

либо из ее параметров. Такой анализ может быть полезен не только при оптимальном проектировании новых конструкций, но и при реконструкции уже существующих.

### Литература

1. Борисевич А.А. Оптимизация нелинейно упругих стержневых систем по методу локальных линеаризованных областей. — Брест: Изд. БГТУ, 2001.- 104с.

## Нелинейный расчёт балки на упругом основании

Машкова О.В.

Белорусский государственный университет транспорта

Существующие методы расчетов оснований и фундаментов базируются на использовании теории *линейно* деформируемых тел. Однако для большинства видов грунтов зависимость между нагрузкой и осадкой имеет явно *нелинейный* характер. Поэтому грунты в общем случае следует рассматривать как *нелинейно* деформируемую среду.

Рассматривается упругая балка конечной длины  $2l$  на упругом физически-нелинейном основании под действием произвольной нагрузки  $q(x)$ . Балка симметрична относительно оси  $Y$ , глубина расчетной области  $h = 3l$ .

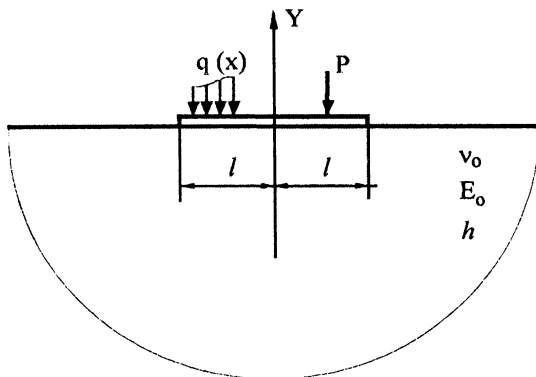


Рисунок 1. Расчетная схема основания под нагруженной балкой

Предполагается, что между балкой и основанием возникают только реактивные нормальные напряжения (реактивные давления). Силы трения (сцепления) на контакте слоев малы, и ими пренебрегают.

Граничные условия задачи следующие:

на границе расчетной области основания перемещения равны нулю  $u = 0, v = 0$ ;

на поверхности основания, вне контакта балки с ним, реактивные давления равны нулю  $P_x = P_y = 0$ .

В результате решения сформулированной задачи предполагается определить величины реактивных давлений на контакте балки с основанием  $P_k$ , осадки балки  $W_{ik}$  и усилия в сечениях балки.

Грунты следует рассматривать как *физически нелинейную* среду, подчиняющуюся при простом нагружении и активной деформации общим закономерностям теории малых упругопластических деформаций, разработанной А. А. Ильюшиным, В. В. Соколовским, Г. М. Смирновым–Аляевым и др.

Для плоского напряженного состояния математический аппарат теории малых упругопластических деформаций выражается совокупностью следующих уравнений:

- *уравнения равновесия*

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0; \quad (1)$$

- *уравнение совместности деформаций*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (2)$$

- *физические уравнения, отражающие свойства упругопластического тела,*

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_x; \quad \sigma_y - \sigma_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}; \quad (3)$$

- выражения для интенсивности деформаций и зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{6(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y) + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2};$$

$$\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i). \quad (4)$$

Зависимость  $\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i)$  задается произвольно и имеет нелинейный характер. Она носит название закона нелинейной упругости. График закона представлен на рисунке 2.

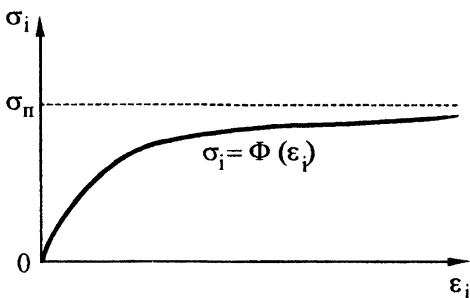


Рисунок 2. Закон нелинейной упругости основания

В конечном виде зависимость  $\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i)$  выражается как

$$\sigma_i = \hat{A}_i (1 - \omega_i) \varepsilon_i, \quad (5)$$

где  $\omega_i = \omega(\varepsilon_i)$  — функция интенсивности деформации;

$\hat{A}_i$  — модуль упругости основания.

Закон нелинейной упругости основания принимается в виде

$$\sigma_i = A \operatorname{th}(\alpha \varepsilon_i), \quad (6)$$

где  $A, \alpha$  — коэффициенты, определяемые в ходе исследования функции  $\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i)$ . А именно

$$\hat{A} = \sigma_i; \quad \alpha \hat{A} = \hat{A}_i,$$

где  $\sigma_i$  — предел прочности основания.

После подстановки  $A, \alpha$  зависимость  $\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i)$  изменяется следующим образом

$$\sigma_i = \sigma_Y \operatorname{th} \frac{E_i}{\sigma_Y} \varepsilon_i. \quad (7)$$

Зависимость (7) приводится к виду (5), в результате чего функция интенсивности деформации выражается следующей формулой

$$\omega_i = 1 - \frac{\sigma_Y}{\dot{A}\varepsilon_i} \operatorname{th} \frac{\varepsilon_i \dot{A}}{\sigma_Y}. \quad (8)$$

Сформулированная задача содержит уравнения пластичности, решение которых в общем случае весьма сложно. Поэтому имеются приближенные решения, которые значительно упрощают общие. Распространен метод упругих решений А. А. Ильюшина, который основан на принципе последовательных приближений.

Для решения такого типа нелинейной задачи используются три группы уравнений, записанных в перемещениях:

а) уравнения типа Ляме, являющиеся синтезом геометрического, статического и физического обследования задачи;

б) уравнения, связывающие напряжения и деформации в любой точке исследуемой области;

в) краевые условия.

Записываем уравнения типа Ляме для нелинейно – деформируемых тел

$$\begin{aligned} (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + X &= G R_x; \\ (G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y &= G R_y, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\theta$  – относительное изменение объема,  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ ;

$G$  и  $\lambda$  – постоянные Ляме;

$R_x, R_y$  – члены правой части уравнений Ляме, содержащие функцию пластичности  $\omega_i$ , причем

$$R_x = \omega_i \nabla^2 u + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$R_y = \omega_i \nabla^2 v + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Аналогично (9), (10) представляем в перемещениях и граничные условия

$$\begin{aligned} P_{Nx} + T_x &= \left( 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta \right) l + G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m; \\ P_{Ny} + T_y &= G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left( 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta \right) m, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $l$ ,  $m$  – косинусы углов между соответствующими осями и нормалью к площадке;

$(P_{Nx} + T_x)$ ,  $(P_{Ny} + T_y)$  – поверхностные силы.

К уравнениям (10), (11) добавляем уравнение изгиба балки в контактной зоне

$$\frac{d^4 v_i}{dx^4} = - \frac{P_i - X_i}{EI_d} \quad (12)$$

где  $P_i$  – реактивные давления;

$X_i$  – внешние объемные силы (в зоне контакта  $X_i \rightarrow Y_i$ );

$EI_d$  – жесткость балки при изгибе.

Поставленную краевую задачу предполагается решать численно методом конечных разностей (МКР), то есть заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. В настоящее время составляется программа на языке MATCAD для реализации указанного подхода.

УДК 629.735

### Шлаки Белорусского металлургического завода – сырьевой резерв производства дорожного асфальтобетона

Савченко Е.А., Бусел А.В.

Белорусский национальный технический университет

На Белорусском металлургическом заводе ежегодно вывозится в отвал 100 тыс. тонн в год. Запасы шлака в отвалах составляют более 800 тыс. тонн. Опыт применения сталеплавильных