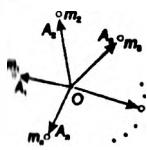


## Геометрия масс как средство интеграции геометрии и физики

Криваль Л.С.

Белорусский национальный технический университет

Решение многих геометрических задач можно получить, привлекая свойства центра масс системы материальных точек. Эти решения используют понятия, заимствованные из механики: масса, материальная точка, центр масс, правило рычага, и опираются на наглядные физические представления.



Материальной точкой называют пару  $(A, m)$ , где  $A$  – произвольная точка, а  $m$  – действительное число («масса», которая «сосредоточена» в точке  $A$ ).

**Теорема о центре масс:** Пусть задана система материальных точек  $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$  (1) с ненулевой массой  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Тогда существует единственная точка  $Z$ , удовлетворяющая условию:  $m_1 \overline{ZA_1} + m_2 \overline{ZA_2} + \dots + m_n \overline{ZA_n} = \vec{0}$ . Эта точка  $Z$  называется центром масс системы (1)

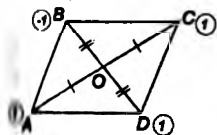
**Правило рычага:** Если  $m_1$  и  $m_2$  – положительные массы, расположенные в точках  $A_1$  и  $A_2$ , то их центр масс  $Z$  находится на отрезке  $A_1A_2$  и  $\frac{A_1Z}{A_2Z} = \frac{m_2}{m_1}$ .

**Следствие:** Пусть  $Z$  – центр масс системы (1) материальных точек. Тогда для любой точки  $O$  справедливы равенства ((3) или (4))

$$(1) (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \overline{OZ} = m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + m_n \overline{OA_n}$$

$$(4) \overline{OZ} = \frac{1}{m} (m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + \dots + m_n \overline{OA_n})$$

Обратно, если для какой-либо одной точки  $O$  справедливо равенство (3) или (4), то  $Z$  – центр масс системы (1).



**Пример 1:** Докажите, что если в трех вершинах  $A, B, C$  параллелограмма  $ABCD$  поместить массы 1,  $(-1), 1$ , то их центром масс будет четвертая вершина  $D$ .

Пусть  $O$  – центр масс материальных точек  $A$  и  $C$   
 $\Rightarrow 0-1+1=2$ . Найдем центр масс материальных точек

$B$  и  $O$ . Пусть  $Z$  – центр масс точек  $B$  и  $O$ .  $\frac{BZ}{ZO} = \left| \frac{2}{-1} \right| = \frac{2}{1}$ , значит,  $Z$  совпа-

дет с  $D$ , т.к.  $\frac{BD}{OD} = \frac{2}{1}$ , следовательно,  $D - (-1) + 2 = (1)$ .