УДК 517.938

Условия равномерной устойчивости скалярного уравнения с запаздыванием

Шавель Н.А.
Белорусский национальный технический университет.

Рассматривается скалярное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t - r(t)), \tag{1}$$

где $a : R_+ \to R_+, r : R_+ \to R_+$ - непрерывные функции.

В случае $a(t) \equiv a, r(t) \equiv r$ точная область устойчивости уравнения (1) описывается условием $0 \le ar \le \pi/2$. В неавтономном случае условие

$$\alpha \doteq \sup_{t \ge 0} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds \le \frac{3}{2}, \forall t \ge t_0 \ge 0 \tag{2}$$

гарантирует равномерную устойчивость.

Обозначим $r^{-1}(t) = \sup\{r(s) : s - r(s) = t\}$. Предположим, что для некоторых $\alpha \le 3/2, t_0 \ge 0$ и непрерывной функции $p : R_+ \to R$ имеет место

$$\int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds \le \alpha + p(t), \int_{t-\Delta(t)}^{t} a(s)p(s + r^{-1}(s))ds \le 0, \forall t \ge t_0, \tag{3}$$

где $\Delta(t) = \min\left\{r(t), \sup\left\{0 \le \tau \le t : \int_{t-\tau}^{t} a(s)ds\right\}\right\}$. Выполнение условий (3) гарантирует равномерную устойчивость уравнения (1). Если в (3) нельзя положить $p(t) \equiv 0$, то условие (2) будет нарушено. Например, в случае $a(t) \equiv \cos\frac{9}{4}\pi t + 1$, $r(t) \equiv r \equiv \frac{4}{3}$ условия (3) выполняются с $\alpha = \frac{3}{2}$, $p(t) = -\frac{1}{6} + \frac{8}{9\pi}\sin \pi t$ и, следовательно, уравнение (1) равномерно устойчиво, несмотря на то, что $\int_{t_k-r(t)}^{t_k} a(s)ds > \frac{\pi}{2} > \frac{3}{2}$ для любых $t_k = \frac{2(4k-3)}{9}, k \in N$.