УДК 539.3

Операторный подход к решению дифференциальных уравнений термоупругости

Гончарова С.В.
Белорусский национальный технический университет

В предыдущих работах были получены решения дифференциальных уравнений термоупругости посредством введения четырёх разрешающих функций φ_i и ψ, которые удовлетворяют уравнениям вида:

$$\Box_2^2[\Box_1^2\Box_3^2-m\eta\partial_t\nabla^2]\varphi_i+X_1/(c_1^2\rho)=0\,,\qquad i=1,2,3\,,\qquad(1)$$

$$[\Box_1^2\Box_3^2-m\eta\partial_t\nabla^2]\psi+Q\mu/(\chi c_1^2\rho)=0\,.$$

Здесь $c_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho$ - квадрат скорости продольной волны, ρ - плотность материала, λ и μ - коэффициенты Ламе; $m=\gamma/(\lambda+2\mu)$, $\gamma=(3\lambda+2\mu)\alpha_t$, α_t - коэффициент линейного термического расширения; $\chi=\lambda_0/c_\xi$, $\eta=\gamma T_0/\lambda_0$, $Q=W/\lambda_0$, T_0 - температура, при которой тело находится в естественном состоянии, λ_0 - коэффициент теплопроводности, c_ξ - удельная теплоёмкость при постоянной деформации, W - количество тепла, производимого в единице объема тела за единицу времени; X_i - компоненты массовых сил; $\nabla^2=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$; $\Box_1^2=\nabla^2-(1/c_1^2)\partial_t^2$ - продольный даламбериан, $\Box_2^2=\nabla^2-(1/c_2^2)\partial_t^2$ - поперечный даламбериан, $\Box_3^2=\nabla^2-(1/\chi)\partial_t$, $\partial_1=\partial/\partial x$, $\partial_2=\partial/\partial y$, $\partial_3=\partial/\partial z$, $\partial_t=\partial/\partial t$. В каждом из этих уравнений фигурирует по одной неизвестной функции. Решение уравнений (1) будет состоять из трёх членов: частного интеграла φ_i^*, неоднородного уравнения (1) и общих интегралов φ_i^0 и φ_i^{00}, уравнений $\Box_2^2\varphi_i^0=0$, $(\Box_1^2\Box_3^2-m\eta\partial_t\nabla^2)\varphi_i^{00}=0$. Функция φ_i^0 удовлетворяет простому волновому уравнению, а функция φ_i^{00} - сложному волновому уравнению, соответствующему продольной волне. Предложено представить φ_i^{00} в виде: $\varphi_i^{00}=A\sin(t\nabla)*\alpha(x,y,z)+B\cos(t\nabla)*\beta(x,y,z)$. Тогда сложное волновое уравнение будет удовлетворяться тождественно при условии, что $\alpha(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$ являются бигармоническими функциями, удовлетворяющие уравнению $\nabla^2\nabla^2\alpha=0$ и $\nabla^2\nabla^2\beta=0$.