

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-399-404>

УДК 620.10

## Теоретический анализ перемещений тонких стержней изогнутой формы

Канд. техн. наук, доц. В. П. Луговой<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021  
Belarusian National Technical University, 2021

**Реферат.** Приведен сравнительный анализ перемещений изогнутых стержней различных форм кривизны, которые могут быть применены в качестве инструментов для ультразвуковой обработки отверстий в хрупких материалах. Традиционная обработка отверстий ультразвуковым способом основана на использовании прямолинейных стержней: у них амплитуда перемещений на рабочем (свободном) конце соответствует величине перемещений в точке его присоединения к концентратору ультразвуковых колебаний. Дополнение конфигурации прямого стержня криволинейной формой в виде дуги окружности или спирали, скрученной на один виток, позволит получить дополнительные перемещения, вызванные упругими свойствами участка с изогнутой формой. Рассмотрено несколько расчетных схем криволинейного стержня, ограниченного углами  $\varphi$ , равными  $\pi/2$ ,  $\pi$  и  $2\pi$ , с различным направлением действия внешней силы. Полученные результаты показали, что увеличение угла дуги окружности приводит к соответствующему повышению показателя упругого перемещения свободного конца стержня. В этом случае суммарные перемещения свободного конца стержня будут складываться из перемещений, вызванных колебаниями акустической системы, и перемещений криволинейного тонкого стержня от внешней силы. Расчетами установлено, что на величину упругих перемещений криволинейных стержней влияют форма и величина угла, направление внешней силы, радиус кривизны, жесткость поперечного сечения. Рассмотренные схемы тонких стержней с криволинейными участками могут найти практическое применение в ультразвуковых колебательных системах для обработки отверстий малого диаметра в хрупких материалах. При этом увеличивается интенсивность колебаний инструмента и повышается производительность процесса.

**Ключевые слова:** упругие перемещения, колебания, стержни изогнутой формы, расчет, ультразвуковая обработка отверстий

**Для цитирования:** Луговой, В. П. Теоретический анализ перемещений тонких стержней изогнутой формы / В. П. Луговой // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 5. С. 399–404. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-399-404>

## Theoretical Analysis of Thin Curved Rod Displacements

V. P. Lugovoi<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The paper presents a comparative theoretical analysis of the movements of the curved rods of various curvature forms, which can be applied as tools for ultrasonic treatment of holes in fragile materials. It has been shown that the traditional processing of holes by an ultrasonic method is based on the use of straight rods, in which the amplitudes of displacements on the working – free end corresponds to the value of displacements at the point of its attachment to the ultrasonic oscillation concentrator. Supplementing the configuration of a straight rod with a curvilinear shape in the form of a circular arc or a spiral twisted by one turn will allow obtaining additional displacements caused by the elastic properties of a section with a curved shape. The paper considers several calculated schemes of a curvilinear rod bounded by angles  $\varphi$  equal to  $\pi/2$ ,  $\pi$  and  $2\pi$ ,

### Адрес для переписки

Луговой Вячеслав Петрович  
Белорусский национальный технический университет  
ул. Я. Коласа, 22,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-91-01  
Vlugovoj@bntu.by

### Address for correspondence

Lugovoi Vjacheslav P.  
Belarusian National Technical University  
22, Ya. Kolasa str.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-91-01  
Vlugovoj@bntu.by

with a different direction of the external force action. The obtained results have shown that an increase in the circular arc angle leads to a corresponding increase in the elastic displacement index of the rod free end. In this case, the total displacements of the rod free end will be made from displacements caused by vibrations of the acoustic system and the displacements of a curved thin rod from an external force. Calculations have established that the magnitude of the elastic displacements of curved rods is influenced by the shape and magnitude of the angle, the direction of the external force, the radius of curvature, the rigidity of the cross section. The considered schemes of thin rods with curvilinear sections can find practical application in ultrasonic oscillatory systems for processing small-diameter holes in fragile materials. This increases the intensity of tool oscillations and improves the process performance.

**Keywords:** elastic displacements, oscillations, rods of curved shape, calculation, ultrasonic processing of holes

**For citation:** Lugovoi V. P. (2021) Theoretical Analysis of Thin Curved Rod Displacements. *Science and Technique*. 20 (5), 399–404. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-399-404> (in Russian)

## Введение

Традиционное прошивание (так называемое сверление) хрупких материалов осуществляется ультразвуковым способом с использованием акустической системы (рис. 1), которая состоит из пьезокерамического преобразователя электрических сигналов в механические колебания, усилителя колебаний (т. е. конусного концентратора колебаний) и инструмента в виде прямолинейного стержня (тонкой упругой проволоки).



Рис. 1. Акустическая система для ультразвуковой обработки отверстий

Fig. 1. Acoustic system for ultrasound-processed holes

Основными технологическими показателями механической обработки являются производительность и точность размеров отверстия. Производительность ультразвуковой обработки зависит от акустических и технологических факторов. К акустическим факторам относятся частота, амплитуда и тип колебаний, а к технологическим – род материала заготовки и инструмента, скорость относительного перемещения, усилие прижима инструмента, вид и размер абразивных зерен, концентрация абразива в суспензии, глубина обработки и условия сменяемости абразива. Многие из этих факторов находятся в тесной взаимосвязи. Теоретически производительность обработки при неизменной частоте колебаний инструмента можно оценить [1, 2] по формуле

$$Q = \psi (u_0^2 P_{cm})^a f^b, \quad (1)$$

где  $\psi$  – коэффициент, зависящий от свойств обрабатываемого материала и абразивной жидкости;  $u_0$  – амплитуда колебаний, мкм;  $P_{cm}$  – сила подачи, Н;  $f$  – частота, Гц;  $a, b$  – показатель степени, зависящий от условий обработки,  $a = 0,5-1,0$ ,  $b = 0,5-1,0$ .

Из (1) видно, что решающим фактором, обеспечивающим повышение производительности обработки, является амплитуда колебаний, и потому способы повышения интенсивности колебаний за счет ее усиления имеют теоретический и практический интерес. Один из таких способов заключается в использовании потенциальной энергии упругих элементов, к которым можно отнести тонкие криволинейные стержни. Перемещение свободного конца прямого инструмента соответствует амплитуде ультразвуковых колебаний на рабочем торце концентратора, т. е.  $u_0 = a \cos \omega t$ .

Из формулы (1) следует, что высокая производительность ультразвуковой обработки при неизменной частоте колебаний может быть достигнута увеличением амплитуды колебаний. Эта цель достигается различными способами, к числу которых, кроме перечисленных ранее факторов, следует отнести конструктивное изменение инструмента. Один из таких способов – использование инструментов с упругими свойствами, выполняющих функцию накопителей потенциальной энергии. Упругими считаются различные элементы машин и приборов, способные существенно деформироваться под действием внешних сил и восстанавливать свои размеры [3, 4]. Они разделяются на стержневые элементы, полученные из проволоки или ленты, и оболочковые, выполненные из листо-

вого материала. Теоретическому исследованию колебаний упругих тел посвящены работы П. Пфейффера [5], С. П. Тимошенко [6], Г. С. Писаренко [7, 8].

Сегодня наиболее известны упругие элементы в виде деталей первой группы: либо в качестве промежуточного трансформатора колебаний, либо в виде упругого инструмента акустических систем. К элементам первой группы относятся упругие кольца с переменным сечением, выполняющие одновременно функцию резонатора усилителя ультразвуковых колебаний акустических систем [4]. Примером могут служить устройство и способ обработки хрупких материалов с кольцевым концентратором [5, 9, 10], который обеспечивает повышение производительности прошивания отверстий в хрупких материалах различной твердости в два и более раз по сравнению с традиционным методом ультразвуковой обработки. К упругим элементам второй группы можно отнести спиральную полосу, винтовую пружину, упругое кольцо и пр.

### Сравнительный расчет перемещений криволинейных стержней

Изучим возможность применения криволинейного упругого стержня с постоянным поперечным сечением, выполненного из пружинной проволоки, в качестве инструмента для прошивания отверстий. Для сравнения величин перемещений свободного конца стержня рассмотрим две расчетные схемы перемещений криволинейного и Г-образного стержней (рис. 2).

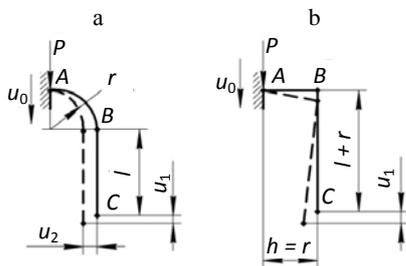


Рис. 2. Схемы перемещений криволинейного и Г-образного стержней

Fig. 2. Movement diagram of curved neuro and Г-shaped rods

Стержни образованы из двух частей: из изогнутой поперечной части *AB* и продольного стержня *BC*. Изогнутая часть выполнена в виде

квадранта окружности с постоянным радиусом *r*. Присоединенный к источнику ультразвуковых колебаний упругий элемент получает кинематическое возбуждение вынужденных гармонических плоскопараллельных колебаний (перемещений) в точке *A* величиной  $u_0 = a \cos \omega t$ .

Свободный конец стержня в точке *C* получает упругое перемещение  $u_1$  от действия силы *P*. Сделаем допущение о том, что прямолинейный участок в процессе колебаний не изменяет своей первоначальной длины *l*, т. е. вертикальные перемещения прямолинейного участка в точках *B* и *C* будут одинаковыми. В этом случае перемещение свободного конца стержня равняется сумме перемещений от кинематического возбуждения  $u_0$  и упругих перемещений  $u_1$  [7], вызванных действием силы *P*

$$u = u_0 + u_1. \quad (2)$$

Рассмотрим первую схему криволинейного стержня на участке *AB* (рис. 3).

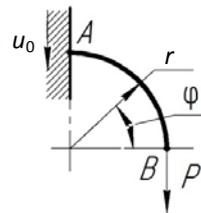


Рис. 3. Расчетная схема криволинейного стержня  
Fig. 3. Calculated scheme of curvilinear rod

Каноническое уравнение из условия равенства нулю угла поворота в точке *A* имеет вид [3]

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1P} = 0,$$

где  $X_1 \delta_{11}$  – взаимный угол поворота под действие момента  $X_1$ ;  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{1P}$  – взаимный угол поворота под действием единичных моментов и внешних сил, которые можно найти с помощью интеграла Мора:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} ds; \quad \delta_{1P} = \int \frac{M_P M_1}{EI} ds. \quad (3)$$

Изгибающие моменты  $M_P$  и  $M_1$  от действия внешней и единичной сил запишутся в виде:

$$M_P = Pr(1 - \cos \varphi); \quad M_1 = -1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Тогда:

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} [Pr(1 - \cos \varphi)(-1)] r d\varphi = \frac{Pr^2}{EI} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} r d\varphi = \frac{r}{EI} \frac{\pi}{2}.$$

Находим неизвестный момент

$$X_1 = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{1P}} = Pr \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \approx 0,36Pr.$$

Суммарный изгибающий момент

$$M = M_p + X_1 M_1 = Pr(0,64 - \cos\varphi).$$

В произвольном сечении изгибающий момент при  $P = 1$  определится из уравнения

$$M = r(0,64 - \cos\varphi).$$

Вычислив интеграл Мора, получим перемещение в точке

$$u_1 = \int \frac{M_p M_1}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{Pr^3}{EI} (0,64 - \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{Pr^3}{EI}. \quad (4)$$

Как видно из формулы (4), основным параметром, влияющим на величину упругого перемещения свободного конца стержня, является радиус кривизны изогнутой части  $AB$ . Увеличению значения перемещения способствует также уменьшение показателя жесткости поперечного сечения стержня  $EI$ .

Для сравнения полученных результатов рассмотрим идентичную расчетную схему Г-образного стержня, изогнутого под прямым углом (рис. 2b). Длину плеча на горизонтальном участке примем равной радиусу кривизны изогнутого стержня радиусом  $h = r$ , а длину вертикального участка  $(l + r)$ . Величину перемещения на конце горизонтального участка вычисляем по формуле [8]

$$u'_1 \approx 0,1 \frac{Pr^3}{EI}. \quad (5)$$

Сравнение уравнений (4) и (5) позволяет сделать вывод, что криволинейный стержень дает возможность получить сравнительно большее перемещение свободного конца, чем изогнутый стержень второго типа.

Для визуальной оценки и сравнения интенсивности колебаний рассмотренных схем про-

ведены эксперименты с использованием изогнутой пружинной проволоки, изготовленной из стали марки 65Г, с круглым поперечным сечением диаметром 1 мм. Косвенную оценку интенсивности перемещений в криволинейных стержнях при возбуждении ультразвуковых колебаний дают фигуры Хладни. Для этой цели в проволоке, присоединенной к коническому волноводу ультразвукового преобразователя, возбуждались ультразвуковые колебания частотой 21 кГц. При этом стоячие волны регистрируются на колеблющейся пластине с обсыпанным мелким порошком. В результате порошок смещается из пучностей колебаний с наибольшей амплитудой колебаний в узлы, где колебания отсутствуют. На рис. 4а приведена фотография фигуры Хладни, образованной Г-образным стержнем, а на рис. 4б – образованной криволинейными стержнями с различными радиусами кривизны.

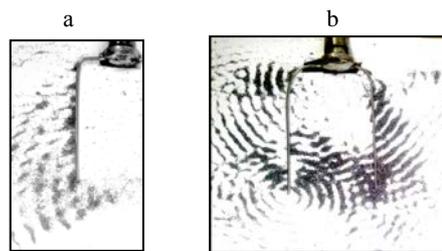


Рис. 4. Фотографии фигур Хладни, полученные при колебании стержней: а – криволинейной и Г-образной форм; б – с различными радиусами кривизны

Fig. 4. Photos of Chladni figures, obtained when rods vibrate: а – curvilinear and Г-shaped forms; б – with different radii of curvature

Из рис. 4 видно, что криволинейные элементы вызывают более интенсивные колебания, чем прямолинейные. Причем увеличение радиуса кривизны сопровождается гораздо большими перемещениями свободного конца стержня (рис. 4b).

На рис. 5 приведены схемы с двумя различными положениями криволинейного стержня с углом  $\varphi \leq \pi$ . Вертикальное перемещение конца криволинейного стержня (в точке  $B$ ) можно определить, выполнив интеграл Мора. Найдем перемещение точки  $B$  для расчетной схемы (рис. 5а), подставив величины изгибающих моментов от действия внешней и единичной сил для угла  $0 \leq \varphi \leq \pi$  в интеграл Мора:

$$M_p = -Pr \sin \varphi; \quad M_1 = (-1)r \sin \varphi;$$

$$u_1 = \int \frac{M_p M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^\pi \frac{Pr^3}{EI} \sin^2 d\varphi = \frac{Pr^3}{EI} \frac{\pi}{2} = 1,58 \frac{Pr^3}{EI}. \quad (6)$$

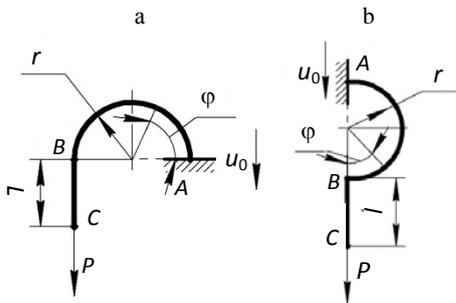


Рис. 5. Схемы криволинейных стержней в форме дуги полуокружности  
Fig. 5. Schemes of curvilinear rods in the form of semicircle arc

Для криволинейного стержня, показанного на рис. 5b, изгибающие моменты от сил:

$$M_p = Pr \sin \varphi; \quad M_1 = r(1 - \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Вычислив интеграл Мора, определим величину вертикального перемещения в точке B

$$u_1 = \int \frac{M_p M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int_0^\pi (Pr \sin \varphi)(1 - \cos \varphi) ds = \frac{Pr^3}{EI} \left( 1 - \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right).$$

При  $\varphi = \pi$  получим

$$u_1 = 2 \frac{Pr^3}{EI}. \quad (7)$$

На фотографиях рис. 6 демонстрируются фигуры Хладни, полученные для приведенных выше вариантов. В первом случае зона с наиболее интенсивными колебаниями расположена по периметру криволинейного участка, а во втором – колебания концентрируются на свободном конце стержня.

Рассмотрим еще один вариант схемы с криволинейным стержнем, ограниченным углом  $\varphi \leq 2\pi$ , который имеет форму незамкнутого кольца, т. е. пружины с одним витком (рис. 7а).



Рис. 6. Фигуры Хладни ( $\varphi = \pi$ )  
Fig. 6. Chladni figures ( $\varphi = \pi$ )

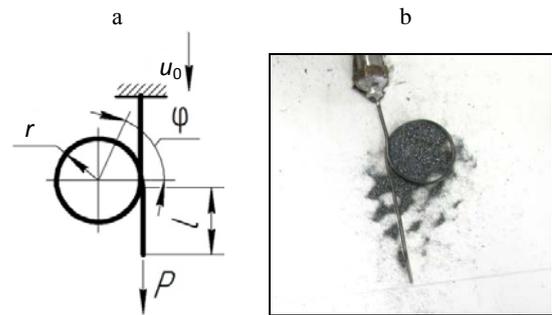


Рис. 7. Незамкнутое кольцо:  
а – расчетная схема; б – фигура Хладни  
Fig. 7. Open ring:  
a – calculated scheme; b – Chladni figure

Подставим в интеграл Мора величины изгибающих моментов от действия внешней и единичной сил  $M_p = Pr(1 - \cos \varphi)$  и  $M_{p1} = 1r \sin \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ )

$$u_1 = \int \frac{M_p M_1}{EI} ds = \frac{Pr^3}{EI} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} (3\varphi - 4 \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi). \quad (8)$$

Вертикальное перемещение свободного конца пружинного кольца, изогнутого на угол  $\varphi = 2\pi$ , определится из выражения

$$u_1 \approx 9,4 \frac{Pr^3}{EI}. \quad (9)$$

Таким образом, теоретически показано, что при действии статической силы наибольшие упругие перемещения свободного конца криволинейного стержня можно получить по схеме, представленной на рис. 7а. Однако следует учесть, что упругие перемещения спиральной пружины сопровождаются одновременными радиальными перемещениями, которые

при расчете не были учтены. Фигуры Хладни при наложении ультразвуковых колебаний к закрученной спирали показаны на рис. 7b. Можно полагать, что мода и величина упругих перемещений свободного конца стержня, закрученного в пружинную спираль, в диапазоне ультразвуковых частот имеют сложный характер и зависят от ряда дополнительных факторов (длины прямолинейных участков до и после спирали, резонансных размеров спирали и пр.), которые требуют подтверждения экспериментальными исследованиями.

## ВЫВОДЫ

1. Теоретически показано, что использование тонких криволинейных стержней различных типов позволяет получить перемещение свободного конца в условиях колебаний благодаря упругим свойствам их изогнутой части.

2. Установлено, что на величину этих упругих перемещений оказывают влияние угол и радиус кривизны криволинейного участка, направление действия внешней силы, а также жесткость поперечного сечения стержня.

3. Рассмотренные модели криволинейных стержней могут быть успешно применены в ультразвуковых системах для повышения производительности сверления (прошивания) отверстий малого диаметра в хрупких материалах (камнях, стекле, керамике и пр.).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Марков, А. И. Ультразвуковое алмазное сверление и фрезерование хрупких неметаллических материалов / А. И. Марков, И. Д. Устинов. М.: Машиностроение, 1979. 39 с.
2. Амитан, Г. Л. Справочник по электрохимическим и электрофизическим методам обработки / Г. Л. Амитан, И. А. Байсупов, Ю. М. Барон. Л.: Машиностроение, 1988. 719 с.
3. Андреева, Л. Е. Упругие элементы приборов / Л. Е. Андреева. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
4. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. М.: Машиностроение, 1965. 240 с.
5. Пфейффер, П. Колебания упругих тел / П. Пфейффер; пер. с нем. А. И. Лурье. Л.: Госуд. техн.-теор. изд-во ОНТИ, 1934. 154 с.
6. Тимошенко, С. П. Сопrotивление материалов. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко; пер. с англ. М.: Наука, 1965. 364 с.
7. Писаренко, Г. С. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии / Г. С. Писаренко, О. Е. Богинич. Киев: Наукова думка, 1982. 220 с.

8. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. 2-е изд. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.
9. Компьютерное моделирование и анализ колебаний кольцевого концентратора ультразвуковой системы / В. П. Луговой [и др.] // Наука и техника. 2018. Т. 17, № 3. С. 220–227. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-3-220-227>.
10. Луговой, В. П. Прошивание отверстий в ювелирных камнях с использованием ультразвуковых систем с кольцевыми концентраторами / В. П. Луговой, В. Т. Минченя, И. В. Луговой // Дизайн. Теория. Практика. М.: МГУПИ, 2015. Вып. 22. С. 36.

Поступила 12.05.2021

Подписана в печать 27.07.2021

Опубликована онлайн 30.09.2021

## REFERENCES

1. Markov A. I., Ustinov I. D. (1979) *Ultrasonic Diamond Drilling and Milling of Hard Non-Metallic Materials with Diamond Tools*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 39 (in Russian).
2. Amitan G. L., Baisupov I. A., Baron Yu. M. (1988) *Handbook on Electrochemical and Electrophysical Processing Methods*. Leningrad, Mashinostroenie Publ. 719 (in Russian).
3. Andreeva L. E. (1981) *Elastic Elements of Devices*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 392 (in Russian).
4. Ananyiev I. V., Timofeev P. G. (1965) *Oscillations of Elastic Systems in Aircraft Structures and their Damping*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 240 (in Russian).
5. Pfeiffer P. (1934) *Oscillations of Elastic Bodies*. Leningrad, State Technical and Theoretical Publishing House ONTI. 154 (in Russian).
6. Timoshenko S. P. (1965) *Strength of Materials. Vol. 1. Elementary Theory and Tasks*. Moscow, Nauka Publ. 364 (in Russian).
7. Pisarenko G. S., Boginich O. E. (1982) *Oscillations of Kinematical Excited Mechanical Systems with Regard to Energy Dissipation*. Kiev, Naukova Dumka Publ. 220 (in Russian).
8. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. (1988) *Materials Resistance Handbook*. 2<sup>nd</sup> ed. Kiev, Naukova Dumka Publ. 736 (in Russian).
9. Lugovoi V. P., Pronkevich S. A., Lugovoi I. V., Dovnar S. S. (2018) Computer Modeling and Analysis of Vibrations in Annular Concentrator of Ultrasonic System. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, 17 (3), 220–227. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-3-220-227> (in Russian).
10. Lugovoi V. P., Minchenya V. T., Lugovoi I. V. Piercing Holes in Jewelry Stones Using Ultrasonic Systems with Ring Concentrators. *Dizain. Teoriya. Praktika* [Design. Theory. Practice]. Moscow, Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science, (22), 36 (in Russian).

Received: 12.05.2021

Accepted: 27.07.2021

Published online: 30.09.2021