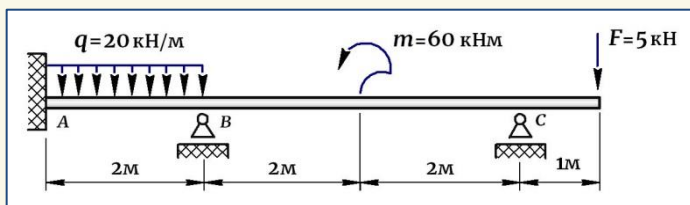
Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25,705 \cdot 10^6}{160} = 160,6 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №20 – $W_x = 184 \text{ см}^3$.

Задача 16

С помощью «уравнения трех моментов» раскрыть статическую неопределимость неразрезной балки, определить опорные моменты и реакции опор, построить окончательные эпюры и сделать проверку. Подобрать для балки сечение двутавр, если для материала $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



РЕШЕНИЕ:

I. РАСКРЫВАЕМ СТАТИЧЕСКУЮ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

① Балка дважды статически неопределима (рис. 1, а), так как на ней возникают пять реакций опор – три в заделке и по одной на шарнирных опорах, а уравнений равновесия для плоской системы можно составить только три.

② Создаем ПРИВЕДЕННУЮ СИСТЕМУ. Для этого на балке убираем консоль справа, нагрузку с нее переносим на ближайшую опору С и получаем на опоре силу $F = 5 \text{ кН}$ и момент $m_{np} = 5 \text{ кНм}$. Далее убираем жесткую заделку слева и вводим условный (фиктивный) пролет. В результате приводим балку к виду трехпролетной балки (рис. 1, б).

③ Создаем ОСНОВНУЮ СИСТЕМУ. Отбрасываем на балке две лишние внутренние связи путем установки двух промежуточных шарниров. Считая крайние опоры С и D необходимыми для обеспечения кинематической неподвижности балки, шарниры устанавливаем над «лишними» опорами А и В (рис. 1, в), разбивая таким образом балку на три однопролетные балки. Получаем статически определимую

балку, называемую ОСНОВНОЙ СИСТЕМОЙ. На *основной системе* слева направо производим нумерацию опор и пролетов (рис. 1, в): опоры нумеруются с нуля, пролеты – с единицы.

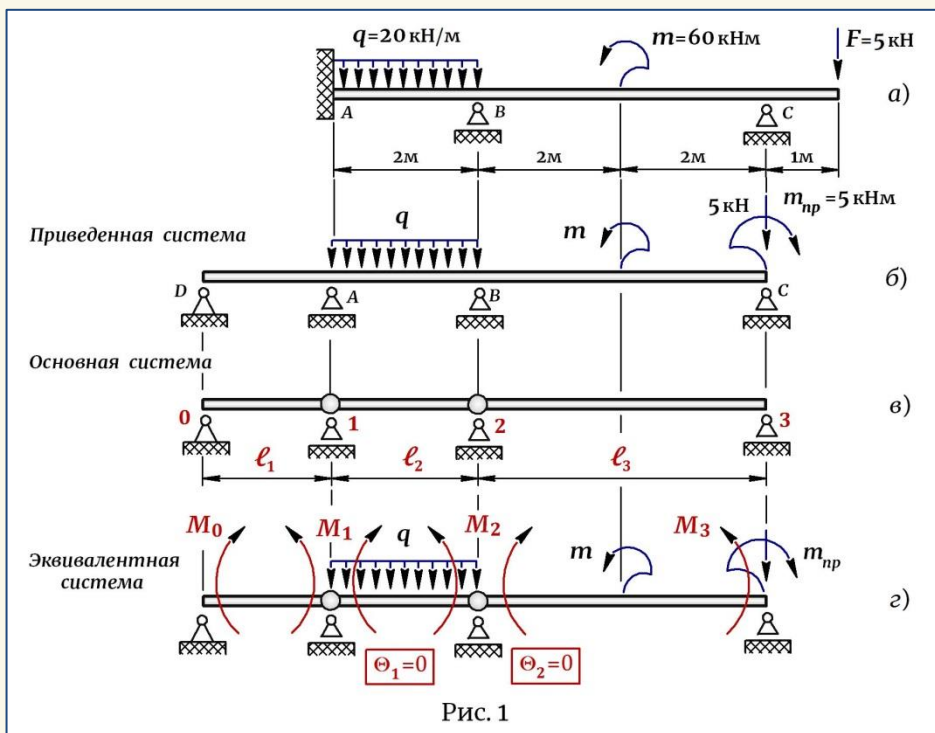


Рис. 1

④ Создаем эквивалентную систему. Чтобы *основная система* по условиям работы соответствовала исходной балке, загружаем пролеты заданной нагрузкой (не забывая про нагрузку, перенесенную с консоли), а в направлении отброшенных связей прикладываем моменты M_1 и M_2 , а также прикладываем моменты на крайних опорах M_0 и M_3 в соответствии с их номерами, и задаем условие, что суммарный угол поворота сечений, сходящихся в шарнире, равен нулю, т.е. $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = 0$ (рис. 1, г).

⑤ Записываем для балки УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ. Так как одно уравнение записывается для одного шарнира или для двух соседних пролетов, сходящихся в шарнире, значит, для балки с двумя шарнирами следует записать два «уравнения трех моментов», выражающих условия $\Theta_1 = 0$ и $\Theta_2 = 0$. Полученную систему уравнений решаем относительно моментов M_1 и M_2 :

$$\begin{cases} M_0 \ell_1 + 2M_1(\ell_1 + \ell_2) + M_2 \ell_2 = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{\ell_1} + \frac{\omega_2 b_2}{\ell_2} \right) \\ M_1 \ell_2 + 2M_2(\ell_2 + \ell_3) + M_3 \ell_3 = -6 \left(\frac{\omega_2 a_2}{\ell_2} + \frac{\omega_3 b_3}{\ell_3} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где $\ell_1 = 0$ (несуществующий пролет), $\ell_2 = 2\text{ м}$, $\ell_3 = 4\text{ м}$ – длины соответствующих пролетов; моменты M_0 и M_3 равны внешним моментам, приложенным на указанных опорах и для заданной балки $M_0 = 0$ и $M_3 = m_{np} = -5\text{ кНм}$ (знак «минус» указывает, что моменты M_3 и m_{np} имеют обратное направление) (рис. 1, з); $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – площади эпюр изгибающих моментов на соответствующих пролетах, при этом $\omega_1 = 0$, так как первый пролет введен условно и нагрузки на нем нет; a_1, a_2, b_2, b_3 – расстояния от центра тяжести эпюр на пролетах соответственно – "a" – до левой опоры, "b" – до правой опоры, где также $a_1 = 0$.

Примечание.

В случае, когда заделка расположена справа, ее также следует отбросить и ввести фиктивный пролет. Но теперь по принятой нумерации слева направо – это будет третий пролет, для которого $\ell_3 = 0, \omega_3 = 0, b_3 = 0$ и на опоре 3 – $M_3 = 0$.

Вычисляем правую часть уравнений (1). Для этого рассматриваем второй и третий пролеты в отдельности (на первом пролете нагрузки нет), строим на них эпюры моментов и вычисляем $\omega_2 a_2, \omega_2 b_2, \omega_3 b_3$ (рис.2, а, б):

$$\boxed{\omega_1 a_1} = 0; \quad \boxed{\omega_2 a_2 = \omega_2 b_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 13,33 \text{ кНм}^3;$$

$$\boxed{\omega_3 b_3} = \omega'_3 b'_3 + \omega''_3 b''_3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = 40 \text{ кНм}^3.$$

Подставляем значения –

$$\left. \begin{aligned} M_0 = 0; M_3 = -5 \text{ кНм}; \ell_1 = 0; \ell_2 = 2 \text{ м}; \ell_3 = 4 \text{ м}; \\ \omega_1 a_1 = 0; \omega_2 a_2 = \omega_2 b_2 = 13,33 \text{ кНм}^3; \omega_3 b_3 = 40 \text{ кНм}^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в систему уравнений (1), решаем ее и определяем опорные моменты M_1 и M_2 :

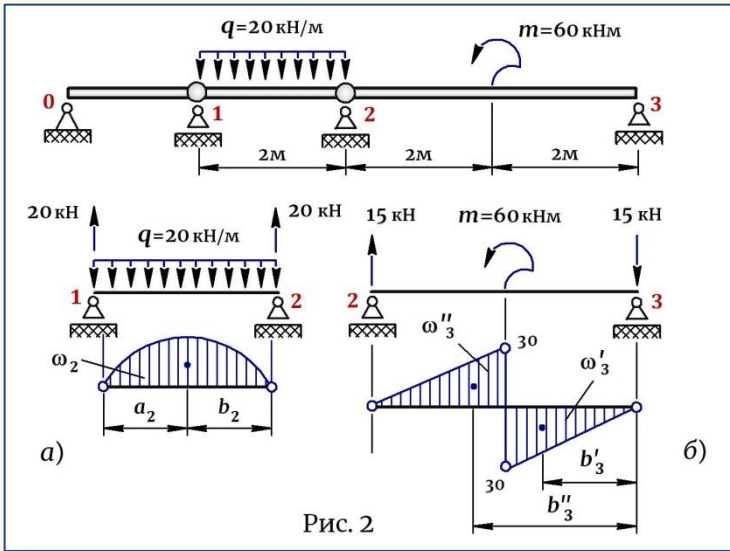


Рис. 2

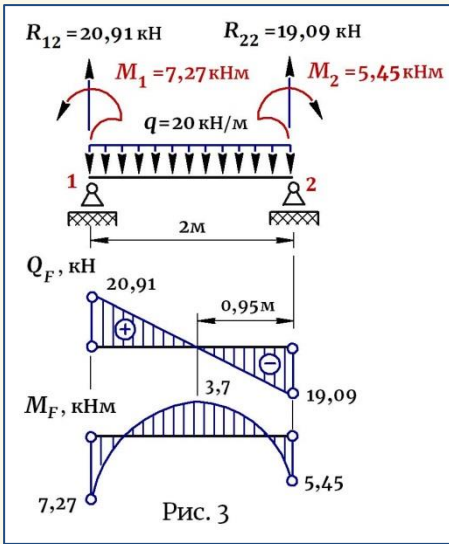
$$\begin{cases} 2M_1(0+2) + M_2 \cdot 2 = -6 \left(0 + \frac{13,33}{2} \right) \\ M_1 \cdot 2 + 2M_2(2+4) - 5 \cdot 4 = -6 \left(\frac{13,33}{2} + \frac{40}{4} \right) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 4M_1 + 2M_2 + 40 = 0 \\ 2M_1 + 12M_2 + 80 = 0, \text{ откуда} \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1 = -7,27 \text{ кНм} \\ M_2 = -5,45 \text{ кНм} \end{matrix}$$

где опорный момент M_1 – это момент в заделке, т.е. $M_1 = M_A$, и так как в результате расчета он получился со знаком «минус», значит, он в заделке будет направлен вниз, т.е. в направлении, обратном направлению момента M_1 , указанному на эквивалентной системе (рис. 1, з).

⑥ Определяем РЕАКЦИИ ОПОР на пролетах. Для этого рассматриваем второй и третий пролеты в отдельности (возвращая консоль на третьем пролете), прикладываем к пролетам заданную нагрузку, а также моменты M_1 и M_2 в установленном направлении, и вычисляем опорные реакции. Определив реакции опор на пролете, сразу строим здесь эпюры поперечных сил и моментов.

Рассматриваем **второй пролет**, определяем здесь реакции опор с учетом моментов M_1 и M_2 и строим эпюры (рис. 3):



$$\sum M_1 = 0:$$

$$M_1 - M_2 - q \cdot 2 \cdot 1 + R_{22} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$7,27 - 5,45 - 20 \cdot 2 \cdot 1 + R_{22} \cdot 2 = 0$$

$$R_{22} = 19,09 \text{ кН};$$

$$\sum M_2 = 0:$$

$$M_1 - M_2 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_{12} \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$7,27 - 5,45 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - R_{12} \cdot 2 = 0$$

$$R_{12} = 20,91 \text{ кН}.$$

Проверка -

$$\sum Y = 0: R_{12} + R_{22} - q \cdot 2 = 0 \rightarrow$$

$$20,91 + 19,09 - 20 \cdot 2 = 0.$$

Рассматриваем **третий пролет** с консолью, определяем здесь реакции опор с учетом момента M_2 и строим эпюры (рис. 4):

$$\sum M_2 = 0:$$

$$M_2 + m - F \cdot 5 - R_{33} \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$5,45 + 60 - 5 \cdot 5 - R_{33} \cdot 4 = 0$$

$$R_{33} = 10,11 \text{ кН};$$

$$\sum M_3 = 0:$$

$$M_2 + m - F \cdot 1 - R_{23} \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

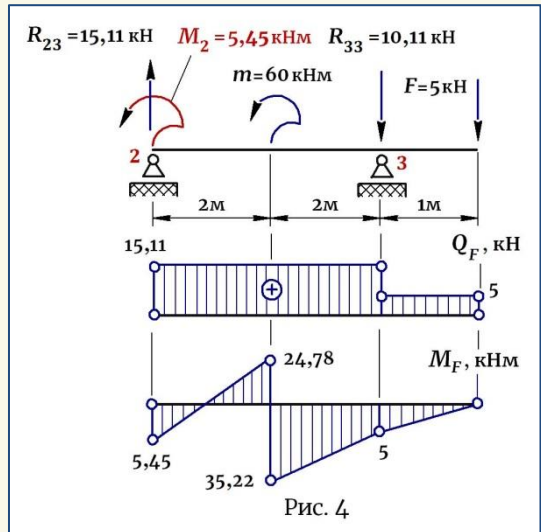
$$5,45 + 60 - 5 \cdot 1 - R_{23} \cdot 4 = 0$$

$$R_{23} = 15,11 \text{ кН}.$$

Проверка -

$$\sum Y = 0: R_{23} - R_{33} - F = 0 \rightarrow$$

$$15,11 - 10,11 - 5 = 0.$$



⑦ Возвращаемся к исходной балке (рис. 5, а) и записываем для нее окончательные реакции опор с индексом соответствующей опоры. Учитывая, что M_1 – это момент в заделке и что опоры 2 принадлежат второму и третьему пролетам (рис. 3, 4), а значит, реакция на опоре В

определяется как алгебраическая сумма реакций на этих пролетах, получаем:

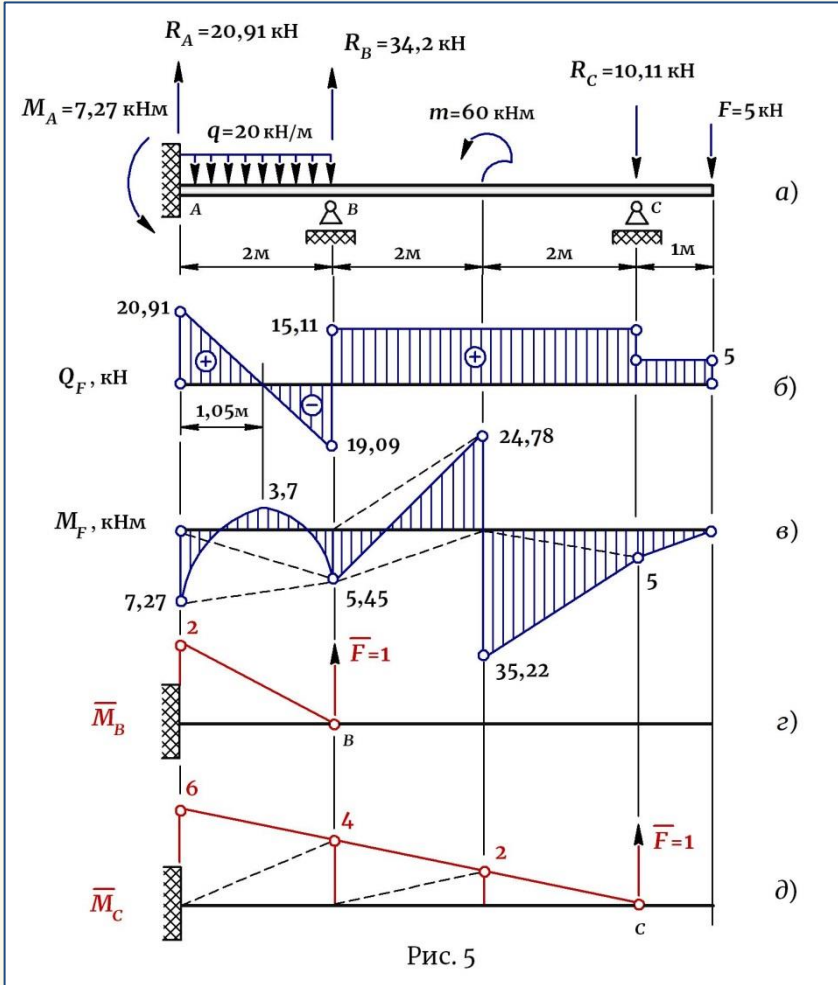


Рис. 5

$$M_A = M_1 = 7,27 \text{ кНм}; R_A = R_{12} = 20,91 \text{ кН};$$

$$R_B = R_{12} + R_{22} = 19,09 + 15,11 = 34,2 \text{ кН (вниз)};$$

$$R_C = R_{33} = 10,11 \text{ кН (вниз)}.$$

Проверка - $\sum Y = 0: R_A + R_B - R_C - F - q \cdot 2 = 0 \rightarrow$

$$20,91 + 34,2 - 10,11 - 5 - 20 \cdot 2 = 0 \rightarrow 55,11 = 55,11.$$

Указываем на балке реакции опор (рис. 5, а) и с рис. 3,4 переносим эпюры поперечных сил (рис. 5, б) и моментов (рис. 5, в).

8) Выполняем ОКОНЧАТЕЛЬНУЮ ПРОВЕРКУ. Так как балка дважды статически неопределима, проверку необходимо выполнять для двух отброшенных связей. Отбросим в качестве лишних связей опоры В и С и докажем, что прогибы сечений на этих опорах равны нулю, т.е. $y_B = 0$ и $y_C = 0$. Для этого поочередно прикладываем в точках В и С единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 5, з, д), строим единичные эпюры \bar{M}_B и \bar{M}_C и перемножаем их с грузовой эпюрой моментов M_F (рис. 5, в):

$$y_B = 0 : y_B = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_B) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,27 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,45 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{1}{EI_x} (13,33 - 9,69 - 3,63) = \frac{13,33 - 13,32}{EI_x} = \frac{0,01}{EI_x}.$$

Погрешность: $\frac{0,01}{13,32} \cdot 100\% = 0,08\%$, что допустимо.

$$y_C = 0 : y_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{4+6}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7,27 \times \right. \\ \times \left(\frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,45 \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 24,78 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,45 \times \\ \left. \left(\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 35,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right] = \frac{1}{EI_x} (66,67 - 38,77 - 25,43 + \\ + 66,08 - 18,17 - 46,96 - 3,33) = \frac{132,75 - 132,66}{EI_x} = \frac{0,09}{EI_x}.$$

Погрешность: $\frac{0,09}{132,66} \cdot 100\% = 0,07\%$, что допустимо.

II. ПРОЕКТИРОВОЧНЫЙ РАСЧЕТ БАЛКИ

Из условия прочности подбираем для балки сечение двутавр:

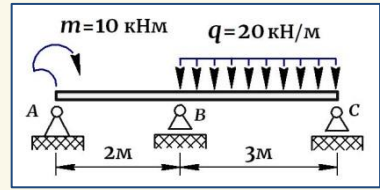
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ откуда } W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{35,22 \cdot 10^6}{160} = 220,12 \text{ см}^3.$$

Из таблиц сортамента подбираем двутавр №22 — $W_x = 232 \text{ см}^3$.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ раскрытия статической неопределенности

Задача 17

Для заданной статически неопределимой балки определить опорные реакции, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и выполнить проверку решения.



РЕШЕНИЕ:

① Балка один раз статически неопределима. Отбрасываем на балке одну лишнюю связь, например, опору B, заменяем действие опоры силой R_B и с учетом этой силы определяем на балке реакции опор (рис. 1, а):

$$\sum M_A = 0:$$

$$m + q \cdot 3 \cdot 3,5 - R_B \cdot 2 - R_C \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$10 + 20 \cdot 3 \cdot 3,5 - R_B \cdot 2 - R_C \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$R_C = 44 - 0,4R_B \text{ (кН)} \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$m - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 + R_A \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$10 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 + R_A \cdot 5 = 0 \rightarrow$$

$$R_A = 16 - 0,6R_B \text{ (кН)} \quad (2)$$

Проверка -

$$\sum Y = 0: R_A + R_C + R_B - q \cdot 3 = 0 \rightarrow$$

$$(16 - 0,6R_B) + (44 - 0,4R_B) + R_B - 20 \cdot 3 = 0.$$

② Определяем ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ ЭНЕРГИЮ ДЕФОРМАЦИИ, накопленную в балке. Пренебрегая влиянием поперечной силы, которая вносит весьма незначительную долю в накопление энергии, и учитывая, что балка имеет два участка, потенциальная энергия деформации может быть определена по формуле:

$$U = \int_0^{2M} \frac{M_{z_1}^2 dz}{2EI_x} + \int_0^{3M} \frac{M_{z_2}^2 dz}{2EI_x}, \quad (3)$$

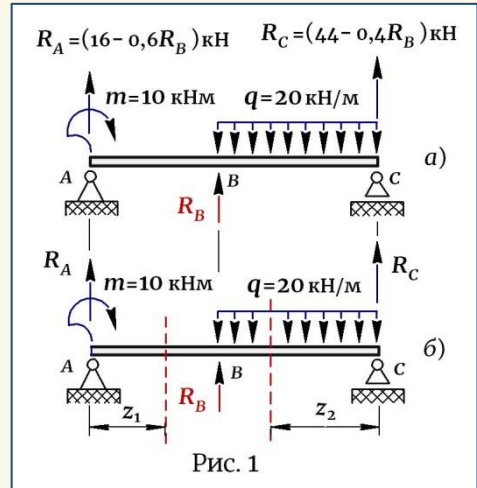


Рис. 1

где M_{z_1} и M_{z_2} – изгибающие моменты в сечениях z_1 и z_2 , согласно рис. 1, б и с учетом значений реакций (1) и (2), равные –

$$\left. \begin{aligned} M_{z_1} &= m + R_A z_1 = 10 + (16 - 0,6R_B) z_1; \\ M_{z_2} &= R_C z_2 - \frac{qz_2^2}{2} = (44 - 0,4R_B) z_2 - 10 z_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

③ Согласно теореме Кастилиано – производная потенциальной энергии по обобщенной силе равна обобщенному перемещению. Учитывая, что на опоре В прогиб балки равно нулю, теорему Кастилиано можно записать в виде:

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = 0. \quad (5)$$

④ Дифференцируем выражение (3) в соответствии с (5) и получаем:

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \int_0^{2M} \frac{M_{z_1} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_1}}{\partial R_B} + \int_0^{3M} \frac{M_{z_2} dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_{z_2}}{\partial R_B} = 0, \quad (6)$$

где производные в подынтегральных выражениях с учетом значений (4) соответственно равны –

$$\frac{\partial M_{z_1}}{\partial R_B} = -0,6z_1; \quad \frac{\partial M_{z_2}}{\partial R_B} = -0,4z_2. \quad (7)$$

Подставляем значения (4) и (7) в выражение (6), интегрируем слагаемые и, сократив на EI_x , получаем уравнение вида:

$$\begin{aligned} y_B &= \int_0^{2M} \frac{[10 + (16 - 0,6R_B) z_1] (-0,6z_1)}{EI_x} dz + \\ &+ \int_0^{3M} \frac{[(44 - 0,4R_B) z_2 - 10z_2^2] (-0,4z_2)}{EI_x} dz = \\ &= -12 - 25,6 + 0,96R_B - 158,4 + 1,44R_B + 81 = 0 \rightarrow \boxed{R_B = 47,92 \text{ кН}}. \end{aligned}$$

Остальные реакции на основании значений (1) и (2) соответственно равны:

$$R_A = 16 - 0,6R_B = 16 - 0,6 \cdot 47,92 = -12,75 \text{ кН (вниз);}$$

$$R_C = 44 - 0,4R_B = 44 - 0,4 \cdot 47,92 = 24,83 \text{ кН.}$$

Проверка - $\sum Y = 0$: $-R_A + R_C + R_B - q \cdot 3 = 0 \rightarrow$
 $-12,75 + 24,83 + 47,92 - 20 \cdot 3 = 0 \rightarrow 72,75 - 72,75 = 0.$

5 Возвращаемся к исходной балке (рис. 2, а) и строим эпюры поперечных сил (рис. 2, б) и изгибающих моментов (рис. 2, в):

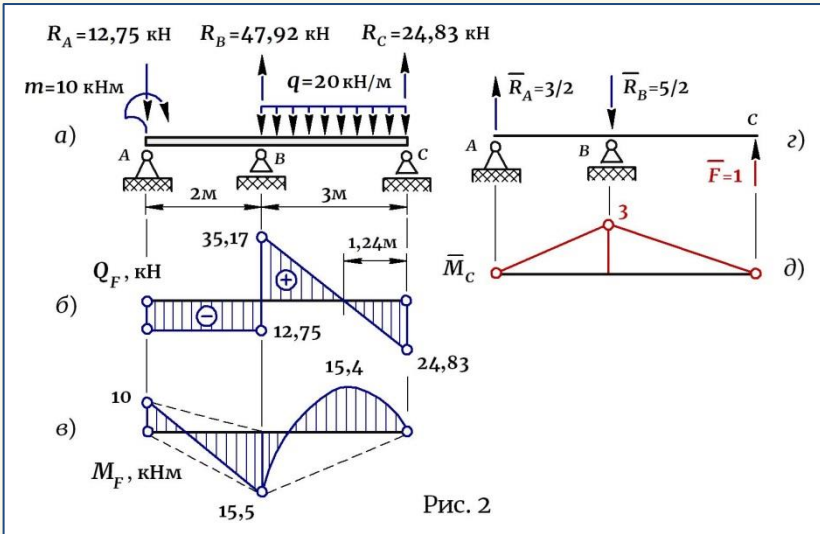


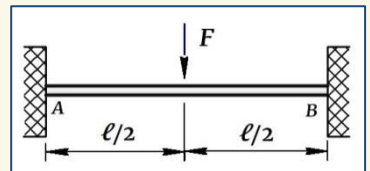
Рис. 2

6 Выполняем ОКОНЧАТЕЛЬНУЮ ПРОВЕРКУ. Докажем, что прогиб балки, например, на опоре С, равен нулю. Для этого уберем опору С, приложим здесь единичную силу $\bar{F} = 1$ (рис. 2, з), определим от нее реакции опор, построим единичную эпюру \bar{M}_C (рис. 2, д) и перемножим ее с эпюрой моментов M_F (рис. 2, в):

$$y_C = 0 : y_C = \frac{1}{EI_x} (M_F \bar{M}_C) = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{67,5 - 46,5 + 10 - 31}{EI_x} = \frac{77,5 - 77,5}{EI_x} = 0.$$

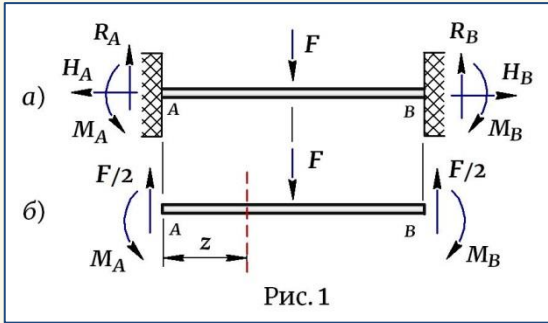
Задача 18

В заданной балке, защемленной с двух сторон в жесткой заделке и нагруженной посередине длины силой F , используя теорему Кастилиано, определить реакции опор.



РЕШЕНИЕ:

① В жестких заделках A и B возникают реакции (рис. 1, а) –



из которых:

★ в силу отсутствия горизонтальной нагрузки горизонтальные реакции в заделках равны нулю, т.е. $H_A = H_B = 0$ (рис. 1, б);

★ в силу симметрии внешней нагрузки F вертикальные реакции одинаковы и равны $R_A = R_B = F/2$ (рис. 1, б); моменты в заделках также одинаковы – $M_A = M_B$, однако их величина неизвестна и ее требуется определить.

② Потенциальная энергия деформации, накопленная в балке от изгиба, учитывая, что балка имеет два одинаковых участка, может быть определена как –

$$U = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{M_z^2 dz}{2EI_x}, \quad (1)$$

где M_z – изгибающий момент в сечении z , равный (рис. 1, б):

$$M_z = R_A z - M_A = (F/2)z - M_A. \quad (2)$$

③ Согласно теореме Кастилиано – производная потенциальной энергии по обобщенной силе равна обобщенному перемещению. Учитывая, что в заделке A угол поворота сечения равен нулю, теорему Кастилиано можно записать в виде:

$$\Theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = 0. \quad (3)$$

④ Дифференцируем выражение (1) согласно (3) и получаем:

$$\Theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{M_z dz}{EI_x} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial M_A} = 0, \quad (4)$$

где производная в подынтегральном выражении с учетом значения (2) равна –

$$\frac{\partial M_z}{\partial M_A} = -1. \quad (5)$$

Подставляем значения (2) и (5) в выражение (4), интегрируем его и получаем уравнение вида:

$$\Theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{[(F/2)z - M_A]}{EI_x} \cdot (-1) dz = \frac{2}{EI_x} \left(\frac{M_A \ell}{2} - \frac{F \ell^2}{16} \right) = 0.$$

Следовательно: $M_A \ell - \frac{F \ell^2}{8} = 0$, откуда $M_A = M_B = \frac{F \ell}{8}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: Учебник. / М.Д. Подскребко – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир [и др.]; под ред. Вольмира А.С. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учебник./В.И. Феодосьев – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов: Учебник. / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
5. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев – М.: Наука, 1976. – 607 с.
6. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов: Учебник./ Г.С. Писаренко [и др.]; под ред. Писаренко Г.С. – Киев: Вища школа, 1979. – 696 с.
7. Татур, Г.К. Общий курс сопротивления материалов: Учебник. / Г.К. Татур – Минск:Вышэйшая школа, 1974. – 462 с.
8. Реут, Л.Е. Курс лекций и практических занятий по дисциплине «Механика материалов». Растяжение-сжатие: Учебно-методическое пособие. / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2011. – 147 с.
9. Реут, Л.Е. Плоский поперечный изгиб: Пособие по учебной дисциплине «Механика материалов». / Л.Е. Реут. – Минск: БНТУ, 2016. – 263 с.