УДК 519.1

Представление рекуррентно вычислимых интегралов комбинаторными суммами

Волкович П.Ф.
Белорусский национальный технический университет

По определению реккурентно вычислимыми являются интегралы, для вычисления которых используются реккурентные формулы. В докладе сформулированы условия существования и правила получения реккурентных соотношений, проведена их классификация. Методом математической индукции получены решения указанных реккурентных соотношений в виде комбинаторных (факториальных) сумм известных функций (чисел), в частности:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-(k-1))!(2n-3)!!x}{(2a^2)^k(n-1)!(2n-(2k+1))!(x^2+a^2)^{n-k}}+$$

$+\dfrac{(2n-3)!!}{(2a^2)^{n-1}(n-1)!}\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}, a=const, n=1,2,3,\ldots$; здесь и далее постоянная интегрирования опущена; для вычисления определенного интеграла $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx, n\geq 2$, получены формулы

$I_{2k}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!}, I_{2k+1}=\dfrac{2^k\cdot k!}{(2k+1)!!}, k=1,2,3,\ldots$; для реккурентно вычислимого интеграла $I_n=\int\dfrac{dx}{(\ln x)^n}$ получено представление $I_n=\dfrac{1}{(n-1)!}I_1-x\sum_{k=1}^{n-2}\dfrac{(n-(k+1))!}{(n-1)!(\ln x)^k}$, где

$$I_1=\int\frac{dx}{\ln x}=\ln(\ln x)+\frac{(\ln x)^1}{1\cdot 1!}+\frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!}+\ldots;$$

для интеграла $I_n=\int x^n\sin axdx, n=1,2,\ldots,$ – соотношение

$I_n=\sum_{v=0}^{n}\dfrac{n!x^{n-v}(-\cos ax)^{(v)}}{(n-v)!a^{(2v+1)}}, (-\cos ax)^{(v)}=\dfrac{d^v(-\cos ax)}{dx^v}$ и другие формулы.