

**Решение задач динамики
методом полных дифференциалов**

Тульев В.Д., Мышковец М.В., Петровский И.Г.
Белорусский национальный технический университет

В теоретической механике при решении динамических задач студентам необходимо составить и решить дифференциальное уравнение. Большие сложности в решении вызывают уравнения, содержащие переменную массу тела. Рассмотрим движение вагонетки с начальной скоростью V_0 по наклонной плоскости, к которой прикреплена разматывающаяся цепь. Вес вагонетки постоянен, а вес цепи пропорционален ее длине. Запишем дифференциальное уравнение движения вагонетки с цепью в проекции на ось x под действием сил тяжести вагонетки P и цепи $\gamma x \sin \alpha$, а также силы трения цепи $f\gamma x \cos \alpha$.

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{P + \gamma x}{g} \right) \dot{x} \right) = P \sin \alpha + \gamma x \sin \alpha - f\gamma x \cos \alpha. \quad (1)$$

Возьмем производную и преобразуем

$$\gamma \dot{x}^2 + (P + \gamma x) \ddot{x} = f(x) \quad (2)$$

Где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$.

$$f(x) = (P \sin \alpha + \gamma x \sin \alpha - f\gamma x \cos \alpha)g.$$

Используем замену: $\ddot{x} = \frac{x d\dot{x}}{dx}$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\gamma \dot{x}^2 dx + (P + \gamma x) \dot{x} d\dot{x} = f(x) dx. \quad (3)$$

Умножим выражение (3) на $(P + \gamma x)$ и получим

$$(P + \gamma x) \gamma \dot{x}^2 dx + (P + \gamma x)^2 \dot{x} d\dot{x} = (P + \gamma x) f(x) dx. \quad (4)$$

Левая часть уравнения (4) представляет собой полный дифференциал:

$$d \left(\frac{(P + \gamma x)^2 \dot{x}^2}{2} \right) = (P + \gamma x) f(x) dx. \quad (5)$$

После интегрирования уравнения (5) и преобразований окончательно получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 = & \frac{P^2 V_0^2}{(P + \gamma x)^2} + \frac{2Pg}{2\gamma} \left(1 - \frac{P^2}{(P + \gamma x)^2} \right) \sin \alpha + \frac{2gx}{3} \sin \alpha - \frac{f\gamma P x^2}{(P + \gamma x)^2} \cos \alpha - \\ & - \frac{2fg\gamma^2 x^3}{3(P + \gamma x)^2} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение (6) показывает изменение скорости вагонетки с разматывающейся цепью с учетом начальной скорости.