

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет транспортных коммуникаций

Кафедра «Математические методы в строительстве»

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой
«Математические методы
в строительстве»

_____ С.В. Чернявская
_____ г.

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета транспортных
коммуникаций

_____ С.Е. Кравченко
_____ г.

**ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

**МАТЕМАТИКА.
ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

для специальностей

7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»

7-07-0732-02 «Инженерные сети, оборудование зданий и сооружений»

7-07-0732-03 «Строительство транспортных коммуникаций»

Составитель: Ерошевская Е.Л., Кузнецова А.А.

Рассмотрено и утверждено на заседании совета факультета
транспортных коммуникаций

_____ 20__ г., протокол № ____

Минск БНТУ 2025

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Программа курса, краткий теоретический материал, материал для аудиторной и самостоятельной работы, контрольные вопросы и задания.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по курсу «Математика. Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной» предназначен для студентов второго курса обучения по специальностям 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений», 7-07-0732-02 «Инженерные сети, оборудование зданий и сооружений», 7-07-0732-03 «Строительство транспортных коммуникаций». Объем изучаемого материала дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 152 часа лекций и 136 часов практических занятий.

Целью ЭУМК является скоординировать и оптимизировать работу студентов и преподавателей по изучению курса «Математика. Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной» для студентов специальностей 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений», 7-07-0732-02 «Инженерные сети, оборудование зданий и сооружений», 7-07-0732-03 «Строительство транспортных коммуникаций», систематизировать разделы теоретического, практического материала и материала для проверки и контроля знаний в единый модуль.

Структурирование и подача учебного материала. Материал курса представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, контрольных вопросов и заданий по данным разделам. Учебный материал излагается в соответствии с типовой программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Изучение учебного материала в ЭУМК может быть использовано студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	2
СОДЕРЖАНИЕ	3
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
1. Возрастание и убывание функции.....	4
2. Экстремум функции одной переменной	7
3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке	10
4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба	11
5. Асимптоты графика функции	14
6. Общая схема исследования функции	15
7. Компьютерный контроль вычислений.....	17
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	21
Занятие № 1	21
Ответы	22
Занятие № 2	23
Ответы	24
Занятие № 3	24
Ответы	25
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	26
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ	27
ЛИТЕРАТУРА	29

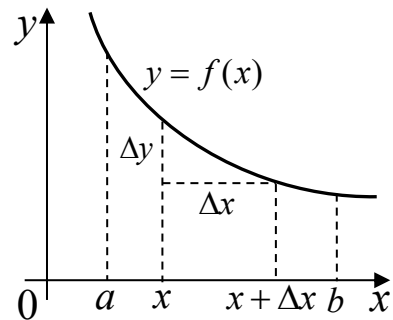
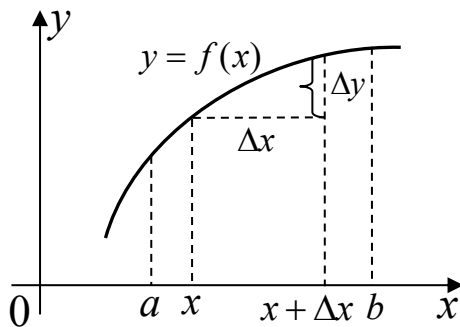
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Возрастание и убывание функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором интервале, если большему значению x из этого интервала соответствует большее значение функции и меньшему значению x соответствует и меньшее значение функции.

Если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) > f(x)$, если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) < f(x)$.

Примечание. Если последние 2 неравенства для функции $y = f(x)$ нестрогие ($f(x + \Delta x) \geq f(x)$ или $f(x + \Delta x) \leq f(x)$), то функция называется неубывающей.

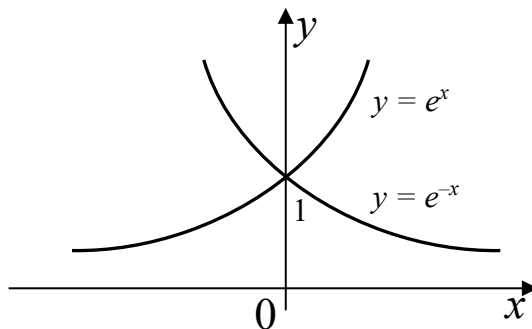


Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в некотором интервале, если большему значению x из этого интервала соответствует меньшее значение функции, и меньшему значению x соответствует большее значение функции.

Если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) < f(x)$, если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) > f(x)$.

Примечание. Если последние 2 неравенства для функции $y = f(x)$ нестрогие ($f(x + \Delta x) \leq f(x)$ или $f(x + \Delta x) \geq f(x)$), то функция называется невозрастающей.

Например, $f(x) = e^x$ возрастающая функция на $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ убывающая на $\mathbb{R}$.



Возрастающие и убывающие функции называются строго монотонными, неубывающие или не возрастающие функции называются нестрогими монотонными.

Теорема 1 (необходимый признак возрастания функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале $(a;b)$, то производная этой функции неотрицательна в этом интервале, т.е. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a;b)$.

Теорема 2 (необходимый признак убывания функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на некотором интервале $(a;b)$, то ее производная неположительна в этом интервале, т.е. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a;b)$.

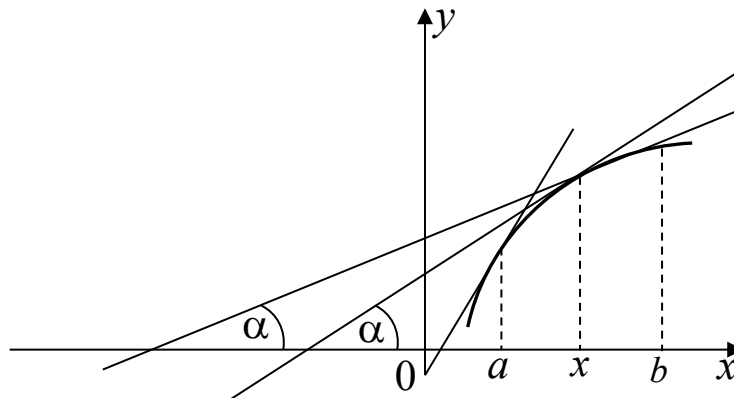
Докажем теорему 1.

Доказательство. Пусть $f(x)$ на $(a;b)$ возрастает и $\exists f'(x)$. Дадим x приращение Δx , тогда y получит приращение Δy . Так как $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то на основании определения $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$.

В обоих случаях $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

Геометрический смысл теоремы

Пусть $f(x)$ – возрастающая функция, тогда $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha$ – острый угол.

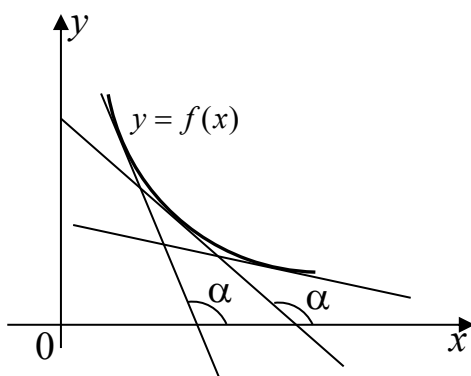


Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом промежутке образует с осью Ox острый угол или в отдельных случаях касательная горизонтальна.

Аналогично доказывается теорема 2.

$y = f(x)$ – убывающая функция на $(a;b)$.

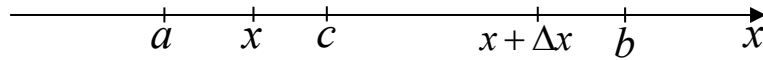
$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha$ – тупой.



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в каждой точке на этом промежутке образует с осью Ox тупой угол или в отдельных случаях касательная горизонтальна.

Теорема 3 (достаточный признак возрастания функции). Если $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и ее производная на этом интервале положительна, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Доказательство. Пусть $x \in (a; b)$.



Рассмотрим два любых значения x и $x + \Delta x$, которые принадлежат интервалу $(a; b)$. Применим к отрезку $[x, x + \Delta x]$ и к данной функции теорему Лагранжа: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c) \cdot \Delta x$.

Так как по условию $f'(c) > 0$, то знак произведения, стоящего в правой части, зависит от Δx : $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$, если $\Delta x > 0$.

$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$, если $\Delta x < 0$ а это означает, что функция возрастает на данном интервале.

Аналогично доказывается теорема 4 (достаточный признак убывания функции).

Если $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и ее производная в этом интервале отрицательна, то сама функция $f(x)$ на этом интервале убывает.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности*.

Точки, в которых $y' = f'(x) = 0$, называются *стационарными точками*.

Для нахождения интервалов монотонности нужно:

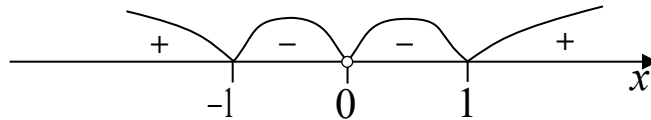
- 1) Найти область определения функции.
- 2) Найти первую производную и найти критические точки (точки, в которых первая производная равна нулю или не существует). Найденными точками область определения разбивается на интервалы, в которых первая производная имеет определенный знак.

3) Найти знак первой производной в каждом из этих интервалов, причем, если $y' > 0$, то функция возрастает, если $y' < 0$, то функция убывает.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Функция $y = x + \frac{1}{x}$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервалах $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}. \quad y'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

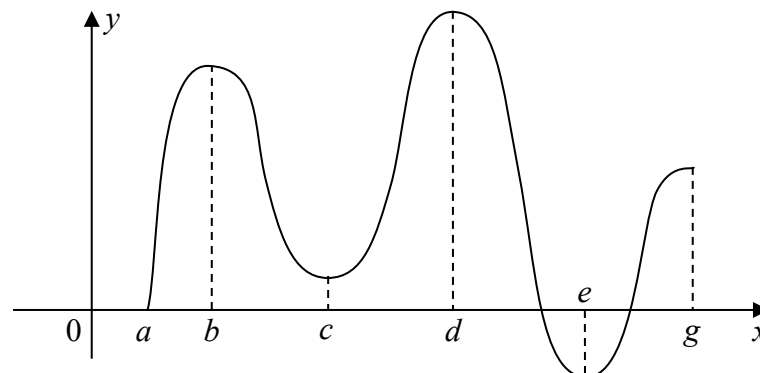


Ответ. $(-\infty, -1); (1, +\infty)$ – интервалы возрастания функции.
 $(-1, 0); (0, 1)$ – интервалы убывания функции.

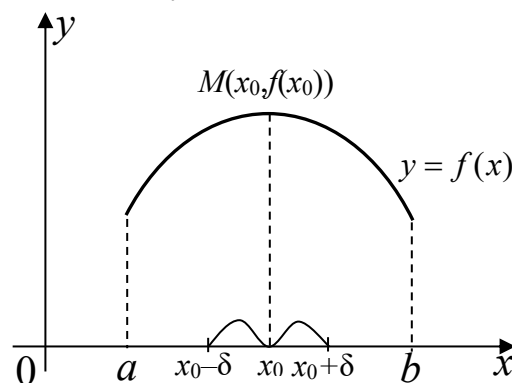
2. Экстремум функции одной переменной

Функции, обычно встречающиеся на практике, не являются возрастающими или убывающими во всей области своего задания. Чаще дело обстоит так, что промежуток, где задана функция, распадается на несколько участков возрастания и убывания функции.

Особый интерес представляют точки b, c, d, e , отделяющие друг от друга участки с различным поведением функции. Эти точки называются точками экстремума функции. Точки экстремума 2-х видов: точки максимума; точки минимума.



Определение 1: точка x_0 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0 , что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

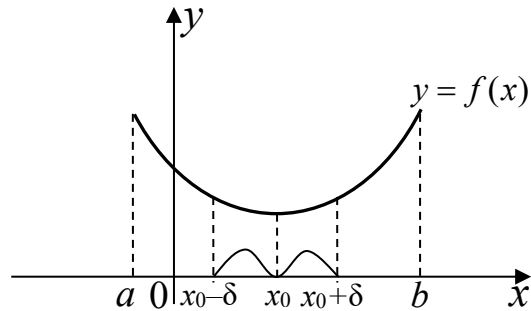


Обозначим x_0 – max.

$$\max f(x) = f(x_0); x \in O_\delta(x_0).$$

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x) \text{ для } \Delta x > 0 \text{ и } \Delta x < 0. \quad f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Определение 2. Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует такая δ – окрестность точки x_0 , что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



Обозначим $x_0 - \min$.

$$\min f(x) = f(x_0); x \in O_\delta(x_0).$$

$$f(x_0) < f(x_0 + \Delta x) \text{ для } \Delta x > 0 \text{ и } \Delta x < 0. \quad f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Точки минимума и максимума функции называют точками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Из определений следует, что экстремумы функции носят локальный характер. Значение $f(x_0)$ называют локальным максимумом (минимумом) функции.

Теорема (необходимое условие существования экстремума функции)

Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f'(x)$ равна нулю (*стационарные точки*) либо не существует, называются *критическими*.

Но необходимый признак не является достаточным и, следовательно, не в каждой критической точке функция достигает экстремума. Поэтому нужно дополнительно исследовать поведение функции в критических точках.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремумов функции)

Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак. Если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Например, дана функция $y = x^3$. $y' = 3x^2$, $y' = 0$ при $x = 0$, $x_0 = 0$ – стационарная точка.

$y' = 3x^2 > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$, т.е. y' переходя через $x_0 = 0$ не меняет знак. Следовательно, $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

Теорема (второй достаточный признак существования экстремумов функции)

Стационарная точка x_0 функции $y = f(x)$, дважды дифференцируемой в $O_\delta(x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$.

Доказательство. По условию x_0 – стационарная точка, следовательно, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ (по условию), тогда 1) $f''(x_0) < 0$ или 2) $f''(x_0) > 0$.

Пусть $f''(x_0) < 0$, то в силу непрерывности $f''(x)$ она будет меньше нуля и в $O_\delta(x_0)$, т.е. $f''(x) < 0$ в $O_\delta(x_0)$, но $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает в $O_\delta(x_0)$, а в самой точке x_0 $f'(x_0) = 0$, следовательно, в $O_\delta(x_0)$ производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-».

В силу первого достаточного признака существования экстремумов функции точка x_0 является точкой локального максимума $f(x)$.

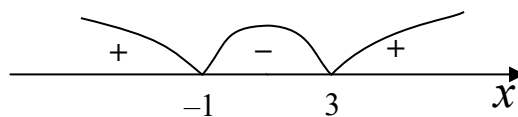
Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Решение. $D(y): x \in (-\infty; \infty)$. Функция непрерывная, дважды дифференцируема на R .

$y' = 6x^2 - 12x - 18$. $y' = 0$. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ – точки стационарности.

Способ 1.



Следовательно, $x_{\max} = -1$, $y_{\max} = 17$. $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = -47$.

Способ 2.

$$y'' = 12x - 12, \quad y''(-1) < 0 \Rightarrow x_{\max} = -1, \quad y_{\max} = 17.$$

$$y''(3) > 0 \Rightarrow x_{\min} = 3, \quad y_{\min} = -47.$$

Замечания.

1) Если y'' в критической точке равна 0 или не существует, то этот признак ответа не дает.

Например, $y = \sqrt[3]{x^2}$.

$D(y): x \in (-\infty; \infty)$. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, y' не существует при $x = 0$.

$x_0 = 0$ – критическая точка.

$y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ не существует при $x_0 = 0$. Следовательно, исследовать на

экстремум можно только с помощью первой производной.

2) Второй достаточный признак существования экстремумов функции неприменим для исследования тех критических точек, где $f'(x)$ не существует, так как тогда нарушается условие теоремы о непрерывности второй производной.

Может оказаться, что в стационарной точке $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$. Тогда применяется следующая *теорема*.

Теорема (третий достаточный признак существования экстремумов функции)

Пусть $f(x)$ – n раз непрерывна дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда: 1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, тогда по свойству непрерывной функции на отрезке она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения по теореме Вейерштрасса.

Если функция непрерывна на $[a; b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка или в точках локального экстремума функции $f(x)$. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее – наименьшим значением функции на данном отрезке.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ на отрезке $[0; 3]$.

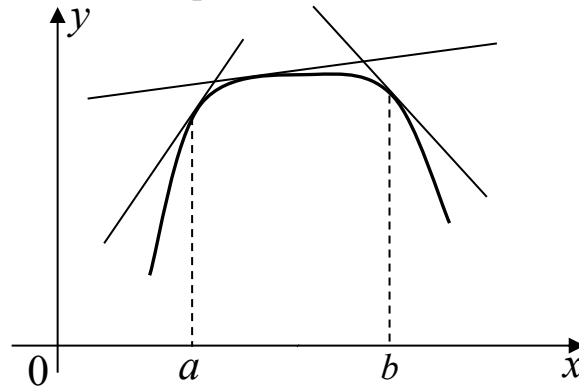
Решение. Область определения функции $D(y): x \in (-\infty; \infty)$, значит $[0; 3] \in D(y)$.

Найдем первую производную $y'(x) = 3x^2 - 18x + 24$. Из условия $y'(x) = 0$ находим корни этого уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 4 \notin [0; 3]$. Далее, находим вторую производную $y''(x) = 6x - 18$, при этом $y''(2) < 0 \Rightarrow$ точка $x = 2$ – точка локального максимума. То есть $x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 2$. Также вычислим значения функции на концах отрезка $y(0) = -18$, $y(3) = 0$. Далее, среди найденных значений функции в точках локального экстремума и на концах заданного

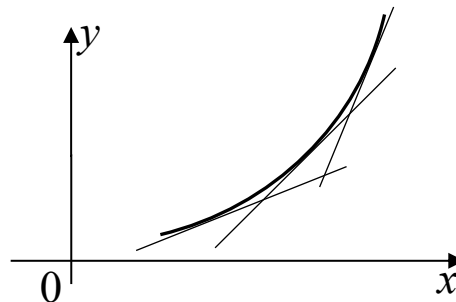
отрезка выбираем наибольшее (2) и наименьшее (-18). Таким образом, на отрезке $[0;3]$ $y_{\text{наиб}} = 2 = M$, $y_{\text{наим}} = -18 = m$.

4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является выпуклым на некотором интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.



Определение. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является вогнутым на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.



Рассмотрим признаки, по которым можно было бы судить о форме кривой на различных интервалах.

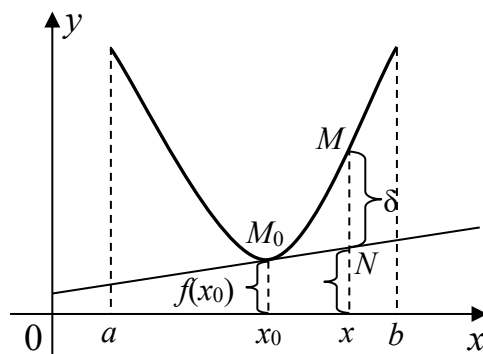
Теорема 1 (достаточный признак вогнутости графика функции)

Если $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b)$, то график функции на $(a;b)$ вогнутый.

Теорема 2 (достаточный признак выпуклости графика функции)

Если $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a;b)$, то график функции на $(a;b)$ выпуклый.

Доказательство теоремы 1



Пусть $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)$. Возьмем точку $x_0 \in (a; b)$ и покажем, что все точки графика функции $y = f(x)$ на $(a; b)$ лежат выше касательной к нему в точке M_0 , т.е. что ординаты этих точек больше ординат точек касательной с одной и той же абсциссой.

Проведем касательную в точке M_0 с абсциссой x_0 .

Сравним ординату y точки $M(x, y)$ кривой $y = f(x)$ с ординатой $\bar{y}$ точки $N(x, \bar{y})$, которая лежит на касательной M_0N .

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид: $\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Обозначим $\delta = y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Применим теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим $\delta = y - \bar{y} = (f'(c) - f'(x_0)) \cdot (x - x_0)$, где $c \in (x_0, x)$.

Применим теорему Лагранжа к разности $f'(c) - f'(x_0)$, получим $\delta = y - \bar{y} = f''(d) \cdot (c - x_0) \cdot (x - x_0)$, где $x_0 < d < c$.

В последнем в последнем равенстве все сомножители положительны.

Таким образом, при $x \neq x_0$ имеем, что $\delta = y - \bar{y}$, т.е. $y > \bar{y}$, т.е. ординаты точек кривой больше ординат точек касательной при одной и той же абсциссе. Отсюда следует, что при $x \in (a; b)$ кривая $y = f(x)$ расположена выше своих касательных и, значит, по определению 2, график функции $y = f(x)$ вогнут на $(a; b)$.

Аналогично доказывается теорема 2.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть графика дифференцируемой функции от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*.

Очевидно, что касательная в точке перегиба должна пересекать непрерывную кривую.

Теорема (необходимый признак точки перегиба)

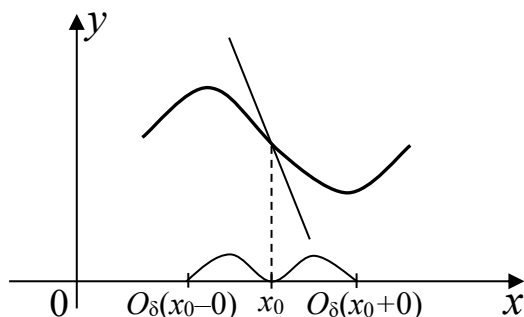
Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $O_\delta(x_0)$, где x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$ или не существует.

Теорема (достаточный признак точки перегиба)

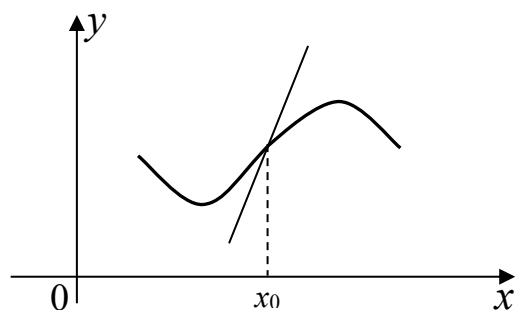
Если $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $O_\delta(x_0)$, если при этом $f''(x_0) = 0$ или не существует и при переходе через значение x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) = 0$ или не существует.



1. Пусть $f''(x) < 0$ в $O_\delta(x_0 - 0)$ и $f''(x) > 0$ в $O_\delta(x_0 + 0)$, тогда точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. Следовательно, точка кривой $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.



2. Если $f''(x) > 0$ в $O_\delta(x_0 - 0)$ и $f''(x) < 0$ в $O_\delta(x_0 + 0)$, то точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал вогнутости от интервала выпуклости кривой. Следовательно, точка кривой $M(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба

- 1) Находим область определения функции.
- 2) Находим $f'(x)$ и $f''(x)$.
- 3) Находим критические точки второго рода (те точки, где $f''(x)$ не существует или равна 0).
- 4) Находим знак $f''(x)$ до критической точки и после критической точки.
- 5) Устанавливаем, где график $y = f(x)$ выпуклый, а где вогнутый.
- 6) Находим точки перегиба (если они есть).

5. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают два вида асимптот:

- 1) вертикальные (их может быть бесконечное множество);
- 2) наклонные и горизонтальные (их не может быть более двух).

Определение. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ бесконечен, т.е. $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm \infty$.

Например, для графика функции $y = \frac{1}{x}$, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота, так как $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Замечание. Непрерывные на $\mathbb{R}$ функции вертикальных асимптот не имеют. Такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, если разность $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ есть некоторая бесконечно малая функция, т.е. $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования наклонных асимптот)

Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) = b \quad (6.1)$$

Доказательство необходимости

Предположим, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Тогда на бесконечности справедливо представление $f(x) = kx + b + \alpha(x)$. Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \frac{b + \alpha(x)}{x} = k + 0 = k, \\ \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (b + \alpha(x)) = b + 0 = b. \end{aligned}$$

Доказательство достаточности

Пусть существуют пределы (6.1), тогда по известной теореме (функция равна своему пределу плюс бесконечно малая функция) можно записать

$f(x) - kx = b + \alpha(x)$, отсюда $f(x) = kx + b + \alpha(x)$.

Последнее равенство означает, что прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$.

Если $k = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*, ее уравнение $y = b$.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она непрерывна на всей числовой оси. Далее, $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$,
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ (для раскрытия неопределенности применили правило Лопиталья-Бернулли. Итак, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

При $x \rightarrow -\infty$ график этой функции не имеет асимптоты, т.к. не существует конечного предела $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

6. Общая схема исследования функции

При исследовании функции находим:

1. Область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.
2. Наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции.
3. Симметрию графика функции (четность, нечетность), периодичность.
4. Точки пересечения графика с осями координат.
5. Промежутки монотонности, локальные экстремумы.
6. Промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба.
7. По результатам исследований построение графика функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y = \frac{x^2}{|x-1|}$.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по указанной схеме.

1. Область определения $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, так как деление на 0 не определено.
2. Для нахождения наклонных асимптот $y = kx + b$ вычисляем пределы по формулам (6.1) с учетом того, что модуль в знаменателе раскрываем по правилу $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Таким образом, при $x \rightarrow +\infty$ уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(1-x)} = -1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0$$

Таким образом, при $x \rightarrow -\infty$ уравнение наклонной асимптоты $y = -x - 1$. Горизонтальных асимптот нет.

3. Функция не является периодической, так как в ней нет тригонометрических выражений, порождающих периодичность.

Функция не является ни четной, ни нечетной ввиду несимметричности области определения относительно 0.

4. Единственной точкой пересечения с осями координат является точка $(0; 0)$.

5. Исследуем функцию $f(x) = \frac{x^2}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x > 1 \\ \frac{x^2}{1-x}, & x < 1 \end{cases}$ на монотонность и

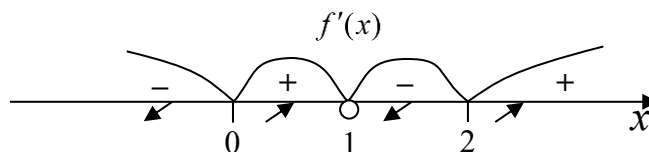
локальный экстремум.

Находим

производную

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}, & x > 1 \\ \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = -\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}, & x < 1 \end{cases}.$$

Решаем уравнение $f'(x) = 0$, получаем 2 корня $x = 0, x = 2$ – критические точки первого рода.



Функция возрастает на интервалах $(0; 1); (2; \infty)$.

Функция убывает на интервалах $(-\infty; 0); (1; 2)$.

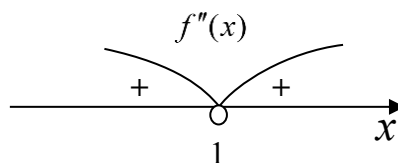
Определяем локальные экстремумы:

$$x_{\min} = 0, y_{\min} = 0, x_{\max} = 2, y_{\max} = 4$$

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

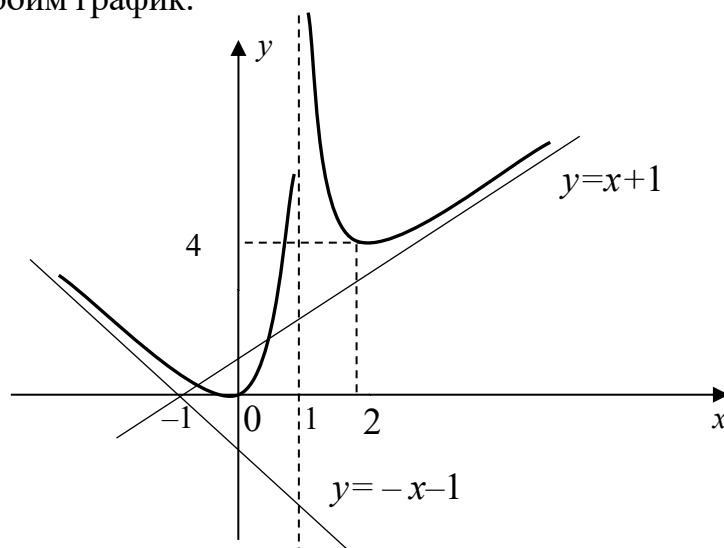
Находим вторую производную $f''(x)$:
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(x-1)^3}, & x > 1 \\ -\frac{2}{(x-1)^3}, & x < 1 \end{cases}$$

Расставим знаки второй производной



Следовательно, на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ график функции вогнут. Точек перегиба у кривой нет.

7. Строим график.



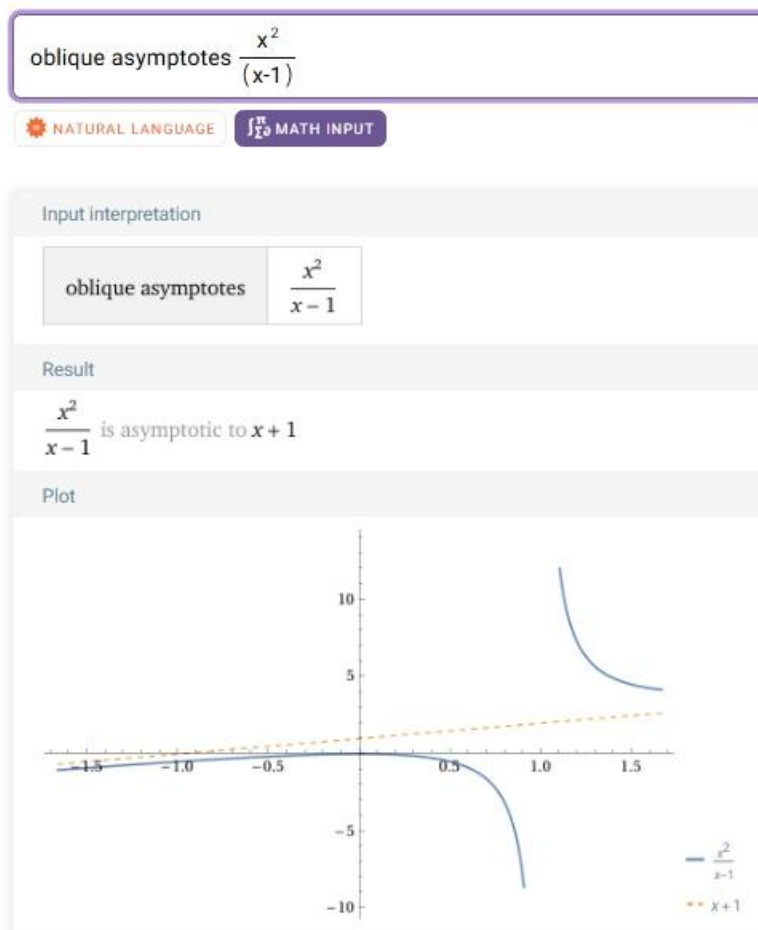
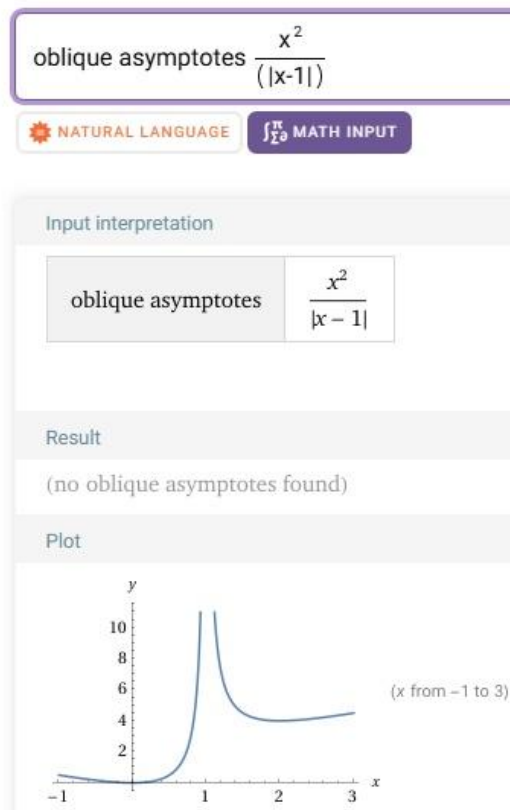
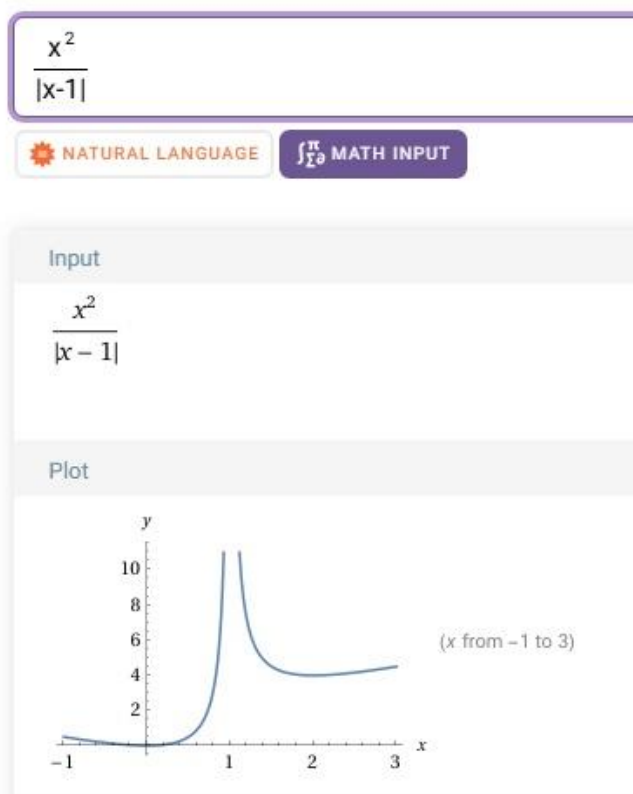
7. Компьютерный контроль вычислений

Покажем, как все эти результаты можно получить с помощью компьютерных вычислений. Это целесообразно делать для контроля ручных вычислений. Проще всего воспользоваться сайтом www.wolframalpha.com компании Wolfram Research. Сайт максимально адаптирован для работы с начинающими, прощает ошибки ввода и на «дружественной» основе предлагает варианты правильного написания в зависимости от поставленной задачи. Единственным недостатком является его англоязычность, но набор из нескольких команд легко если и не запомнить, то просто переписать из этого пособия в строку поиска на данном сайте.

Итак, просто набор в строке поиска на странице сайта этой функции дает нам практически все, что нужно о ней знать, но асимптот и точек экстремума там нет.

Чтобы их найти в данном случае придется проявить некоторую настойчивость. Добавление “oblique asymptotes” асимптот не дает, а говорит,

что их нет. Дело в том, что по всей видимости, возникают трудности в корректной обработке модуля в знаменателе.



Если мы «вручную» раскроем модуль (точно так же, как мы делали в «ручных» вычислениях), то получим обе асимптоты. На этом рисунке при раскрытии модуля со знаком «плюс» мы получаем правую наклонную асимптоту $y = x + 1$. Раскрыв модуль со знаком минус, получим левую наклонную асимптоту $y = -x - 1$.

oblique asymptotes $\frac{x^2}{(1-x)}$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

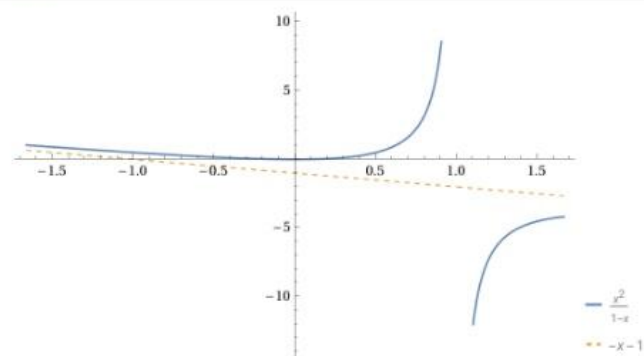
Input interpretation

oblique asymptotes $\frac{x^2}{1-x}$

Result

$\frac{x^2}{1-x}$ is asymptotic to $-x-1$

Plot



minimize $\frac{x^2}{|x-1|}$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

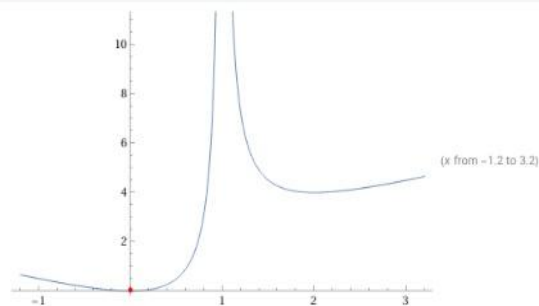
Input interpretation

minimize $\frac{x^2}{|x-1|}$

Global minimum

$\min\left(\frac{x^2}{|x-1|}\right) = 0$ at $x = 0$

Plot



minimize $\frac{x^2}{|x-1|}$ for $x > 1$

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

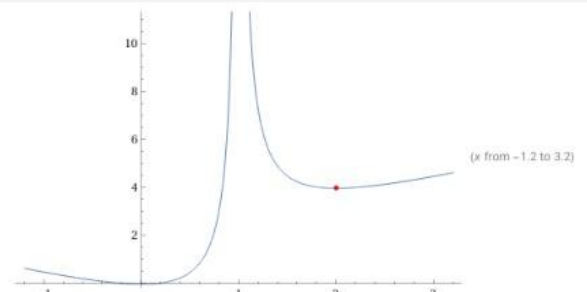
Input interpretation

minimize function $\frac{x^2}{|x-1|}$
domain $x > 1$

Global minimum

$\min\left(\frac{x^2}{|x-1|} \mid x > 1\right) = 4$ at $x = 2$

Plot



Далее, имеет смысл уточнить точки экстремума. Однако, и здесь модуль ведет себя капризно, и программа дает только глобальный экстремум $x = 0, y = 0$. Для нахождения правой точки локального экстремума мы поставим ограничения на диапазон изменения переменной x , получим $x = 2, y = 4$

Точек перегиба у этого графика функций действительно нет.

inflection point $\frac{x^2}{|x-1|}$ for $x > 1$

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

Input interpretation

inflection points	$\frac{x^2}{ x-1 }$	$x > 1$
-------------------	---------------------	---------

Result

(no inflection points found)

inflection point $\frac{x^3}{|x-1|}$

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

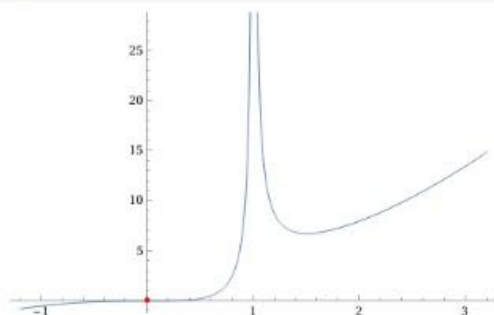
Input interpretation

inflection points	$\frac{x^3}{ x-1 }$
-------------------	---------------------

Result

$\frac{x^3}{|x-1|} = 0$ at $x = 0$

Plot



(x from -1.2 to 3.2)

Однако, небольшое изменение условия (квадрат на куб в числителе) демонстрирует наличие точки перегиба графика функции $\frac{x^3}{|x-1|}$ в точке $(0; 0)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Занятие № 1

**Тема: Монотонность и локальный экстремум функции.
Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке**

Задания первого уровня

Найти интервалы монотонности функции:

1. $f(x) = x^3 - 12x + 11$. 2. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

Найти экстремумы функции:

3. $f(x) = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$. 4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$. 5. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

6. Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции $y = \frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$.

7. Найти экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-5; 2]$.

Задания второго уровня

Найти интервалы монотонности функции:

1. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$. 2. $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$. 3. $f(x) = \frac{x^2 - x}{2 - x}$.

Найти экстремумы функции:

4. $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)^2$. 5. $f(x) = x - \arctg 2x$. 6. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

7. Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции $y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

8. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-2; 4]$.

9. Найти экстремум функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[2; 5]$.

Домашнее задание

Найти интервалы монотонности функции:

1. $f(x) = \frac{4x^2}{1-x^2}$. 2. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

Найти экстремумы функции:

3. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. 4. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5. $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$. 6. $f(x) = x^2 \ln x$.

7. Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Найти экстремум функции $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$, используя два способа нахождения экстремума, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-3; 1]$.

Ответы

1. Убывает на $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; возрастает на $(0; 1) \cup (1; \infty)$.
2. Возрастает на $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; убывает на $(1; 3)$. 3. В точке $x = 0$ локальный максимум: $y(0) = -2$; в точке $x = 2$ локальный минимум: $y(2) = 2$. 4. В точке $x = -1$ локальный минимум: $y(-1) = -1$; в точке $x = 1$ локальный максимум: $y(1) = 1$. 5. В точке $x = -1$ локальный максимум: $y(-1) = 1$; в точке $x = 1$ локальный максимум: $y(1) = 1$. 6. В точке $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ локальный минимум: $y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$. 7. $m = -\frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $M = \frac{\pi}{2}$ при $x = -\frac{\pi}{2}$. 8. В точке $x = -4$ локальный минимум: $y(-4) = 0$; а в точке $x = -2$ локальный максимум: $y(-2) = 16$; в точке $x = 0$ локальный минимум: $y(0) = 0$, $m = y(0) = 0$, $M = y(1) = 25$.

Занятие № 2

Тема: Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции. Асимптоты

Задания первого уровня

Найти интервалы вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции:

1. $y = \frac{x}{e^x}$. 2. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Найти точки перегиба графика функции:

3. $y = \frac{x^3}{x - 1}$. 4. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

Найти асимптоты графика функции:

5. $y = \frac{2}{x^2 - 4}$. 6. $y = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 6}$. 7. $y = \frac{e^x}{x}$.

8. Для графика функции $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

Задания второго уровня

Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции:

1. $y = \frac{x}{\ln x}$. 2. $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

3. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$. 4. $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

Найти асимптоты графика функции:

5. $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$. 6. $y = \sqrt{x^2 + 2x} + 2$.

7. Для графика функции $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

Домашнее задание

Найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба графика функции:

1. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 2. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

Найти точки перегиба графика функции:

3. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$. 4. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Найти асимптоты графика функции:

5. $y = \frac{2x^2 + 4x\sqrt{x+2}}{2x+4}$. 6. $y = (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

7. Для графика функции $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ найти интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба и асимптоты.

Ответы

1. На $\left(0; e^{\frac{8}{3}}\right)$ график выпуклый, на $\left(e^{\frac{8}{3}}; \infty\right)$ график вогнутый; $\left(e^{\frac{8}{3}}; \frac{8}{3e^{\frac{8}{3}}}\right)$ – точка перегиба. 2. На $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ график вогнутый; на $(-2; 1)$ график выпуклый; $(-2; -36); (1; -12)$ – точки перегиба. 3. $(0; 0); (2; 0)$. 4. $(0; 0)$. 5. $x = -2$. 6. $x = 0$, $y = x - 3$. 7. На $(-\infty; -1); (1; 3)$ график вогнутый; на $(-1; 1); (3; \infty)$ график выпуклый; $(1; 0); \left(3; \frac{1}{8}\right)$ – точки перегиба; асимптоты: $x = -1$; $y = 1$.

Занятие № 3

Тема: Общее исследование функции и построение ее графика

Задания первого уровня

1. Исследовать функцию $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ и построить ее график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$ и построить ее график.

Задания второго уровня

1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{1+x}$ и построить ее график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{4-x^2}$ и построить ее график.
3. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ и построить ее график.

Домашнее задание

1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ и построить ее график.

2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Ответы

1. $D(y): (-\infty, +\infty)$. Функция четная. $y = 1$ – асимптота; $(0, +\infty)$ – интервал возрастания; $(-\infty; 0)$ – интервал убывания; $(0, 0)$ – точка минимума. $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty\right)$ – интервалы выпуклости; $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ – интервал вогнутости.

2. $D(y): (-\infty, -1) \cup (-1; 1) \cup (1, \infty)$. Функция нечетная. $x = \pm 1, y = x$ – асимптоты. Интервалы: возрастания $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, убывания $(\sqrt{3}, -1); (-1, 0); (0, 1); (1, \sqrt{3})$, $\left(-\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ – точка максимума; $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ – точка минимума. Интервалы: выпуклости – $(-\infty, -1); (0, 1)$; вогнутости – $(-1, 0); (1, \infty)$. $(0, 0)$ – точка перегиба.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая функция называется возрастающей, убывающей?
2. Какая функция называется невозрастающей, неубывающей?
3. Сформулируйте необходимый признак возрастания функции.
4. Сформулируйте необходимый признак убывания функции.
5. В чем состоит геометрический смысл необходимого признака возрастания функции?
6. В чем состоит геометрический смысл необходимого признака убывания функции?
7. Какие точки называют точками экстремума функции.
8. Сформулируйте определение точки максимума функции.
9. Сформулируйте определение точки минимума функции.
10. Какие точки называют стационарными, критическими.
11. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
12. Сформулируйте первый достаточный признак существования экстремумов функции.
13. Сформулируйте второй достаточный признак существования экстремумов функции.
14. Сформулируйте третий достаточный признак существования экстремумов функции.
15. Что такое наибольшее и наименьшее значение функции.
16. Дайте определение выпуклости (вогнутости) графика функции.
17. Сформулируйте достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции.
18. Дайте определение точки перегиба графика функции.
19. Сформулируйте необходимый признак точки перегиба графика функции.
20. Сформулируйте достаточный признак точки перегиба графика функции.
21. Перечислите порядок нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика функции.
22. Что называют асимптотой графика функции?
23. Как связано существование вертикальных асимптот и точек разрыва графика функции.
24. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования наклонных асимптот графика функции.
25. Какова общая схема исследования функции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти интервалы монотонности и локальные экстремумы функции

$$y = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 4$$

$$y = x^3 - 3x^2$$

$$y = e^{x^2 - 4x}$$

$$y = \ln \sqrt{1 + x^2}$$

$$y = 8x + \frac{x^2}{4}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

$$y = x^2 e^{-x}$$

$$y = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

$$y = x \ln^2 x$$

2. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3 - 1,5x^2 - 6x + 4}{x^2}$$

$$y = \frac{x^3 - 3x^2}{(x - 1)^2}$$

$$y = x e^{-4x}$$

$$y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

$$y = \frac{x^2}{1 + 3x}$$

$$y = \frac{x^3}{1 + 3x^2}$$

$$y = \sqrt{x^2 + 2}$$

3. Найти точки перегиба функции

$$y = x + \sin x$$

$$y = x^2 - \cos 2x$$

$$y = x e^{-4x}$$

$$y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x^2 - 2}}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \frac{x^2}{1 + 3x}$$

$$y = \frac{x^3}{1 + 3x^2}$$

$$y = x^3 - 5x^2 - 6x + 4$$

4. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 5]$

$$y = x - \sin 2x$$

$$y = x^2 - \cos 2x$$

$$y = x e^{-x}$$

$$y = \frac{2x^2 + 9}{x + 2}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 2}}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = \frac{x^2}{4 + x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{1 + 3x^2}$$

$$y = x^3 - 5x^2 - 6x + 4$$

5. Построить график функции, проведя полное исследование.

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$$

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}$$

$$y = \frac{6 - 2x^2}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$$

$$y = \frac{(x - 1)^2}{x + 1}$$

$$y = \frac{2x - x^2}{x + 1}$$

$$y = \frac{2x - x^2}{x - 1}$$

$$y = \frac{2x^2 - 2}{4 - x}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович А.И. Математический анализ: справочное пособие: в 2 ч. /А.И.Герасимович, Н.А.Рысюк –Минск: Вышэйшая школа, 1989, -Ч. 1. -287с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление /Я.С.Бугров, С.М.Никольский. –М.: Наука, 1980. -432с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. /Н.С.Пискунов. –М.: Наука, 1985. Т.1 -432с.
4. Линейная алгебра и основы математического анализа: сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. /под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. –М: Наука, 1981. –Ч.1. -368с.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н.Берман. –М.: Наука, 1985. -416 с.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. /А.П.Рябушко и др.; под общ. ред. А.П.Рябушко. –Минск: Вышэйшая школа, 2013. –Ч.1, -272 с.