

Механические системы с разрывными силами и системы с управлением

Нифагин В.А., Кондратьева Н.А.

Белорусский национальный технический университет

В механических системах с сухим трением, в системах с переключением или в случаях движения в нескольких средах с различающимися силами сопротивления силовое поле разрывно. Если рассматривается нелинейное конфигурационное пространство, то существование фазовых траекторий таких механических систем в общем случае не исследовано. Рассмотрим две механические системы на сфере: 1) Если силовое поле автономно и не зависит от скорости, т.е. – ограничено. При этом ни одна из траекторий системы, выходящей из точки $S(0,0,-1)$, не достигает точки $N(0,0,1)$. 2) Если силовое поле зависит от скорости, гладко, автономно и ограничено. Рассмотрим систему на единичной сфере $s \subset R^3$. Силовое поле задается вектором $\overline{F}(\overline{r}) = (-x_2, x_1, 0)$, где $\overline{r} = (x_1, x_2, x_3) \in S_r(0,1)$. Применяя принцип Даламбера для случая голономной связи $\overline{P}(\overline{r}) = 1$, $\|\overline{r}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ система уравнений в R^3 для траектории точки имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -x_2 - 2Kx_1 \\ \ddot{x}_2 = x_1 + 2Kx_2 \\ \ddot{x}_3 = -2kKx_3 \end{cases} \quad (1)$$

где $K = \frac{1}{2}\|\dot{\overline{r}}\|^2 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$ – кинетическая энергия, с граничными условиями:

$$x_1(t_0) = x_{01}, x_2(t_0) = x_{02}, x_3(t_0) = -x_{03} \quad x_1(t_1) = x_{11}, x_2(t_1) = x_{12}, x_3(t_1) = x_{13} \quad (2)$$

Во втором примере заменим силовое поле $\overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}})$ на $[\dot{\overline{r}}, \overline{r}]/(1 + \|\dot{\overline{r}}\|)$. Тогда векторные уравнения движения запишутся в виде

$$\ddot{\overline{r}} = \overline{F}(\overline{r}, \dot{\overline{r}}) - 2K\overline{r} \quad (3)$$

с граничными условиями (2).

Траектория $\overline{r}(t)$ осциллирует возле экватора сферы, асимптотически к нему приближаясь, но не достигая точки полюса N . Для любой пары точек на концах диаметра сферы нет соединяющей их траектории системы. В тоже время для любых двух точек x_1, x_2 , которые не сопряжены вдоль лютя бы одной геодезической метрики, в случае ограниченного, непрерывного силового поля, существует траектория системы, соединяющая эти точки.