УДК 539.3

Собственные значения и собственные функции нелинейного дифференциального оператора в задаче о трещине общего вида в упругопластическом материале

Нифагин В.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается задача о нахождении собственных значений, возникающая при определении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в теории течения с упрочнением. Для решения краевой задачи применяется вариант метода разложения по параметру нагружения, когда перемещения отыскиваются в виде полных рядов разложений в окрестности особой точки, включающих наряду с главной и правильную часть. В силу сингулярности напряжений базовым является нелинейный кубический член. Разработан численно-аналитический алгоритм, позволяющий найти собственные значения, основанный на разложении собственных функций в ряды по степеням малого параметра, представляющего собой разность между собственными значениями двух последовательных краевых задач.

$$y_i' = f_i\left(y_j^{(n)}\right),\ i,j=\overline{0,3}; \tag{1}$$

$$L_i y_i = 0,\ i=1,2,\ j=\overline{0,3}, \tag{2}$$

где $f_0 = y_1, f_1 = y_2$,

$$f_2 = (\lambda_n+1)y_1 - 2(\lambda_n-1)y_3 + 2B\sum_{k+\ell+m=n+1}\left((\mu_{k\ell m}-5)\alpha_{k\ell m} - \frac{1}{2}\gamma'_{k\ell m}\right),$$

$$f_3 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_n-1}{\lambda_n+1}y_2 - \frac{1}{2}\left(\lambda_n^2-1\right)y_0 + B\sum_{k+\ell+m=n+1}\left(\frac{1}{2}(\mu_{\ell\ell m}-1)\gamma_{k\ell m} + \alpha'_{k\ell m}\right),$$

$$L_1 y_j = -\frac{y_2}{\lambda_n+1} + (\lambda_n-1)y_0 - B\gamma_{k\ell m},\ L_2 y_j = \frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}y_2 + y_3 - B\gamma_{k\ell m}.$$

Будем искать λ_{n+1} в виде $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \varepsilon_n$, где ε_n – отклонение собственного значения λ_{n+1} от λ_n на предыдущем шаге. Представляя функции $V_n(\varphi) = \sum_{k\ge 0} V_n^{(k)}(\varphi)\varepsilon_n^k$, $W_n(\varphi) = \sum_{k\ge 0} W_n^{(k)}(\varphi)\varepsilon_n^k$, $n=0,1,\ldots$ и подставляя в уравнения (1), получим последовательность систем дифференциальных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε_n^k, которые совместно с граничными условиями (2) определяют условия отыскания собственных значений λ_n.

Показано, что собственные значения, полученные методом возмущений, совпадают со значениями, найденными методом пристрелки.