

Математическая модель колебаний нелинейного осциллятора с трением

Нифагин В.А., Кондратьева Н.А.

Белорусский национальный технический университет

Моделью колебаний нелинейного осциллятора при наличии трения может служить тело массы m , которое движется под действием силы в некоторой среде, оказывающей сопротивление движению. Тело рассматривается как материальная точка с координатой x , $F(t)$ – отнесенное к массе возмущающее усилие, с точкой покоя $x = 0$, $A(t)$ – отнесенная сила трения, f – коэффициент трения. Тогда уравнение движения запишется в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + cx^2(t) + A(t)x(t) &= F(t), \\ x(0) &= a; \quad \dot{x}(0) = b \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$A(t) = \begin{cases} -fg \operatorname{sign}(\dot{x}(t)), & \dot{x}(t) \neq 0, \\ fg \operatorname{sign}(\dot{x}(t)), & \dot{x}(t) = 0, F(t)|x(t)| > fg, \\ 0, & \dot{x}(t) = 0, F(t)|x(t)| \leq fg; \end{cases} \quad (2)$$

$$F(t) = B \cos(\omega t + \alpha) / m; \quad c = 1 / m.$$

С механической точки зрения уравнение (1) меняет структуру, в зависимости от расположения фазовой точки (x, \dot{x}) , что обусловлено разрывностью силы трения $A(t)$ относительно скорости \dot{x} . При переходе скорости \dot{x} через значение, равное нулю, происходит смена уравнений.

Из уравнений (1), (2) видно, что если в некоторый момент времени t_0 выполняются условия $\dot{x} = 0$ и $F(t)|x(t)| \leq fg$, то $\ddot{x} = 0$. Движение системы прекращается, она находится в положении равновесия. Если же в момент времени t_0 выполняются условия $\dot{x} = 0$ и $F(t)|x(t)| > fg$, то $\ddot{x} \neq 0$ и из (2) получаем $\operatorname{sign} \ddot{x} = -\operatorname{sign} x$. Следовательно, при $t > t_0$ движение не прекращается. Трение в этот момент меняется на величину $2fg$. Численные расчеты показывают, что траектории движения в угловых точках приближаются к зоне застоя и попадают в нее.