https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-5-446-458

УДК 621.6

Метод расчета переходных процессов в газопроводе

А. С. Фиков[1)]

[1)]Государственный институт повышения квалификации и переподготовки кадров в области газоснабжения «ГАЗ-ИНСТИТУТ» (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Рассматривается аналитическое решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей неустановившееся изотермическое течение реальных газов в газопроводах. Такая задача возникает при изучении закономерности изменения мгновенных значений давления и расхода газа в магистральных газопроводах, например при пусках и остановах крупных потребителей газа. При этом переходные процессы не обязательно имеют ярко выраженный колебательный характер, невзирая на то что описываются периодическими функциями. В ходе исследований поставлена задача получить математическую модель процесса с учетом инерционного члена уравнения движения, пренебрежение которым возможно только при условии превышения в 3,5–4 раза потерь на трение над ударным давлением. Важной особенностью найденного решения является его универсальность, что позволяет значительно снизить трудозатраты при нахождении с его использованием частных решений практических задач, отличающихся граничными условиями. Граничные условия первого рода задаются в виде произвольной функции как по расходу газа, так и по его давлению. В основу решения положен широко применяемый метод разделения переменных Фурье. С целью упрощения расчетов исходное дифференциальное уравнение преобразуется таким образом, чтобы граничные условия приобрели свойство однородности. Установлено, что введенные в решение требования равенства нулю граничных условий в начальный момент времени позволяют получить компактную запись аналитической модели, но не ограничивают область использования модели при скачкообразном изменении расхода газа или давления. Полученная аналитическая модель неустановившегося течения газа позволяет без использования интеграла Дюамеля находить аналитические решения при более сложных граничных условиях, чем скачок расхода. При этом найденные решения полностью совпадают с решениями на основе интеграла Дюамеля, но без интегрирования, что положительно сказывается на применимости данного подхода в практике инженерных расчетов.

Ключевые слова: неустановившееся течение газа, граничные условия первого рода, метод Фурье, скачок расхода газа

Для цитирования: Фиков, А. С. Метод расчета переходных процессов в газопроводе / А. С. Фиков // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2021. Т. 64, № 5. С. 446–458. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-5-446-458

Method for Calculating Transients in a Gas Pipeline

A. S. Fikov[1)]

[1)]The State Institute of Professional Development and Retraining of Personnel at Field of Gas-Supply «GAS-INSTITUTE» (Minsk, Republic of Belarus)

Abstaract. An analytical solution of a system of partial differential equations describing the unsteady isothermal flow of real gases in gas pipelines is considered. Such a problem arises when

Адрес для переписки	Address for correspondence
Фиков Александр Станиславович	Fikov Alekksandr S.
Государственный институт повышения квалификации и переподготовки кадров в области газоснабжения «ГАЗ-ИНСТИТУТ»	The State Institute of Professional Development and Retraining of Personnel at Field of Gas-Supply «Gas-Institute»
Твердый пер. 1-й, 8	8, 1st Tverdi alley,
220037, г. Минск, Республика Беларусь	220037, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 293-53-31	Tel.: +375 17 293-53-31
fikov@list.ru	fikov@list.ru

studying the regularity of alterations in the instantaneous values of pressure and gas flow in main gas pipelines, for example, during startups and shutdowns of large gas consumers. Meanwhile, transients are not necessarily of a pronounced oscillatory nature, despite the fact that they are described by periodic functions. In the course of the research, the task was set to obtain a mathematical model of the process taking into account the inertial term of the equation of motion, the neglect of which is possible only if the friction losses are exceeded by 3.5–4 times over the shock pressure. An important feature of the solution that have been found is its universality, which makes it possible to significantly reduce labor costs when using it to find partial solutions to practical problems that differ in boundary conditions. The boundary conditions of the first kind are given as an arbitrary function of both the gas flow rate and its pressure. The solution is based on the widely used method of separation of Fourier variables. In order to simplify the calculations, the original differential equation is transformed in such a way that the boundary conditions acquire the property of homogeneity. It has been determined that the requirements that the boundary conditions are equal to zero at the initial moment of time introduced into the solution make it possible to obtain a concise record of the obtained analytical model, but do not limit the area of the use of the model with a surge change in the gas flow rate or pressure. The obtained analytical model of unsteady gas flow makes it possible, without using the Duhamel integral, to find analytical solutions under more complex boundary conditions than the flow rate jump. At the same time, the solutions found completely coincide with the solutions based on the Duhamel integral, but in the course of the solution that we have found it is possible to avoid integration, which has a positive effect on the applicability of this approach in the practice of engineering calculations.

Keywords: unsteady gas flow, boundary conditions of the first kind, Fourier method, gas flow rate surge

For citation: Fikov A. S. (2021) Method for Calculating Transients in a Gas Pipeline. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 64 (5), 446–458. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2021-64-5-446-458 (in Russian).

Введение

Переходные процессы течения реальных газов в газопроводах можно описать системой уравнений в частных производных [1], аналитическое решение которой затруднено и производится с некоторыми упрощениями. Систему уравнений линеаризуют различными способами: путем отбрасывания пренебрежимо малых членов уравнения движения ее сводят к дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического или параболического типа [1, 2]. Основной интерес представляет решение уравнения гиперболического типа как наиболее общее, учитывающее инерционный член уравнения движения. Пренебрежение инерционным членом, согласно [2], возможно только при условии увеличения в 3,5–4 раза потерь на трение над ударным давлением. Для решения линеаризованной системы уравнений используют различные математические методы [1, 3, 4]: разделения переменных Фурье, операционный, контурного интегрирования. Каждый из методов имеет свои достоинства и недостатки, при этом чаще используются классический метод разделения переменных Фурье и операционный метод. В электроэнергетике для решения аналогичного по типу телеграфного уравнения также используется специальный класс функций – полилогарифмы [5, 6].

Самым трудоемким по праву считается метод Фурье [1]. Однако и при использовании операционного метода встречаются ситуации, когда невозможно найти оригинал функции через табличные формы преобразования Лапласа. При этом найти решение помогает аппроксимация отображений дробно-рациональными функциями [7], что, несомненно, ведет к дополнительной потере точности решения.

В данной работе ставится задача найти решения указанной системы уравнений при задании граничных условий не конкретными функциями, а в общем виде. Это позволит значительно снизить трудоемкость получения частных решений системы для конкретизированных граничных условий, а также отказаться от использования интеграла Дюамеля [7] для решений при более сложных граничных условиях, чем скачок расхода.

Основная часть

Систему дифференциальных уравнений, описывающую течение газа по трубопроводу [2], можно представить в относительных величинах и их отклонениях от стационарных значений до начала переходного процесса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \overline{x}} + \dfrac{\partial \tilde{m}}{\partial \overline{t}} + 2a \cdot \tilde{m} = 0; \\ \dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial \overline{t}} + \dfrac{\partial \tilde{m}}{\partial \overline{x}} = 0, \end{cases}$$

где $\tilde{p}$, $\tilde{m}$ – отклонение от стационарных значений относительного давления и удельного массового расхода газа соответственно; $\overline{x}$ – относительная координата газопровода; $\overline{t}$ – относительное время течения переходного процесса; a – параметр линеаризации.

Параметр a в общем случае зависит как от координаты, так и от времени, а нахождение его оптимального значения представляет собой нетривиальную задачу, решение которой выходит за рамки данного исследования. С некоторыми подходам в определении параметра линеаризации можно ознакомиться в [2, 8–11]. Отметим лишь, что здесь параметр a рассматривается в качестве константы, значение которой необходимо определять для каждого значения $\overline{x}$.

Сведенная к линейной система уравнений в отклонениях от установившегося режима является неоднородной. Ее решение относительно $\tilde{p}$ или $\tilde{m}$ приводит к неоднородным гиперболическим уравнениям второго порядка. Общее решение системы будем искать в виде непериодической функции методом Фурье.

Начальные условия для полученной системы являются однородными: $\tilde{p}\left(\overline{x}, \overline{t} = 0\right) = 0$, $\tilde{m}\left(\overline{x}, \overline{t} = 0\right) = 0$. Зададим граничные условия первого рода на концах газопровода длиной L (в относительных единицах 1), дополнительно потребовав их равенства нулю в начальный момент времени:

$$\tilde{p}\left(\overline{x} = 0, \overline{t}\right) = F_p\left(\overline{t}\right); \; \tilde{m}\left(\overline{x} = 1, \overline{t}\right) = F_m\left(\overline{t}\right)$$

$$\text{при } \overline{t} > 0; \; \tilde{p}\left(\overline{x} = 0, \overline{t} = 0\right) = 0; \; \tilde{m}\left(\overline{x} = 1, \overline{t} = 0\right) = 0.$$

Следует отметить, что обычно на граничные условия не накладывается требование равенства нулю в начале переходного процесса. Напротив, как правило, рассматривают граничные условия для скачкообразного изменения расхода [1, 2, 4]. Здесь эти ограничения введены для получения компактной записи аналитической модели, и, как будет показано ниже, из нее нетрудно получить решение для случая скачкообразного изменения параметров.

Поскольку граничные условия являются неоднородными, произведем замену переменных в соответствии с выражениями:

$$P(\bar{x},\bar{t}) = \tilde{p}(\bar{x},\bar{t}) - (1-\bar{x})F_p(\bar{t}); \;\; M(\bar{x},\bar{t}) = \tilde{m}(\bar{x},\bar{t}) - \bar{x}\cdot F_m(\bar{t}).$$

Действительно, при такой замене начальные условия сохраняют свойство однородности, а граничные условия становятся однородными, что в дальнейшем существенно облегчит решение системы дифференциальных уравнений:

$$P(0,\bar{t}) = \tilde{p}(0,\bar{t}) - F_p(\bar{t}) = 0; \;\; M(1,\bar{t}) = \tilde{m}(1,\bar{t}) - F_m(\bar{t}) = 0.$$

С учетом новых переменных, опуская надчеркивание как символ относительных величин, запишем исходную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial M}{\partial \bar{t}} + 2a\cdot M = F_p - \bar{x}\cdot F_m' - 2a\cdot\bar{x}\cdot F_m; \\ \dfrac{\partial P}{\partial \bar{t}} + \dfrac{\partial M}{\partial \bar{x}} = (\bar{x}-1)F_p' - F_m. \end{cases}$$

Правые части уравнений обозначим новыми функциями:

$$\varphi(\bar{x},\bar{t}) = F_p - \bar{x}\cdot F_m' - 2a\cdot\bar{x}\cdot F_m; \quad \psi(\bar{x},\bar{t}) = (\bar{x}-1)F_p' - F_m.$$

Тогда решение системы можно представить в виде общего решения однородной системы и частного решения неоднородной, введя переменные $P = P_1 + P_2$ и $M = M_1 + M_2$. Следовательно, имеем две системы с однородными начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial M_1}{\partial t} + 2a\cdot M_1 = 0; \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + \dfrac{\partial M_1}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P_2}{\partial x} + \dfrac{\partial M_2}{\partial t} + 2a\cdot M_2 = \varphi; \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial t} + \dfrac{\partial M_2}{\partial x} = \psi. \end{cases}$$

Для однородной системы поиск решения будем вести, представив величины P_1 и M_1 в виде перемножения двух функций, зависящих только от одного параметра:

$$P_1(x,\, t) = X_p(x)\cdot T_p(t); \;\; M_1(x,\, t) = X_m(x)\cdot T_m(t).$$

В новых переменных однородная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} T_p\cdot X_p' + X_m\cdot T_m' + 2a\cdot X_m\cdot T_m = 0; \\ X_p\cdot T_p' + T_m\cdot X_m' = 0. \end{cases}$$

Из уравнения неразрывности, разделяя переменные, получаем соотношение, левая часть которого зависит только от координаты *x*, а правая – только от времени t. Полученное равенство возможно только в случае, когда отношение функций является константой, обозначить которую удобно через $-\mu$:

$$-\frac{X_m'}{X_p} = \frac{T_p'}{T_m} = -\mu.$$

Аналогичным образом поступаем с уравнением движения. Без нарушения общности решения потребуем, чтобы в качестве константы, определяющей отношение функций, также выступала константа μ, т. е. функции X_p и X_m будем подбирать такими, чтобы $-X'_p / X_m = \mu$:

$$-\frac{X'_p}{X_m} = \frac{T'_m}{T_p} + 2a\frac{T_m}{T_p} = \mu.$$

Отсюда можно получить однородные дифференциальные уравнения второго порядка для каждой искомой функции:

$$X''_p + \mu^2 \cdot X_p = 0; \; X''_m + \mu^2 \cdot X_m = 0; \tag{1}$$

$$T''_p + 2a \cdot T'_p + \mu^2 \cdot T_p = 0; \; T''_m + 2a \cdot T'_m + \mu^2 \cdot T_m = 0. \tag{2}$$

Общий вид решения дифференциального уравнения (1)

$$X_p = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x},$$

где $\lambda_1, \; \lambda_2$ – корни характеристического уравнения $\lambda^2 + \mu^2 = 0,$ решением которого является $\lambda = \pm i \cdot \mu.$

Подставляя в общее решение найденные корни и требуя выполнения граничных условий при $x = 0,$ получим $A_1 + A_2 = 0$.

Следует отметить, что рассматриваемое граничное условие требует равенства $P_1(0, \, t) = X_p(0) \cdot T_p(t) = 0.$ При этом случай $T_p(t) = 0$ не рассматривается, так как при любых t приводит к тривиальному решению $P_1(x, \, t) = 0$. В дельнейшем будем исключать рассмотрение тривиальных решений без акцентирования на этом внимания.

Согласно полученному результату, без нарушения общности решения, коэффициенты A_1 и A_2 можно представлять любой парой чисел, сумма которых равна нулю, за исключением нулевых коэффициентов.

В общем виде выражения для X_p и X_m запишем как:

$$X_p = -A_2\left(e^{i \cdot \mu \cdot x} - e^{-i \cdot \mu \cdot x}\right); \tag{3}$$

$$X_m = -\frac{X'_p}{\mu} = i \cdot A_2\left(e^{i \cdot \mu \cdot x} + e^{-i \cdot \mu \cdot x}\right). \tag{4}$$

Для граничных условий $X_m = 0$ при $x = 1$ получим $\left(e^{i \cdot \mu} + e^{-i \cdot \mu}\right) = 0,$ откуда с использованием формулы Эйлера можно определить искомую константу $\mu,$ принимающую множество значений:

$$\mu_k = (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \; k = \overline{1, \infty}.$$

Таким образом, решается задача Штурма – Лиувилля, а найденные значения μ_k являются собственными значениями задачи. Собственную функцию X_{pk} определим из (3):

$$X_{pk} = -A_2\left(e^{i \cdot \mu_k \cdot x} - e^{-i \cdot \mu_k \cdot x}\right) = -2A_2 \cdot i \sin\left(\mu_k x\right).$$

Положим A_2 таким, что $2A_2 \cdot i = 1$, тогда $X_{pk} = -\sin(\mu_k \cdot x)$. Функцию X_{mk} получим, подставляя принятое значение A_2 в (4):

$$X_{mk} = \cos(\mu_k \cdot x).$$

Решим задачу Штурма – Лиувилля для функций времени T_p согласно (2). В качестве общего решения по-прежнему рассматриваем функцию вида $T_p = B_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2a \cdot \lambda + \mu_k^2 = 0$, решением которого является $\lambda = -a \pm i\sqrt{\mu_k^2 - a^2}$. Введем обозначение мнимой части полученных корней $b_k = \sqrt{\mu_k^2 - a^2}$, а также комплексно-сопряженных чисел $z_k = a + i \cdot b_k$, $z_k^* = a - i \cdot b_k$.

В таких обозначениях общее решение T_p

$$T_{pk} = B_1 \cdot e^{-z_k^* \cdot t} + B_2 \cdot e^{-z_k \cdot t},$$

а искомые функции P_1 и M_1 можно представить в виде ряда:

$$P_1(x,\ t) = \mp\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_1 \cdot e^{-z_k^* \cdot t} + B_2 \cdot e^{-z_k \cdot t}\right)\sin(\mu_k \cdot x);$$

$$M_1(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\left(B_1 z_k^* e^{-z_k^* \cdot t} + B_2 z_k e^{-z_k \cdot t}\right)\cos(\mu_k \cdot x).$$

Определение из полученных выражений при начальных условиях значений коэффициентов B_1 и B_2 дает их нулевые значения, следовательно имеем $P_1(x,\ t) = 0$ и $M_1(x,\ t) = 0$.

Отметим, что хоть полученное решение однородной системы и является тривиальным, ход решения позволил определить значения собственных чисел, а также указал на необходимость поиска решения неоднородной системы в виде рядов по собственным функциям однородной системы:

$$P_2(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{pk}(t)\sin(\mu_k \cdot x);\quad M_2(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_{mk}(t)\cos(\mu_k \cdot x). \qquad (5)$$

Подставим в неоднородную систему дифференциальных уравнений общее решение (5). После дифференцирования имеем:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_k \cdot T_{pk} + T'_{mk} + 2a \cdot T_{mk}\right)\cos(\mu_k \cdot x) = \varphi(x,t); \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(T'_{pk} - \mu_k \cdot T_{mk}\right)\sin(\mu_k \cdot x) = \psi(x,t). \end{cases} \qquad (6).$$

Из полученного результата видно, что для решения системы необходимо разложить функцию $\varphi(x,\ t)$ в обобщенный Фурье [12] ряд по $\cos(\mu_k \cdot x)$, а функцию $\psi(x,\ t)$ в ряд по $\sin(\mu_k \cdot x)$.

С учетом разложений элементарных функций в обобщенный ряд Фурье запишем:

$$\varphi=-2F_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(\mu_k\cdot x)}{\mu_k}+2\left(F_m'+2a\cdot F_m\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_k(-1)^k+1\right)\frac{\cos(\mu_k\cdot x)}{\mu_k^2};$$

$$\psi=-2F_p'\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(\mu_k\cdot x)}{\mu_k^2}-2\left(F_p'+F_m\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\mu_k\cdot x)}{\mu_k}.$$

Тогда можно приравнять каждый член ряда в левой части системы (6) соответствующему члену ряда функций φ и ψ:

$$\begin{cases}\mu_k\cdot T_{pk}+T_{mk}'+2a\cdot T_{mk}=-\dfrac{2}{\mu_k}(-1)^kF_p+\dfrac{2}{\mu_k^2}\left(\mu_k(-1)^k+1\right)\left(F_m'+2a\cdot F_m\right);\\ T_{pk}'-\mu_k\cdot T_{mk}=-\dfrac{2}{\mu_k^2}(-1)^kF_p'-\dfrac{2}{\mu_k}\left(F_p'+F_m\right).\end{cases}$$

Разрешим данную систему уравнений относительно переменой T_{pk}, продифференцировав уравнения:

$$T_{pk}''+2a\cdot T_{pk}'+\mu_k^2\cdot T_{pk}=Z_k;$$

$$Z_k=4a(-1)^kF_m+2(-1)^kF_m'-2(-1)^kF_p-\frac{2}{\mu_k}\left(\frac{(-1)^k}{\mu_k}+1\right)\left(2a\cdot F_p'+F_p''\right).$$

Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка решаем методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). При этом общий вид искомой функции принимаем $T=e^{\lambda\cdot t}$, а общее решение ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Тогда общее решение однородного уравнения

$$T_p^o=A_1e^{\lambda_1\cdot t}+A_2e^{\lambda_2\cdot t},$$

где корни характеристического уравнения находятся из $\lambda^2+2a\cdot\lambda+\mu_k^2=0$ или $\lambda^2+2a\cdot\lambda+\mu_k^2=0$ и численно равны $\lambda_1=-(a-i\cdot b_k)=-z_k^*$, $\lambda_2==-(a+i\cdot b_k)=-z_k$.

С учетом найденных значений λ:

- общее решение

$$T_{pk}^o=A_1e^{-z_k^*\cdot t}+A_2e^{-z_k\cdot t}.$$

- частное решение

$$T_{pk}^{ch}=T_2(t)\left(\int\frac{T_1(t)Z_k(t)}{W}dt+B_2\right)-T_1(t)\left(\int\frac{T_2(t)Z_k(t)}{W}dt+B_1\right),$$

где B_1, B_2 – постоянные интегрирования.

Определитель Вронского с учетом принятого вида функции $T = e^{\lambda \cdot t}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{-z_k^* \cdot t} & e^{-z_k \cdot t} \\ -z_k^* e^{-z_k^* \cdot t} & -z_k e^{-z_k \cdot t} \end{vmatrix} = \left(z_k^* - z_k\right) e^{-z_k^* \cdot t} e^{-z_k \cdot t}.$$

Подставив найденное значение определителя в частное решение, получим

$$T_{pk}^{ch} = \left(\frac{1}{z_k^* - z_k} \int e^{z_k t} Z_k(t) dt + B_2 \right) e^{-z_k \cdot t} - \left(\frac{1}{z_k^* - z_k} \int e^{z_k^* \cdot t} Z_k(t) dt + B_1 \right) e^{-z_k^* \cdot t}.$$

Обозначив интегралы $Z_k^+ = \frac{1}{z_k^* - z_k} \int e^{z_k \cdot t} Z_k(t) dt$ и $Z_k^- = \frac{1}{z_k^* - z_k} \int e^{z_k^* \cdot t} Z_k(t) dt$, общее решение рассматриваемого неоднородного уравнения можно записать с учетом переобозначения констант $C_2 = A_2 + B_2$ и $C_1 = B_1 - A_1$:

$$T_{pk} = T_{pk}^o + T_{pk}^{ch} = \left(Z_k^+ + C_2\right) e^{-z_k \cdot t} - \left(Z_k^- + C_1\right) e^{-z_k^* \cdot t}.$$

Для отыскания функции T_{mk} необходимо взять производную от T_{pk}

$$T_{mk} = \frac{T'_{pk} - \psi_k}{\mu_k} = \frac{z_k^*}{\mu_k} \left(Z_k^- + C_1\right) e^{-z_k^* \cdot t} - \frac{z_k}{\mu_k} \left(Z_k^+ + C_2\right) e^{-z_k \cdot t} - \frac{\psi_k}{\mu_k}.$$

Накладывая на полученные решения T_{pk} и T_{mk} начальные условия, имеем систему уравнений, из которой можно получить постоянные интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} - Z_k^-(0); \quad C_2 = \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} - Z_k^+(0),$$

а искомые функции с учетом полученных коэффициентов:

$$T_{pk}(t) = \left(Z_k^+(t) - Z_k^+(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} \right) e^{-z_k \cdot t} - \left(Z_k^-(t) - Z_k^-(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} \right) e^{-z_k^* \cdot t};$$

$$T_{mk}(t) = \frac{z_k^*}{\mu_k} \left(Z_k^-(t) - Z_k^-(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} \right) e^{-z_k^* \cdot t} -$$

$$- \frac{z_k}{\mu_k} \left(Z_k^+(t) - Z_k^+(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} \right) e^{-z_k \cdot t} - \frac{\psi_k(t)}{\mu_k}.$$

Для обобщения записи полученных выражений введем в решение новые функции. Во-первых, введем функцию $K_k(\xi) = \frac{\xi - t}{t} \psi_k(\xi)$ и покажем, что $\psi_k(0)$ можно представить в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом

$$\int_0^t K_k'(\xi)d\xi = \frac{\xi - t}{t}\psi_k(\xi)\Big|_0^t = \psi_k(0).$$

Во-вторых, с учетом того, что имеет место соотношение $\left(Z_k^+(\xi)\right)' =$ $= \dfrac{e^{z_k\cdot\xi}Z_k(\xi)}{z_k^* - z_k}$, приращение функции Z_k^+, выраженной через неопределенный интеграл, также можно представить в виде определенного интеграла с переменным верхним пределом

$$Z_k^+(t) - Z_k^+(0) = \int_0^t \left(Z_k^+(\xi)\right)' d\xi = \frac{1}{z_k^* - z_k}\int_0^t e^{z_k\cdot\xi}Z_k(\xi)d\xi.$$

С учетом этих соображений запишем:

$$F_k^+(t) = Z_k^+(t) - Z_k^+(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} = \frac{1}{z_k^* - z_k}\int_0^t \left(e^{z_k\cdot\xi}Z_k(\xi) + K_k'(\xi)\right)d\xi;$$

$$F_k^-(t) = Z_k^-(t) - Z_k^-(0) + \frac{\psi_k(0)}{z_k^* - z_k} = \frac{1}{z_k^* - z_k}\int_0^t \left(e^{z_k^*\cdot\xi}Z_k(\xi) + K_k'(\xi)\right)d\xi.$$

А решение неоднородной системы уравнений выглядит так:

$$P_2(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(F_k^+ e^{-z_k\cdot t} - F_k^- e^{-z_k^*\cdot t}\right)\sin(\mu_k\cdot x);$$

$$M_2(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\left(z_k^*\cdot F_k^- e^{-z_k^*\cdot t} - z_k\cdot F_k^+ e^{-z_k\cdot t}\right)\cos(\mu_k\cdot x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k}{\mu_k}\cos(\mu_k\cdot x).$$

Здесь выражать экспоненту через тригонометрические функции, а также в целом переходить от решения в комплексной области к решению в действительной области целесообразно только после нахождения функций F_k^+ и F_k^-. При этом второй ряд в полученном выражении $M_2(x,t)$ легко просуммировать. Действительно, подставив в ряд значение параметра ψ_k, выраженное через исходные переменные, получим разложение в обобщенный ряд Фурье

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\frac{\cos(\mu_k\cdot x)}{\mu_k} = \left(1 - x - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)F_p' + F_m(1 - x).$$

Возвращаясь к исходным переменным, решение поставленной задачи с учетом принятых ранее обозначений можно записать:

$$\tilde{p}(\overline{x},\overline{t}) = (1 - \overline{x})F_p(\overline{t}) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(F_k^+ e^{-z_k\cdot t} - F_k^- e^{-z_k^*\cdot t}\right)\sin(\mu_k\cdot\overline{x});$$

$$\tilde{m}\left(\bar{x},\bar{t}\right)=F_m\left(\bar{t}\right)+\left(1-\bar{x}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{x}\right)\right)F_p'\left(\bar{t}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(z_k^*\cdot F_k^- e^{-z_k^*\cdot\bar{t}}-z_k\cdot F_k^+ e^{-z_k\cdot\bar{t}}\right)\frac{\cos\left(\mu_k\cdot\bar{x}\right)}{\mu_k}.$$

Пример получения частных моделей

В качестве примера, используя полученную общую модель, найдем функции давления, описывающие экспоненциальный и скачкообразный рост расхода в конце трубопровода до величины $\Delta\bar{m}$ при поддержании неизменным давления в начале газопровода. Граничные условия при экспоненциальном росте запишутся:

$$F_p=\tilde{p}\left(0,\bar{t}\right)=0;\;\; F_p'=0;\;\; F_m\left(\bar{t}\right)=\tilde{m}\left(1,\bar{t}\right)=\Delta\bar{m}\left(1-e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right);\quad F_m'=\frac{\Delta\bar{m}}{\tau}e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}.$$

Здесь, в отличие от поиска решения при скачке расхода, расход возрастает плавно от стационарного значения на величину $\Delta\bar{m}$. Скорость возрастания расхода газа зависит от величины τ.

Исходя из новых граничных условий и обозначений, определим функции:

$$\psi_k\left(\bar{t}\right)=-\frac{2}{\mu_k}\Delta\bar{m}\left(1-e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right);$$

$$K_k\left(\xi\right)=-2\frac{\xi-\bar{t}}{\bar{t}}\frac{\Delta\bar{m}}{\mu_k}\left(1-e^{-\frac{\xi}{\tau}}\right);\; Z_k\left(\xi\right)=4\left(-1\right)^k a\cdot\Delta\bar{m}\left(1+\left(\frac{1}{2a\cdot\tau}-1\right)e^{-\frac{\xi}{\tau}}\right);$$

$$F_k^+\left(\bar{t}\right)=\frac{1}{z_k^*-z_k}\int_0^{\bar{t}}\left(e^{z_k\cdot\xi}Z_k\left(\xi\right)+K_k'\left(\xi\right)\right)d\xi=$$
$$=4\left(-1\right)^k\frac{a\cdot\Delta\bar{m}}{z_k^*-z_k}\left(\left(\frac{1}{z_k}+\frac{1-2a\cdot\tau}{2a\left(z_k\cdot\tau-1\right)}e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right)e^{z_k\cdot\bar{t}}-\frac{1}{2a\left(z_k\cdot\tau-1\right)}+\frac{\tau}{z_k\cdot\tau-1}-\frac{1}{z_k}\right);$$

$$F_k^-\left(\bar{t}\right)=4\left(-1\right)^k\frac{a\cdot\Delta\bar{m}}{z_k^*-z_k}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{z_k^*}+\frac{1-2a\cdot\tau}{2a\left(z_k^*\cdot\tau-1\right)}e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right)e^{z_k^*\cdot\bar{t}}-\frac{1}{2a\left(z_k^*\cdot\tau-1\right)}+\frac{\tau}{z_k^*\cdot\tau-1}-\frac{1}{z_k^*}\right).$$

Отметим, что получение решения основывается на ряде соотношений:

$$z_k=a+i\cdot b_k;\;\; z_k^*=a-i\cdot b_k;\;\; z_k^*-z_k=-2i\cdot b_k;\;\; z_k^*+z_k=2a;\;\; z_k\cdot z_k^*=\mu_k^2,$$

с использованием которых найдем комбинацию функций:

$$F_k^+ e^{-z_k\cdot\bar{t}} - F_k^- e^{-z_k^*\cdot\bar{t}} =$$

$$= 2(-1)^k\,\Delta\bar{m}\left(\left(\left(\frac{\alpha_k}{\mu_k}\cdot\tau - \frac{2a}{\mu_k^2}\right)\cos\left(b_k\cdot\bar{t}\right) + \left(\frac{\alpha_k}{\mu_k}(a\cdot\tau - 1) - \frac{2a^2}{\mu_k^2}\right)\frac{\sin\left(b_k\cdot\bar{t}\right)}{b_k}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-a\cdot\bar{t}} + \frac{2a}{\mu_k^2} - \frac{\alpha_k}{\mu_k}\cdot\tau\cdot e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right).$$

Здесь введено обозначение $\alpha_k = \dfrac{\mu_k\left(2a\cdot\tau - 1\right)}{\mu_k^2\cdot\tau^2 - 2a\cdot\tau + 1}$.

Подставив полученное выражение в функцию отклонения давления и учитывая разложение $\bar{x}$ в обобщенный ряд Фурье по синусам $\bar{x} = -2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\mu_k^2}\sin\left(\mu_k\cdot\bar{x}\right)$, для экспоненциального роста расхода получим

$$\tilde{p}_{exp}\left(\bar{x},\,\bar{t}\right) = -2a\cdot\Delta\bar{m}\cdot\bar{x} - 2\Delta m\cdot\tau\cdot e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k}\alpha_k\sin\left(\mu_k\cdot\bar{x}\right) +$$

$$+ 2\Delta m e^{-a\cdot\bar{t}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha_k}{\mu_k}\times$$

$$\times\left(\left(\tau - \frac{2a}{\mu_k\alpha_k}\right)\cos\left(b_k\cdot\bar{t}\right) + \left(a\cdot\tau - \frac{2a^2}{\mu_k\alpha_k} - 1\right)\frac{\sin\left(b_k\cdot\bar{t}\right)}{b_k}\right)\sin\left(\mu_k\cdot\bar{x}\right).$$

Полученное выражение для определения отклонения относительного давления при экспоненциальном росте расхода является наиболее общим случаем по отношению к случаю скачка расхода, поскольку при устремлении к нулю параметра τ граничные условия при экспоненциальном росте полностью совпадают с граничными условиями при скачкообразном росте расхода газа по трубопроводу.

Действительно, рассматривая предел граничных условий, получим

$$F_m = \tilde{m}\left(1,\,\bar{t}\right) = \Delta\bar{m}\lim_{\tau\to 0}\left(1 - e^{-\frac{\bar{t}}{\tau}}\right) = \Delta\bar{m}.$$

Функция отклонения давления для случая скачка расхода газа примет вид

$$\tilde{p}_{jmp}\left(\bar{x},\,\bar{t}\right) = \lim_{\tau\to 0}\tilde{p}_{exp}\left(\bar{x},\,\bar{t}\right) =$$

$$= -2a\cdot\Delta\bar{m}\cdot\bar{x} - 2a\cdot\Delta m\cdot e^{-a\cdot\bar{t}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\mu_k^2}\times$$

$$\times\left(2\cos\left(b_k\cdot\bar{t}\right) + \left(a^2 - b_k^2\right)\frac{\sin\left(b_k\cdot\bar{t}\right)}{a\cdot b_k}\right)\sin\left(\mu_k\cdot\bar{x}\right).$$

Аналогичным образом можно получить решение для скачкообразного изменения давления газа в начале газопровода.

ВЫВОДЫ

1. На основе классического метода Фурье получено решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих неустановившееся изотермическое течение газа в трубопроводе постоянного сечения, с учетом инерционного члена уравнения движения. Представленное решение отличается учетом граничных условий первого рода в виде произвольной функции как по расходу газа, так и по его давлению, что позволяет с минимальными трудозатратами находить частные решения системы уравнений при конкретизации граничных условий.

2. Введенные в решение требования равенства нулю граничных условий в начальный момент времени позволяют получить компактную запись аналитической модели, но не ограничивают область использования модели при скачкообразном изменении расхода газа или давления.

3. Полученная аналитическая модель неустановившегося течения газа позволяет без использования интеграла Дюамеля находить аналитические решения при более сложных граничных условиях, чем скачок расхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный, И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И. А. Чарный. М.: Недра, 1975. 296 с.
2. Сложные трубопроводные системы / В. В. Грачев [и др.]. М.: Недра, 1982. 256 с.
3. Ванчин, А. Г. Методы расчета режима работы сложных магистральных газопроводов / А. Г. Ванчин // Нефтегазовое дело. 2014. № 4. С. 192–214. http://ogbus.ru/issues/4_2014/ogbus_4_2014_p192-214_VanchinAG_ru.pdf.
4. Панферов, В. И. Моделирование нестационарных процессов в газопроводах / В. И. Панферов, С. В. Панферов // Вестник ЮУрГУ. Сер. Строительство и архитектура. 2007. Вып. 4. № 14. С. 44–47. https://dspace.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/385/10.pdf.
5. Ласый, П. Г. Приближенное решение одной задачи об электрических колебаниях в проводах с помощью полилогарифмов / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 4. С. 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340.
6. Ласый, П. Г. Применение полилогарифмов к приближенному решению неоднородного телеграфного уравнения для линии без искажений / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2019. Т. 62, № 5. С. 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421.
7. Трофимов, А. С. Квазилинеаризация уравнения движения газа в трубопроводе / А. С. Трофимов, В. А. Василенко, Е. В. Кочарян // Нефтегазовое дело. 2003. № 1. С. 1–11.
8. Фиков, А. С. Наилучшая оценка параметра линеаризации математической модели нестационарного течения газа в трубопроводах / А. С. Фиков // Инновации. Образование. Энергоэффективность: материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф. / ГИПК «ГАЗ-ИНСТИТУТ». Минск, 29–30 окт. 2020. Минск, 2020. С. 82–85.
9. Фиков, А. С. Аналитическая модель переходного процесса в телескопическом газопроводе при внезапном изменении расхода газа / А. С. Фиков // Вестник науки. 2020. Т. 1, № 12. С. 127–129. https://www.вестник-науки.рф/archiv/journal-12-33-1.pdf.
10. Аствацатурьян, Р. Е. Моделирование движения газа в газопроводах с учетом сил инерции потока / Р. Е. Аствацатурьян, Е. В. Кочарян // Нефтегазовое дело. 2007. № 2. С. 1–8. http://ogbus.ru/files/ogbus/authors/Astvatsatur'yan/Astvatsatur'yan_1.pdf.

11. Паренкина, В. И. О линеаризации уравнения движения вязкой жидкости / В. И. Паренкина // Парадигмальные стратегии науки и практики в условиях формирования устойчивой бизнес-модели России: сб. науч. ст. по итогам Нац. науч.-практ. конф. / Санкт-Петербург. гос. экон. ун-т, 3–4 окт. 2019 г. СПб., 2019. С. 74–77.
12. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения / Б. П. Демидович, В. П. Моденов. СПб.: Лань, 2008. 288 с.

Поступила 19.01.2021 Подписана в печать 16.03.2021 Опубликована онлайн 30.09.2021

REFERENCES

1. Charnyi I. A. (1975) *Unsteady Movement of Real Liquid in Pipes*. Moscow, Nedra Publ. 296 (in Russian).
2. Grachev V. V., Guseinzade M. A., Ksenz B. I., Yakovlev E. I. (1982) *Complex Pipeline Systems*. Moscow, Nedra Publ. 256 (in Russian).
3. Vanchin A. G. (2014) Methods for Calculating the Operating Mode of Complex Main Gas Pipelines. *Neftegazovoe Delo = Oil and Gas Busines*, (4), 192–214 (in Russian).
4. Panferov V. I., Panferov S. V. (2007) Modeling of Non-Stationary Processes in Gas Pipelines. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Stroitel'stvo i Arkhitektura"* [Bulletin of South Ural State University. Series "Construction and Architecture"], 4 (14), 44–47 (in Russian).
5. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2017) Approximate Solution of One Problem on Electrical Oscillations in Wires with the Use of Polylogarithms. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations,* 60 (4), 334–340. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2017-60-4-334-340 (in Russian).
6. Lasy P. G., Meleshko I. N. (2019) Application of Polylogarithms to the Approximate Solution of the Inhomogeneous Telegraph Equation for the Distortionless Line. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations,* 62 (5), 413–421. https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-5-413-421 (in Russian).
7. Trofimov A. S., Vasilenko V. A., Kocharyan E. V. (2003) Quasi-Linearization of the Equation of Gas Motion in the Pipeline. *Neftegazovoe Delo = Oil and Gas Business,* (1), 1–11 (in Russian).
8. Fikov A. S. (2020) The Best Estimate of the Linearization Parameter of a Mathematical Model of Non-Stationary Gas Flow in Pipelines. *Innovatsii. Obrazovanie. Energoeffektivnost': Materialy XIV Mezhdunar. Nauch.-Prakt. Konf.* [Education. Energy Efficiency: Materials of the XIV International Scientific and Practical Conference], Minsk, October 29–30, 2020. Minsk. 82–85 (in Russian).
9. Fikov A. S. (2020) Analytical Model of The Transition Process in a Telescopic Gas Pipeline with a Sudden Change in Gas Flow. *Vestnik Nauki* [Science Herald], 1 (12), 127–129 (in Russian).
10. Astvatsatur'yan R. E., Kocharyan E. V. (2007) Modeling of Gas Movement in Gas Pipelines Taking into Account the Forces of Inertia of the Flow. *Neftegazovoe Delo = Oil and Gas Business*, (2), 1–8 (in Russian).
11. Parenkina V. I. (2019) On the Linearization of the Equation of Motion of a Viscous Fluid. *Paradigmal'nye Strategii Nauki i Praktiki v Usloviyakh Formirovaniya Ustoichivoi Biznes-Modeli Rossii: Sb. Nauch. St. po Itogam Nats. Nauch.-Prakt. Konf.* [Paradigmatic Strategies of Science and Practice in the Conditions of the Formation of a Sustainable Business Model of Russia: Collection of Scientific Papers Based on the Results of the National Scientific and Practical Conference], October 3–4, 2019, St. Petersburg State University of Economics. St. Petersburg. 74–77 (in Russian).
12. Demidovich B. P., Modenov V. P. (2008) *Differential Equations*. St. Petersburg, Lan' Publ. 288 (in Russian).

Received: 19 January 2021 Accepted: 16 March 2021 Published online: 30 September 2021