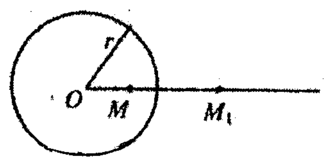
УДК 51(07.07)

# Инверсия в решении геометрических задач

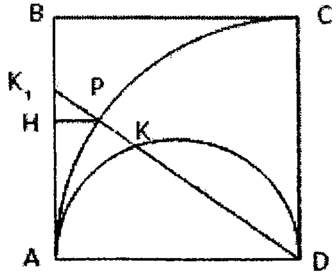
Лях А.С.
Белорусский национальный технический университет

Метод дает возможность заменять фигуры, содержащие окружности, более простыми фигурами.

Пусть на плоскости задана окружность (O;r) с выколотым центром O. Инверсией $I_{o,k}$ с полюсом O и степенью $k=r^2$ называется взаимнооднозначное преобразование $M \to M_1$ такое, что $OM*OM_1=r^2$ (тт. O, M, $M_1$ принадлежат одной прямой).




Задача. Дан квадрат ABCD и внутри этого квадрата проведена дуга AC, являющаяся частью окружности с центром в вершине D и радиусом AD. На дуге AC взята произвольная точка P. На стороне AD, как на диаметре, внутриквадратапостроена полуокружность, точка K – точка пересечения PD с полуокружностью. Доказать, что PK равно расстоянию от P до AB.




Пусть AD = a. Рассмотрим инверсию $I_{D,a}$

При инверсии дуга AKD отображается на сторону AB $K \to K_1$, $K_1$ лежит на AB.

Тогда $\Delta K_1HP \sim \Delta K_1AD$

$$\frac{PH}{DA} = \frac{PK_1}{DK_1}; PH = \frac{DA * PK_1}{DK_1} = \frac{DA(DK_{1-DP})}{DK_1} = \frac{a(DK_1 - a)}{DK_1}.$$

По определению инверсии $DK * DK_1 = a^2$

$$DK = \frac{a^2}{DK_1}; PK = PD - DK = a - \frac{a^2}{DK_1} = \frac{a(DK_1 - a)}{DK_1}.$$

Т.е. PH = DK.