

Определение площади поперечного сечения водосливной плотины криволинейного очертания

Коревицкий Г.А.

Белорусский национальный технический университет

В практике гидротехнических расчетов приходится часто сталкиваться с подсчетами площадей поперечного сечения водосливных плотин криволинейного очертания. Эти подсчеты необходимы, например, для определения собственного веса плотины, при статическом расчете, или для определения объемов бетонных работ.

Для подсчета площади, на миллиметровой бумаге в масштабе вычерчивается расчетная секция плотины, поперечный профиль разбивался на ряд простых геометрических фигур, площади которых затем суммируются. При этом, чем точнее необходимо подсчитать площадь, тем сильнее надо разбивать плотину на элементарные фигуры, что затрудняет вычисления.

Упростить эту задачу, можно представив криволинейную поверхность в виде кривой описываемой математической функцией и используя геометрический смысл двойного интеграла в прямоугольных координатах – подсчет площади.

Для нахождения кривой, описывающей водосливную поверхность с профилирующим напором H , воспользуемся методами математической статистики (рис. 1).

Как видно функция

$$y = (1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x - H 0,0256$$

достаточно хорошо описывает криволинейную поверхность безвакуумного профиля, коэффициент аппроксимации R^2 весьма близок к единице.

Геометрический смысл двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$

при $f(x, y) = 1$ равен площади области D , т.е.

$$S_D = \iint_D dS = \iint_D dx dy$$

Найдем площадь поперечного сечения плотины, для этого зададимся граничными условиями (Рис. 2). Сверху область D ограничивает линия $y = (1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x - H 0,0256$.

Снизу область D ограничена прямой $y=T-H$;
 где T – удельная энергия верхнего бьефа (без учета скорости потока);

H – профилирующий напор.

Со стороны напорной грани водослива (слева) область D ограничена линией $x=0$.

Справа область D ограничена линией

$$T-H = (1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x - H 0,0256$$

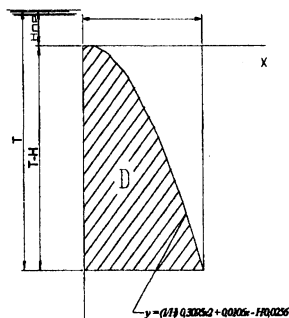
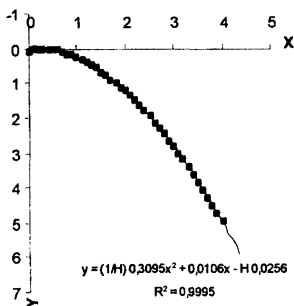


Рис.1 Криволинейная поверхность безвакуумного профиля

Рис.2 Определение площади области D

Для нахождения ограничения справа необходимо решить полное квадратное уравнение

$$T-H = (1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x - H 0,0256;$$

$$(1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x - H 0,0256 - T + H = 0;$$

$$(1/H) 0,3095x^2 + 0,0106x + H 0,974 - T = 0;$$

найдем дискриминант

$$D = 0,0106^2 - 4 \cdot \frac{1}{H} \cdot 0,3095 \cdot (0,974 - T) = 0,0001 - 1,24 \cdot \frac{T}{H} + 1,21;$$

окончательно

$$D = 1,24 \cdot \frac{T}{H} - 1,21$$

Тогда корни уравнения можно определить из выражения

$$x = \frac{-0,0106 \pm \sqrt{1,24 \cdot \frac{T}{H} - 1,21}}{2 \cdot \frac{1}{H} \cdot 0,3095} = \frac{-0,0106 \pm \sqrt{D}}{2 \cdot \frac{1}{H} \cdot 0,3095};$$

или

$$x = H \left(-0,017 \pm 1,61 \sqrt{1,24 \cdot \frac{T}{H} - 1,21} \right).$$

Значение x для решения поставленной задачи может быть только положительным

$$x = H \left(-0,017 + 1,61 \sqrt{D} \right).$$

Таким образом, справа область D ограничена линией

$$x = H \left(-0,017 + 1,61 \sqrt{D} \right).$$

Определим площадь D

$$S = \iint_D dx dy = \int_0^{H(-0,017+1,61\sqrt{D})} dx \int_{(1/H)0,3095x^2 + 0,0106x - H0,0256}^{T-H} dy$$

обозначим $\vartheta = H \left(-0,017 + 1,61 \sqrt{D} \right)$

$$S = \int_0^{\vartheta} (T - H - ((1/H)0,3095x^2 + 0,0106x - H0,0256)) dx.$$

Взяв интеграл, можно определить площадь поперечного сечения водосливной плотины криволинейного очертания.

$$S = -\frac{1}{H} 0,3095 \frac{\vartheta^3}{3} - 0,0106 \frac{\vartheta^2}{2} + \vartheta(T - 0,974H).$$

Таким образом, подставив в полученную формулу значения профилирующего напора и удельной энергии ВБ можно получить значения площади поперечного сечения водослива криволинейного очертания без учета конструктивных элементов плотины (консоль, зуб и т.п.).