

УДК 539.3

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНКИ В ЩЕЛИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В.

Белорусский национальный технический университет

Решение плоской контактной задачи для штампа, расположенного в щели упругой плоскости, впервые опубликовано в [1]. В то же время авторы [2] получили приближенное решение этой задачи с помощью двойных сил, которые создают разрыв сплошности упругой плоскости. Методом ортогональных многочленов [3] решение получено в [4, 5]. В [6] рассматриваемая задача классифицируется как задача об отслоившемся включении, а также приводится ее решение. Осесимметричная задача для круглой пластинки рассмотрена в [7]. В [8] решена задача для пластинки вблизи границы упругой полуплоскости.

Рассмотрим пластинку конечной изгибной жесткостью  $D$ , длиной  $2l$ , прижимаемой вертикальной сосредоточенной силой  $P$  к верхней границе горизонтальной щели в упругой плоскости с постоянными  $E$  и  $\nu$ . Будем считать, что на контакте пластинки с плоскостью возникают только нормальные контактные напряжения. Относительные вертикальные перемещения границы горизонтальной щели (рис. 1), к которой приложена единичная вертикальная сила, определяются по формуле [4]

$$K(x, t) = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \ln \left| 1 - \frac{x t}{l^2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{l^2}} \right|, \quad (1)$$

где  $x$  – абсцисса точки щели, в которой определяется перемещение;  $t$  – то же, в которой приложена сила.

Обозначим  $p(x)$  – искомым закон распределения контактных напряжений. Следуя в дальнейшем последовательности изложения П. И. Клубину [9], составим следующие разрешающие уравнения:

- интегральное уравнение рассматриваемой контактной задачи для вертикальных перемещений верхней грани щели

$$V(x) = \int_{-l}^l p(t) K(x, t) dt; \quad (2)$$

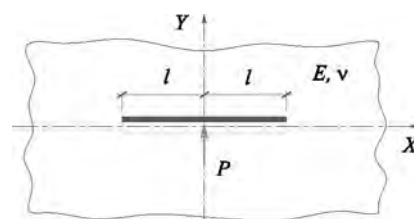


Рис. 1

- уравнения равновесия:

$$\int_{-l}^l p(x) dx = P; \quad \int_{-l}^l x p(x) dx = 0; \quad (3)$$

- дифференциальное уравнение изгиба пластинки

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = -\frac{p(x)}{D}; \quad (4)$$

- граничные условия для изгибающего момента и поперечной силы на краях пластинки при  $x = \pm l$ :

$$M = -D \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0; \quad Q = -D \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0; \quad (5)$$

- условие равенства прогибов пластинки  $Y(x)$  вертикальным перемещениям границы щели  $V(x)$

$$Y(x) = V(x). \quad (6)$$

Будем искать неизвестный закон распределения контактных напряжений в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода с весом

$$p(x) = \frac{\sqrt{1-\frac{x}{l}} + \sqrt{1+\frac{x}{l}}}{\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{4}}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} T_{2m} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}} \right), \quad (7)$$

где  $A_{2m}$  – неизвестные коэффициенты;  $T_{2m}(z)$  – полиномы Чебышева первого рода [10].

Заметим, что полиномы Чебышева

$$T_{2m+1} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, m,$$

имеют разрыв в производной при  $x = 0$  и поэтому отброшены.

Тогда второе уравнение равновесия (3) удовлетворяется тождественно ввиду четности принятых полиномов Чебышева, а первое дает ввиду их ортогональности

$$A_0 = \frac{P}{2\pi\sqrt{2}l}. \quad (8)$$

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_{-l}^l \frac{\sqrt{1-\frac{x}{l}} + \sqrt{1+\frac{x}{l}}}{\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{4}}} T_{2m} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}} \right) \times$$

$$\frac{D}{l^4} Y(x) = A_0 F_0(x) + A_2 F_2(x) + A_4 F_4(x) + \dots + C_4 \frac{D}{l^4} + C_3 \frac{Dx}{l^4} + C_2 \frac{x^2}{l^4} + C_1 \frac{x^3}{l^4}; \quad (12)$$

$$F_0(x) = \frac{1}{72\sqrt{2}} \left[ \sqrt{2\cos\eta} \left( 31\cos\frac{\eta}{2} - 3\cos\frac{3\eta}{2} - 11\cos\frac{5\eta}{2} \right) + 57\ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) - 36\cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) + 6\arcsin \left( \sqrt{2\sin\frac{\eta}{2}} \right) (21\sin\eta - 2\sin 3\eta) \right];$$

$$F_2(x) = \frac{1}{192} \left[ 2\sqrt{\cos\eta} \left( -68\cos\frac{\eta}{2} + 57\cos\frac{3\eta}{2} + 8\cos\frac{5\eta}{2} - 2\cos\frac{7\eta}{2} \right) + 111\sqrt{2}\ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) - 72\sqrt{2}\cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) + 48\sqrt{2}\sin\eta \arcsin \left( \sqrt{2\sin\frac{\eta}{2}} \right) \right]; \quad (13)$$

$$F_4(x) = \frac{1}{32} \left[ \frac{2}{15}\sqrt{\cos\eta} \left( -673\cos\frac{\eta}{2} + 455\cos\frac{3\eta}{2} + 79\cos\frac{5\eta}{2} - 10\cos\frac{7\eta}{2} + 2\cos\frac{9\eta}{2} \right) + 47\sqrt{2}\ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) - 32\sqrt{2}\cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2\cos\frac{\eta}{2}} + \sqrt{\cos\eta} \right) - 2\sqrt{2}\sin\eta \arcsin \left( \sqrt{2\sin\frac{\eta}{2}} \right) \right];$$

$$\times T_{2n} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}} \right) dx. \quad (9)$$

Сделаем в (9) подстановку  $x = l \sin\eta$ . Получаем

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\frac{\eta}{2}}{\sqrt{\cos\eta}} T_{2m} \left( \sqrt{2\sin\frac{\eta}{2}} \right) T_{2n} \left( \sqrt{2\sin\frac{\eta}{2}} \right) d\eta. \quad (10)$$

Если в (10) принять  $t = \sqrt{2}\sin\frac{\eta}{2}$ , то придем

к известному из теории ортогональных многочленов свойству ортогональности полиномов Чебышева первого рода [10]:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(t) T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} \pi, & m = n = 0; \\ \frac{\pi}{2}, & m = n > 0; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad (11)$$

но только с множителем  $2\sqrt{2}$ . Отметим, что (8) является точным решением для жесткого штампа [1].

Решение дифференциального уравнения (4) при условии (7) представим в следующей форме:

$$\sin \eta = \frac{x}{l}; \quad \cos \eta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}; \quad \sin \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right)}; \quad \cos \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right)}.$$

Для выполнения граничных условий запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента:

$$Q(x) = P \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} - 4lA_2 \sqrt{\cos \eta} \sin \frac{\eta}{2} + 4lA_4 \sqrt{\cos \eta} \left( \sin \frac{3\eta}{2} - 2 \sin \frac{\eta}{2} \right) + \dots + C_1;$$

$$M(x) = \frac{Pl}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{l}} + \sqrt{1 + \frac{x}{l}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{l^2}} + \frac{1}{2} \ln \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{l}} + \sqrt{1 + \frac{x}{l}}}{2} + \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right) \frac{x}{l} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} l^2 A_2 \left[ 2\sqrt{\cos \eta} \left( -2 \cos \frac{\eta}{2} + \cos \frac{3\eta}{2} \right) + 3\sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) \right] +$$

$$+ 4l^2 A_4 \left[ -\frac{1}{6} \sqrt{\cos \eta} \left( 10 \cos \frac{\eta}{2} - 3 \cos \frac{3\eta}{2} + \cos \frac{5\eta}{2} \right) + \sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) \right] + \dots + C_1 x + C_2. \quad (14)$$

Выполнение граничных условий (5) и условий симметрии при учете (14) и (12) дает:

$$C_2 = C_3 = 0; \quad C_1 = -\frac{P}{2} \operatorname{sign} \frac{x}{l}. \quad (15)$$

Для практически важного случая жесткого штампа приводим формулы для поперечной силы и изгибающего момента в сечениях пластинки

$$Q(x) = P \left( \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sign} x;$$

$$M(x) = \frac{Pl}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{l}} + \sqrt{1 + \frac{x}{l}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{l^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ln \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{l}} + \sqrt{1 + \frac{x}{l}}}{2} + \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{l} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}} \right] - \frac{Pl}{2} \frac{x}{l}, \quad x \geq 0. \quad (16)$$

Причем максимальный изгибающий момент в центре пластинки

$$M_{\max} = \frac{Pl}{2\pi} \left[ \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$$

превышает аналогичный для пластинки на упругой полуплоскости [2].

Подставим (7) в интегральное уравнение (2), сделаем подстановку  $x = l \sin \xi$ ;  $t = l \sin \eta$  и используем спектральное соотношение Г. Я. Попова (7.5) при  $\alpha = \pi/2$  [6, с. 300]:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \left| \sin \frac{\xi - \eta}{2} \right| \frac{\cos \eta}{\sqrt{\cos \eta}} T_{2n} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) d\eta =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \pi \ln 2, \quad n = 0;$$

$$-\frac{\pi}{2n} T_{2n} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\xi}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

В итоге получаем для перемещений верхнего берега щели

$$V(x) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} l \left[ -4\pi\sqrt{2} \ln 2 A_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\sqrt{2}}{n} A_{2n} T_{2n} \left( \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2/l^2}} \right) \right]. \quad (18)$$

Так как в бесконечной изотропной однородной плоскости перемещения определяются с точностью до неопределенной постоянной [2, 9], которой является  $C_4$  в (12), приравниваем относительные перемещения верхнего берега щели и прогибы пластинки

$$V(x) - V(0) = Y(x) - Y(0). \quad (19)$$

Обе части полученного соотношения умножим на  $\frac{\sqrt{1-x/l} + \sqrt{1+x/l}}{(1-x^2/l^2)^{3/4}} T_{2n}(\sqrt{1-\sqrt{1-x^2/l^2}}) dx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и проинтегрируем в пределах  $(-l, l)$ . Полученную систему линейных алгебраических уравнений можно решать способом усечения [3].

Как показано в [2, 3, 9], при применении способа ортогональных многочленов достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда (7). Поэтому для первых трех коэффициентов разложения (7) можно получить:

$$A_2 = -\frac{0,1164\beta(2028,3539 + \beta)}{(42,6311 + \beta)(952,8538 + \beta)} \frac{P}{l}; \quad (20)$$

$$A_4 = \frac{(188,7709 + 0,6126\beta)\beta}{40621,2263 + \beta(995,4850 + \beta)} \frac{P}{l},$$

где  $\beta = \frac{\pi E l^3}{(1-\nu^2)D}$  – показатель гибкости по

М. И. Горбунову-Посадову [2]. Структура получаемой усеченной системы такова, что при  $\beta = 0$  все  $A_{2m} = 0$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

На рис. 2, 3 приведены графики распределения контактных напряжений, поперечных сил и изгибающих моментов на полудлине пластинки при  $\beta = 15$  по (20).

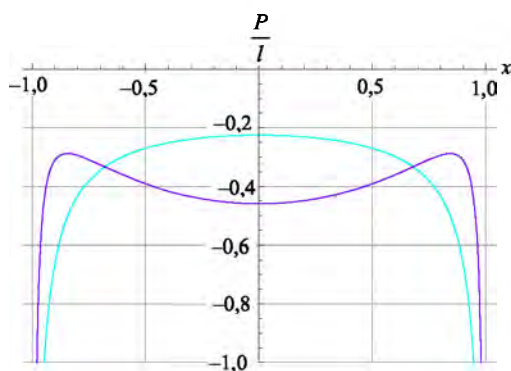


Рис. 2

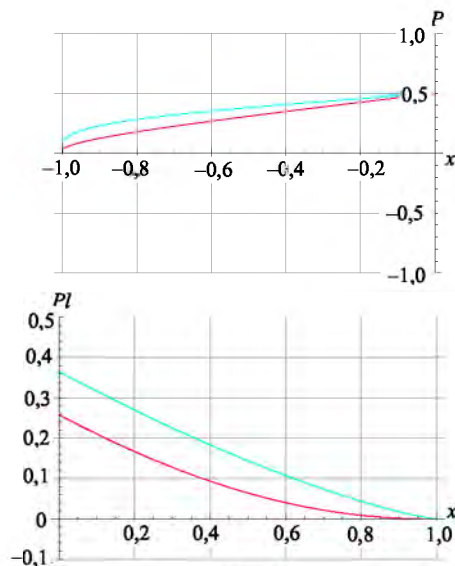


Рис. 3

### ВЫВОД

Получено решение контактной задачи для круглой пластинки в щели бесконечной плоскости способом ортогональных многочленов, причем в отличие от решения [5] точно выделяется особенность в контактных напряжениях у краев пластинки. Данные результаты могут использоваться для расчетов анкерных плит глубокого заложения и закладных деталей железобетонных конструкций.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фотиева, Н. Н. К расчету анкерных плит глубокого заложения / Н. Н. Фотиева, В. А. Лыткин // ОФимГ. – 1969. – № 5. – С. 8–10.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 680 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с.
4. Босаков, С. В. Решение одной контактной задачи для плоскости с щелью / С. В. Босаков // ПМ. – 1977. – Т. XIII, № 7. – С. 127–129.
5. Босаков, С. В. Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости / С. В. Босаков // ПМ. – 1980. – Т. XVI, № 3. – С. 81–87.
6. Попов, Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
7. Жуковский, И. Н. Контактная задача для пластинки, расположенной в щели бесконечного тела / И. Н. Жуковский // ПМ. – 1975. – Т. XI, № 11. – С. 124–128.
8. Босаков, С. В. Плоская задача расчета анкерных плит неглубокого заложения / С. В. Босаков // ПМ. – 1985. – Т. XXII, № 1. – С. 45–52.
9. Клубин, П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании / П. И. Клубин // Инж. сб. – 1952. – № 12. – С. 95–135.
10. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1963. – 1100 с.

Поступила 22.10.2010