

Белорусский национальный технический университет
Машиностроительный факультет
Кафедра «Инженерная экономика»

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

_____ Т.А. Сахнович

«__» _____ 2025 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан МСФ

_____ А.В. Арабей

«__» _____ 2025 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

для специальности

6-05-0718-01 «Инженерная экономика»

профилизации «Бизнес-процессы промышленных предприятий»

Составители: Л. В. Бутор, О. А. Лавренова

Рассмотрено и утверждено на заседании совета машиностроительного
факультета 27.10.2025 г., протокол № 2

Минск ♦ БНТУ ♦ 2025

Перечень материалов

1. «Теоретический раздел» содержит конспект лекций по дисциплине.
2. «Практический раздел» содержит перечень лабораторных работ по дисциплине.
3. Раздел «Контроль знаний» содержит контрольные тесты для проверки знаний по темам дисциплины.
4. Раздел «Дополнительные материалы» содержит учебную программу дисциплины со списком рекомендуемой литературы.

Пояснительная записка

Электронный учебно-методический комплекс представляет собой электронный ресурс, поддерживающий проведение лекционных занятий и лабораторных работ по дисциплине, содержащий теоретические, практические и методические материалы.

Цели ЭУМК.

Целью создания ЭУМК является достижение необходимого качества самостоятельной подготовки обучающихся дневной и заочной формы обучения, а также проведения лекционных занятий и лабораторных работ с обучающимися, имеющими различный уровень подготовки.

Особенности структурирования и подачи учебного материала.

Структура ЭУМК включает три основных раздела: теоретический; практический; контроль знаний и дополнительные материалы.

Теоретический раздел ЭУМК содержит материалы для изучения учебной дисциплины в объеме, установленном учебным планом по специальности и представлен конспектом лекций. В данном разделе приведено краткое изложение содержания учебного материала для тем учебной дисциплины.

Практический раздел ЭУМК содержит материалы для проведения лабораторных работ в объеме, установленном учебным планом по специальности.

Раздел контроля знаний ЭУМК включает контрольные тесты для проверки знаний по темам учебной дисциплины в соответствии с учебной программой.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК.

Открытие электронного издания производится посредством запуска файла ЭУМК_ИО.pdf. Возможен просмотр электронного издания непосредственно с компакт-диска до предварительного копирования на жесткий диск компьютера.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	7
ГЛОССАРИЙ	8
I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	11
Тема 1. Основы методологии исследования операций	11
1.1 Исследование операций как научная дисциплина	11
1.2 Основные понятия исследования операций	13
Тема 2. Задачи линейного программирования	21
2.1 Понятие задач линейного программирования	21
2.2 Двойственная задача линейного программирования	22
Тема 3. Методы решения задач линейного программирования	25
Тема 4. Задачи многокритериальной оптимизации	31
Тема 5. Транспортные модели	36
Тема 6. Двойственность и анализ чувствительности	41
6.1 Двойственная задача	41
6.2 Экономическая интерпретация двойственности. Свойства двойственных оценок	44
Тема 7. Сетевые модели	48
7.1 Метод сетевого планирования и управления	48
7.2 Правила построения сетевого графика	50
7.3 Пример построения сетевого графика	54
7.4 Расчет временных параметров сетевого графика	55
7.5 Оптимизация проекта по трудовым ресурсам	59
7.6 Оптимизация проекта во времени	61
7.7 Оптимизация с использованием внутренних резервов	64
Тема 8. Детерминированные модели динамического программирования	65
Тема 9. Модели управления запасами	68
9.1 Классические модели управления запасами	68
9.2 ABC-анализ	70
9.3 XYZ – анализ	72
Тема 10. Модели прогнозирования	73
10.1 Применение экспертных методов и их классификация	73
10.2 Метод ранговой корреляции	78
10.3 Метод парных сравнений	82
Тема 11. Основные понятия теории игр	89
11.1 Основные понятия и определения модели теории игр	89
11.2 Решение матричных игр в чистых стратегиях	90
11.3 Смешанные стратегии в матричных играх	92

	4
11.4 Критерии выбора наилучшей стратегии	96
Тема 12. Модели теории массового обслуживания.....	99
12.1 Основные понятия теории массового обслуживания	99
12.2 Классификация систем массового обслуживания.....	104
12.3 Расчет основных показателей функционирования СМО	105
12.4 Определение оптимальных параметров СМО.....	109
Тема 13. Имитационное моделирование.....	112
13.1 Определение имитационного моделирования и его значение.....	112
13.2 Подходы к имитационному моделированию	113
13.3 Метод Монте-Карло.....	116
Тема 14. Марковские процессы принятия решений	120
II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ.....	123
III. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ.....	135
Проверка знаний по теме 1: Основы методологии исследования операций	135
Проверка знаний по теме 2: Задачи линейного программирования	136
Проверка знаний по теме 3: Методы решения задач линейного программирования.....	138
Проверка знаний по теме 4: Задачи многокритериальной оптимизации	139
Проверка знаний по теме 5: Транспортные модели	140
Проверка знаний по теме 6: Двойственность и анализ чувствительности	142
Проверка знаний по теме 7: Сетевые модели	143
Проверка знаний по теме 8: Детерминированные модели динамического программирования	145
Проверка знаний по теме 9: Модели управления запасами	147
Проверка знаний по теме 10: Модели прогнозирования.....	148
Проверка знаний по теме 11: Основы понятия теории игр	149
Проверка знаний по теме 12: Модели теории массового обслуживания.....	150
Проверка знаний по теме 13: Имитационное моделирование.....	151
Проверка знаний по теме 14: Основы методологии исследования операций.....	153
IV. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ	154

ВВЕДЕНИЕ

Исследование операций (ИО) – это прикладная наука, занимающаяся применением математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Предметом исследования операций являются системы организационного типа (или организации), состоящие из большого числа взаимодействующих подразделений, интересы которых не всегда согласуются между собой и могут быть противоположными.

Основная цель исследования операций заключается в том, чтобы предоставить руководителю количественное обоснование для принятия наилучших решений.

Таким образом, исследование операций выступает как инструмент предварительного количественного обоснования управленческих решений в сложных технических, экономических организационных и других системах.

Термин «Исследование операций» возник в результате дословного перевода с английского выражения «operations research», введенного в конце 1930-х годов как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, занимавшегося вопросами эффективного использования радиолокационных систем для противовоздушной обороны. Первые публикации по исследованию операций, в которых математические методы были применены для решения военных задач, в частности, для анализа и исследования военных операций, появились в 1939–1940 гг.

Как самостоятельное научное направление исследование операций формировалось в годы Второй мировой войны и первоначально было связано с решением военных задач, например, расчетом оптимальных маршрутов конвоев, оценкой поражающего действия артиллерийских снарядов и т. п. С увеличением масштабов производства расширялись масштабы операционных исследований и круг решаемых задач, совершенствовались применяемые методы, и уже с конца 1940-х годов методы исследования операций используются для решения технико-экономических задач и задач управления на различных уровнях.

В 1957 году была создана Международная федерация исследования операций IFORS (International Federation of Operational Research Societies), цель которой была сформулирована как «развитие оперативных исследований как единой науки и их продвижение во всех странах мира» (<https://www.ifors.org/>). В настоящее время в ее состав входят более 50 национальных обществ, специалисты которых занимаются научными исследованиями в области управления и принятия решений.

В 1995 году был образован Институт исследований операций и управленческих наук INFORMS (Institute for Operations Research and the Management Sciences), который является крупнейшей международной профессиональной ассоциацией специалистов в области исследования операций, аналитики, науки о данных, статистики и смежных дисциплин, насчитывающий в настоящее время 12 000 членов со всего мира. INFORMS продвигает передовые методы решения сложных задач исследования операций, используя научный подход для улучшения принятия решений в различных отраслях (<https://www.informs.org/>).

В контексте данной дисциплины «операцией» называется всякое мероприятие (управляемый комплекс действий), объединенное единым замыслом

и направленное к достижению цели. Несмотря на различную природу операции могут быть описаны одними и теми же математическими моделями, более того, анализ этих моделей позволяет лучше понять суть того или иного явления и даже предсказать его дальнейшее развитие. Исследование операций предполагает формализованное описание операции и количественный анализ факторов, определяющих достижение поставленных в операции целей.

Модель операции – это совокупность следующих элементов: 1) оперирующая сторона (определённые лица или коллективы, объединённые организационным руководством и стремящиеся к поставленной цели), 2) запас активных средств для проведения операции, 3) набор стратегий и 4) критерий эффективности. Исследователь операции (отдельный специалист или коллективы, осуществляющие разработку стратегий) является частью оперирующей стороны. Под активными средствами для проведения операции понимается совокупность ресурсов (материальных, финансовых и др.), используемых для достижения цели. Критерий эффективности операции (или целевая функция) вводится для сравнения операций между собой по степени их соответствия достижению цели операции.

Исследование операций является междисциплинарной научной дисциплиной, которая объединяет математику, статистику, экономику, кибернетику и другие области. При решении практических задач в исследованиях принимают участие команды специалистов различного профиля: математики, экономисты, инженеры. Благодаря наличию общих закономерностей в развитии самых различных систем их исследование возможно на основе применения таких алгоритмов и теорий, как линейное и нелинейное программирование, теория массового обслуживания, теория игр, стохастическое моделирование и др.

Методы исследования операций активно применяются в: экономике и финансах для инвестиционного анализа и управления портфелями проектов; логистике – для планирования маршрутов и управления запасами; промышленности – для планирования производства и загрузки мощностей и т.д.

Дисциплина направлена на формирование умений и навыков применения методов исследования операций и оптимизации для решения профессиональных задач по оптимизации производственных планов, управления запасами, распределения ресурсов, планирования логистических маршрутов, прогнозирования и принятия решений в условиях неопределенности.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЗЛП – задача линейного программирования;
ЗМП – задача математического программирования;
ЗПР – задача принятия решения;
ЗРВ – закон распределения вероятностей;
ИМ – имитационная модель;
ИО – исследование операций;
ЛП – линейное программирование;
ЛПР – лицо, принимающее решение;
МДП – метод динамического программирования;
МКО – многокритериальная оптимизация;
ММ – математическая модель;
МСИ – метод статистических испытаний;
ОС – обратная связь;
ОУ – объект управления;
ППП – пакет прикладных программ;
ПР – принятие решения;
ТМО – теория массового обслуживания;
СГ – сетевой график;
СМО – система массового обслуживания;
СПУ – сетевое планирование и управление;
СППР – система поддержки принятия решений;
ТЗ – транспортная задача;
ЦФ – целевая функция;
ЭС – экономическая система.

ГЛОССАРИЙ

Выборка – некоторое количество наблюдений, отобранных из генеральной совокупности.

Задача:

- 1) в теории решений – логическое высказывание вида «Дано В, требуется С», где В – исходное состояние объекта управления, С – целевое состояние;
- 2) в хозяйственно-управленческой практике – задание, поручение, даваемое руководителем работнику аппарата управления или вышестоящим органом управления подчинённой организации или предприятию для исполнения.

Значение оценки – число, полученное в результате применения оценки к конкретной выборке.

Исследование операций (Operations Research, OR):

- 1) применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности (Вентцель Е. С.);
- 2) применение математических методов для моделирования систем и анализа их характеристик (Таха Х.);
- 3) междисциплинарная прикладная научная дисциплина, которая использует математические и аналитические методы для поиска наилучших (оптимальных) решений в сложных системах.

Критерий эффективности – это показатель (мерило), по значению которого лицом, принимающим решение (ЛПР) оцениваются общие качество и (или) количество результатов целенаправленного действия (деятельности), называемых эффективностью и раскрываемых через категорию цели действия (деятельности) (Гермейер Ю. Б.).

Математическое моделирование – создание математических моделей реальных систем (например, производственных процессов, логистических цепочек), которые описывают цели, ограничения и переменные.

Математическая модель:

- 1) количественное отображение наиболее существенных свойств и отношений экономической системы на принятом формальном языке в рамках заданных допущений;
- 2) совокупность переменных и связей между ними в форме уравнений, описывающих зависимость между наблюдаемыми переменными;
- 3) формальные отношения, связывающие действующие факторы операции с принятым критерием эффективности.

Метод (от греч. путь) – систематизированная совокупность шагов, действий, которые необходимо предпринять, чтобы решить определённую задачу или достичь определённой цели.

Метод наименьших квадратов (МНК) – метод нахождения оценок параметров регрессии, основанный на минимизации суммы квадратов остатков всех наблюдений $\sum q_i^2$.

Метод Монте-Карло – численный метод, применяемый для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадают с решениями аналитических задач.

Методика – совокупность методов обучения чему-нибудь, практическое выполнение чего-нибудь; последовательность действий, операций или алгоритмов, отражающих специфику предметной области и направленных на практическое (эффективное) применение одного или нескольких методов к решению определённого класса задач.

Моделирование – процесс исследования реальной системы, включающий построение модели, целенаправленное изучение её свойств и перенос полученных знаний на исследуемую систему.

Модель операции – это совокупность, состоящая из оперирующей стороны (определённые лица или коллективы, объединённые организационным руководством и стремящиеся к поставленной цели), запаса активных средств для проведения операции, набора стратегий и критерия эффективности.

Наблюдение – наблюдаемое значение случайной величины или набора случайных величин.

Несмещённая оценка – оценка, имеющая нулевое смещение.

Операция:

- 1) управляемое мероприятие, последовательность действий, объединённых общим замыслом и направленных на достижение конкретной цели;
- 2) организованная деятельность в любой области жизни, объединённая единым замыслом, направленная на достижение определённой цели, имеющая характер повторяемости, т.е. многократности.

Примеры операций:

- а) производственная деятельность предприятия;
- б) формирование портфеля заказов предприятия;
- в) разработка плана транспортных перевозок;
- г) совокупность мероприятий, направленных на реализацию бизнес-плана.

Ресурсы операции (в зависимости от вида операции):

запасы сырья, рабочая сила, денежные средства, информационные и интеллектуальные ресурсы, торговые площади и т.д.

Оптимизация – поиск наилучшего решения задачи из множества возможных при заданных условиях и ограничениях, например, чтобы максимизировать выгоду (прибыль, эффективность) или минимизировать потери (затраты, время)

Проблема – несоответствие между существующим и требуемым (целевым) состоянием системы при данном состоянии среды в рассматриваемый момент времени.

Решение – определённый выбор зависящих от организатора параметров.

Система – целостная совокупность взаимосвязанных частей или подсистем, взаимодействующая с внешней средой и, как правило, предназначенная для достижения определённой цели (целей).

Система принятия решений – организованная совокупность людей, методов, технических средств, информации и технологии принятия решения для достижения поставленных целей

Системный анализ – методология количественного обоснования решений, основанная на структуризации систем и количественном сравнении альтернатив с использованием принципов системного подхода и методов теории принятия решений.

Ситуация (в теории решений) – логическое высказывание вида «дано В», где В – исходные условия, а цель явно не определена.

Смещение оценки – разность между МОЖ оценки и истинным значением оцениваемого параметра.

Состоятельная оценка – оценка, у которой смещение и дисперсия стремятся к нулю при увеличении объёма выборки.

Управление – процесс формирования целенаправленного поведения системы посредством информационных воздействий, вырабатываемых человеком (группой людей) или устройством.

Цель – ситуация или область ситуаций, которая должна быть достигнута при функционировании системы за определённый промежуток времени.

Экономико-математическая модель – достаточно точное описание исследуемого экономического процесса или объекта с помощью математического аппарата.

Эффективная оценка – несмещённая оценка, имеющая наименьшую дисперсию среди всех несмещённых оценок.

Эффективность решения – это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Тема 1. Основы методологии исследования операций

1.1 Исследование операций как научная дисциплина

Исследование операций (ИО) представляет собой научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Учитывая важность количественного фактора в исследовании операций и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций исследование операций можно определить как теорию обоснования оптимальных решений.

Основной задачей ИО является применение научных принципов и математических методов к исследованию функционирования систем с целью оценки характеристик и формирования рекомендаций по выбору оптимальных решений, обеспечивающих наиболее эффективное применение системы в конкретных условиях.

Объектом исследования в ИО является конкретная реально существующая (например, экономическая) система. Предметом исследования в ИО являются характеристики или показатели, отражающие эффективность применения системы по целевому предназначению в конкретных условиях. Исследование операций позволяет количественно оценить эффективность работы системы в конкретных условиях и выработать рекомендации по улучшению её характеристик.

Методические особенности исследования операций:

1. Построение формализованной модели операции, предназначенной для получения количественных оценок альтернативных решений.
2. Необходимость охвата различных сторон деятельности.
3. Учёт прошлого опыта при исследовании аналогичных операций
4. Использование результатов экспериментов, поставленных в различной форме (игры, испытания, учения и т. д.).
5. Направленность результата на количественное обоснование альтернатив и упрощение процесса принятия решения, а не на выдачу самого решения.

Всякая задача исследования операций является оптимизационной, т.е. состоит в выборе среди некоторого множества допустимых решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом допустимость каждого решения принимается в смысле его фактического осуществления, а оптимальность – в смысле его целесообразности.

Содержанием теоретического аспекта ИО является математический анализ оптимизационных задач и нахождение их оптимальных решений. Прикладной аспект ИО заключается в составлении (постановке) оптимизационных задач и в определении их оптимальных решений.

Постановка задачи ИО охватывает, прежде всего, формальное описание множества допустимых решений и критериев оптимального выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлениям о возможном и целесообразном выборе в данных условиях. Проверка адекватности самих содержательных представлений объективной реальности и реализация решения уже выходят за пределы области интересов ИО.

Все решения (в том числе и оптимальные) принимаются всегда на основе информации, которой располагает принимающий решения субъект. Поэтому каждая задача ИО в своей постановке должна отражать структуру и динамику знаний ЛПР о множестве допустимых решений и о критерии оптимальности. Например, если принятие решения происходит в наперёд известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача называется статической.

Операционное исследование, в общем случае, представляет собой итерационный процесс исследования, каждый следующий шаг которого приближает нас к решению конкретной проблемы. В центре операционного исследования находятся построение и расчет параметров математической модели (ММ) операции.

Математическая модель – это система математических соотношений, приближенно, в абстрактной форме описывающих изучаемый процесс или систему.

Экономико-математическая модель – это математическая модель, предназначенная для исследования экономической проблемы.

В настоящее время ММ применяются в задачах анализа, прогнозирования и выбора оптимальных решений в различных областях экономики. Это планирование и оперативное управление производством, управление персоналом, управление запасами, распределение материальных ресурсов, планировка и размещение активов, руководство инновационным проектом, формирование портфеля заказов и т. п.

По числу критериев эффективности математические модели делятся на однокритериальные и многокритериальные. Многокритериальные математические модели содержат два и более критерия.

По учёту неизвестных факторов математические модели делятся на детерминированные, стохастические и модели с элементами неопределенности.

В стохастических моделях неизвестные факторы – это случайные величины, для которых известны функции распределения и различные статистические характеристики (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и т. п.). Среди стохастических можно выделить:

- модели стохастического программирования, в которых либо в целевую функцию, либо в ограничения входят случайные величины;

- модели теории случайных процессов, предназначенные для изучения процессов, состояние которых в каждый момент времени является случайной величиной;

- модели теории массового обслуживания, в которой изучаются многоканальные системы, занятые обслуживанием требований; к стохастическим моделям можно отнести модели теории полезности, поиска и принятия решений.

Для моделирования ситуаций, зависящих от случайных факторов, для которых невозможно собрать статистические данные, используются модели с элементами неопределенности.

В моделях теории игр задача представляется в виде игры, в которой участвуют несколько игроков, преследующих разные цели, например, организация предприятия в условиях конкуренции.

В имитационных моделях реальный процесс разворачивается в машинном времени, и прослеживаются результаты случайных воздействий на него, например организация производственного процесса.

В детерминированных моделях неизвестные факторы не учитываются. По виду целевой функции и ограничений детерминированные модели делятся на группы: линейные, нелинейные, динамические и графические.

В линейных моделях целевая функция и ограничения линейны по управляющим переменным. Построение и расчёт линейных моделей являются наиболее развитым разделом математического моделирования, поэтому часто к ним стараются свести и другие задачи либо на этапе постановки, либо в процессе решения.

Нелинейные модели – это модели, в которых либо целевая функция, либо какое-нибудь из ограничений (либо все ограничения) нелинейны по управляющим переменным.

Для нелинейных моделей нет единого метода расчета. В зависимости от вида нелинейности, свойств функции и ограничений можно предположить различные способы решения.

В динамических моделях в отличие от статистических линейных и нелинейных моделей учитывается фактор времени. Критерий оптимальности в динамических моделях может быть самого общего вида.

Графические модели используются тогда, когда задачу удобно представить в виде графической структуры.

1.2 Основные понятия исследования операций

Современный этап развития науки управления характеризуется интенсивным поиском новых идей, подходов, методов и средств, способных повысить эффективность управления сложными социально-экономическими системами в условиях все возрастающего динамизма процессов, усложнения связей в системах и все более жесткого ограничения ресурсов. Одним из перспективных подходов является рассмотрение проблем управления с позиций принятия решений. Этот подход, связанный с использованием таких категорий, как «решение», «процесс принятия решений», «система принятия решений», в литературе называют концепцией принятия решений, теорией принятия решений, школой принятия решений. Актуальность и практическая ценность выделения и изучения проблем принятия решений в процессе управления определяются следующими причинами.

Принятие решений занимает центральное место в процессе управления. Как известно, принятие решений наряду с прогнозированием, планированием, оценкой обстановки, исполнением решений, контролем и учетом является функцией управления. Центральная, важнейшая роль принятия решений определяется тем, что все другие функции управления направлены на формирование или реализацию решений. Кроме того, любую функцию управления технологически можно представить в виде последовательности решений. Например, при прогнозировании и планировании принимаются решения, связанные с выбором методов и средств, организацией работ, оценкой достоверности информации, выбором наиболее достоверного варианта прогноза и наилучшего варианта плана. Аналогичную цепочку решений можно построить и при рассмотрении других функций управления. Таким образом, функция принятия решений является с методологической и технологической точек зрения более общей, чем другие

функции управления, поэтому в литературе иногда управление рассматривается как процесс принятия решений.

Кроме этого, принятие решений – это личная функция руководителя. Для руководителя любого ранга принятие решений является основной задачей, которую он обязан решать в процессе управления. Поэтому знание методов, технологии и средств решения этой задачи является необходимым элементом квалификации руководителя.

Современной моделью функционирования организационных систем является система принятия решений. Эта модель согласует положительные стороны двух предшествующих теоретических моделей, имеющих структурноописательный характер: механической модели организации как «полностью рациональной» системы; естественной модели организации как «живой» социальной системы.

Система принятия решений является третьей моделью организационных систем, в которой как первичный элемент рассматривается «решение». Основное развитие эта модель получила на рубеже 60-х годов прошедшего века. В данной модели рассматриваются рациональные принципы механической модели с учетом социальной и психологической специфики естественной модели. В решении объединяются объективные факторы информационного анализа проблем, проводимого на основе логического мышления, математических методов и ЭВМ, и субъективные психологические факторы лица, принимающего решение. Поэтому система принятия решений позволяет осуществить системный подход к исследованию сложных организационных систем, включающий социальнотехнологическую форму реализации процессов управления.

Стоит отметить, что подход, ориентированный на принятие решений, создает прочную базу для дальнейшего совершенствования автоматизированных систем информационного обеспечения и управления. Эти системы должны развиваться от автоматизации трудоемких рутинных учетно-расчетных задач до логикоаналитических задач формирования и обоснования вариантов решений. Рассмотрение организационной системы принятия решений, выделение в ней центров принятия решений, формирование информационных потоков, соответствующей структуры и их динамической перестройки в зависимости от решаемых проблем являются перспективным направлением совершенствования управления сложными социально-экономическими системами.

Таким образом, изучение проблем управления с единой методологической позиции принятия решений позволяет практически осуществить комплексный, системный подход к анализу функционирования организационных систем, технологии их управления, применению современных методов и технических средств.

В настоящее время существует достаточно большое, число современных научных дисциплин, посвященных проблеме принятия решений. К таким дисциплинам можно отнести и исследование операций.

Ситуацию, в которой происходит принятие решений, в общем случае характеризуют следующие основные черты.

1. Наличие цели (целей). Необходимость принятия решения диктуется наличием некоторой цели, которую нужно достичь, например: выполнить плановое задание, выбрать тип прибора, назначить план перевозок и т. д. Если же цель не поставлена, то не возникает и необходимость принимать какое-либо решение.

2. *Наличие альтернативных линий поведения.* Решения принимаются в условиях, когда существует более одного способа достижения цели, или иначе несколько альтернатив достижения цели. С различными альтернативами могут быть связаны различные затраты и разные вероятности достижения цели. Эти затраты и вероятности не всегда могут быть определены. Поэтому часто принятие решений сопряжено с неясностью и неопределенностью. Если же существует лишь одна линия поведения, то выбора нет и, следовательно, решение принимать не требуется: оно очевидно.

3. *Наличие ограничивающих факторов.* Решения обычно принимаются в условиях действия большого числа факторов, ограничивающих возможность выбора способов действий. Эти факторы называют дисциплинирующими условиями. Факторы, подлежащие учёту, можно условно разделить на три основные группы: экономические, технические и специальные. Под экономическими факторами понимают факторы, связанные с ресурсами: время, денежные средства, трудовые ресурсы, производственные возможности и т. п.

К техническим факторам обычно относят факторы, которые непосредственно связаны с инженерным анализом и выработкой требований к техническим характеристикам объектов: габаритам, массе, прочности, надёжности и т. п. Наконец, социальные факторы, в том числе и чисто человеческие, выражают требования не только политической или социальной целесообразности осуществления той или иной альтернативы, но и этики.

Все перечисленные факторы накладывают ограничения на возможности достижения поставленной цели. Очевидно, что отсутствие ограничений существенно упрощает задачу принятия решения.

Таким образом, задача принятия решения (ЗПР) возникает в том и только в том случае, когда существует цель, которую нужно достичь, когда возможны различные способы ее достижения и существуют факторы, ограничивающие возможности достижения цели. Выяснение всех трех указанных элементов задачи принятия решений должно обязательно предшествовать её непосредственному решению. Во всех случаях задача принятия решений направлена на определение наилучшего (оптимального) или приемлемого способа действий для достижения одной или нескольких целей.

Под *целью* понимается в широком смысле идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому состоянию, то имеет место проблемная ситуация, или проблема, выработка плана устранения которой и составляет сущность задачи принятия решений.

Конечным результатом ЗПР является *решение*. Решение можно рассматривать как предписание к действию. С точки зрения содержания решением может быть стратегия управления экономической системой, способ действия, план работы, вариант инновационного проекта и т. д. [14].

Одним из основных понятий теории принятия решений является операция. Под термином «операция» следует понимать организованную деятельность в любой области жизни, объединенную единым замыслом, направленную на достижение определенной цели, имеющую характер повторяемости, т. е. многократности. В дальнейшем операцией будем называть управляемое мероприятие, систему действий, объединённых единым замыслом и направленное на достижение какой-либо конкретной цели. В данных формулировках

подчеркиваются две особенности операции: её целевая направленность и повторяемость. Именно отсюда возникает возможность проводить исследования, касающиеся количественных сторон операции, общими научными путями с использованием методов теории вероятностей, статистики, и данных различных наук – физики, биологии, техники, экономического анализа и др.

К примерам операций можно отнести следующее: производственная деятельность отрасли, выпускающей некоторую народнохозяйственную продукцию, формирование портфеля заказов фирмы, разработка плана транспортных перевозок материальных средств, совокупность мероприятий, направленных на реализацию бизнес-плана и т. д.

Изучение операций может проводиться как путем исследования оригинала самой операции, так и путем исследования модели операции. Основным методом исследования операций, особенно крупного масштаба, является метод моделирования. Получить аналитическое описание операции удаётся только в самых простых случаях. Постановка специальных экспериментов на реальных экономических системах с целью выбора оптимальных решений обычно сложна, связана с большими расходами и непредсказуемыми последствиями или просто нереальна. На практике значительно проще и рациональнее изучить закономерности и построить приближённую математическую модель экономического процесса и на основе изучения модели выбрать лучшее решение, отвечающее множеству нередко противоречивых требований и условий. Таким образом, основной метод изучения операций крупного масштаба - исследование моделей операции, главным образом, моделей математических. Второе важное понятие исследования операций – оперирующая сторона. Совокупность лиц, которые стремятся в данной операции к достижению некоторой цели, а также технических устройств, с помощью которых цель достигается, называется оперирующей стороной.

В операции могут участвовать одна или несколько оперирующих сторон, преследующих различные, несовпадающие цели. Несовпадение целей оперирующих сторон создаёт конфликтную ситуацию. Подобные операции называются многосторонними или конфликтными. Так, например, в торговле исход операции зависит от деятельности двух сторон, преследующих противоположные цели: фирмы, стремящейся продать товар с прибылью, организации, приобретающей товар заданного качества по минимальной цене. Наряду с оперирующими сторонами в операции могут участвовать арбитры и природные силы, поведение которых в явном виде не подчинено стремлению к достижению цели операции. Для достижения цели оперирующая сторона должна располагать некоторым запасом активных средств (ресурсов), используя или расходуя которые она может добиваться достижения цели. В качестве ресурсов в зависимости от сущности операции могут выступать: запасы сырья, рабочая сила, денежные средства, информационные и интеллектуальные ресурсы, торговые площади и т. п.

Операция является управляемым мероприятием. Оперирующая сторона управляет операцией, выбирая те или иные способы использования ресурсов – способ действий. В качестве синонимов термина «способ действия» часто используют следующие термины: альтернатива, стратегия, управление, решение. Возможности оперирующей стороны по управлению операцией всегда ограничены рядом естественных причин. Этот факт проявляется в наличии ограничений –

дисциплинирующих условий – на выбор способов действий оперирующей стороны – стратегий. Стратегии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, называются всевозможными или допустимыми (в смысле заданных ограничений). Понятие «допустимые стратегии» является относительным: класс допустимых стратегий определяется наложенными ограничениями и изменяется, если изменяются ограничения.

Реализация той или иной допустимой стратегии оперирующей стороны обычно приводит к различным исходам операции. Чтобы сравнивать между собой качество различных стратегий, нужно иметь возможность оценивать соответствующие исходы операций. Исход операции оценивается с помощью некоторых критериев качества (критериев эффективности или критериев оптимальности). Критерий оптимальности является математическим выражением цели операции (математической моделью цели операции) позволяющим количественно определить (оценить) степень достижения этой цели. Стратегия, наилучшая в смысле выбранного критерия оптимальности, т. е. доставляющая ему требуемое экстремальное (максимальное или минимальное) значение, называется оптимальной стратегией. Синонимами этого термина являются термины «оптимальное решение», «оптимальное управление» и т. п.

Следует всегда иметь в виду, что понятие «оптимальная стратегия» является не абсолютным, а относительным, как и понятие «допустимая стратегия». Не существует оптимальной стратегии вообще, всякая оптимальная стратегия является наилучшей лишь в некотором узком, совершенно конкретном смысле, определенном критерием оптимальности. Одна и та же стратегия, оптимальная в смысле одного критерия, может оказаться далеко не оптимальной и даже очень плохой по другому критерию. Поскольку значение критерия оптимальности в любой операции зависит от каких-либо величин, описывающих свойства операции, используемые ресурсы и т. д., то критерий оптимальности часто называют также критериальной или целевой функцией (функцией эффективности).

Следующее важное понятие исследования операций – исследователь операции. В составе оперирующей стороны специально выделяется и занимает особое место исследователь операции, или операционист. Он принадлежит к оперирующей стороне и должен преследовать ту же цель, что и оперирующая сторона. Однако операционист не принимает окончательных решений по выбору способов действий, а лишь помогает в этом оперирующей стороне, предоставляя ей количественные основания для принятия решений. Иными словами, исследователь операции имеет право не решающего, а лишь совещательного голоса. Естественно, что поэтому он не должен нести ответственности за принятые решения и последствия от реализации предпринятых действий.

Суть работы исследователя операции состоит в детальном изучении сущности и специфики решаемой проблемы, определении всего набора допустимых стратегий, оценке их качества, сравнении их между собой и определении оптимальной стратегии. Исследование операции завершается рекомендациями по выбору оптимальной стратегии. Само же принятие решения, т. е. окончательный выбор стратегии и её реализация, выходят за рамки исследования и относятся к компетенции ответственного лица – руководителя операции (РО).

Алгоритм типового процесса принятия решений может выглядеть следующим образом:

- 1) предварительное формулирование проблемы;

- 2) определение целей операции и выбор соответствующих критериев оптимальности;
- 3) выявление и формулирование дисциплинирующих условий;
- 4) составление возможно более полного списка альтернатив и предварительный их анализ с целью отбрасывания явно неэффективных;
- 5) сбор необходимой информации и прогнозирование изменений параметров операции в будущем;
- 6) точное формулирование постановки задачи;
- 7) разработку математической модели операции, позволяющей оценивать эффективность каждой альтернативы;
- 8) выбор метода решения задачи и разработка алгоритма решения;
- 9) оценку альтернатив и определение наиболее эффективных;
- 10) принятие решения ответственным руководителем;
- 11) выполнение решения и оценку результатов [14].

Процесс принятия решений является сложной итеративной циклической процедурой. Действительно, результат практически любого этапа исследований может повлиять на постановку задачи и привести к её изменению. В частности, даже практическое опробование принятого решения, если оно дает нежелательный результат, также является стимулом к пересмотру постановки задачи и поиску новых решений.

Оптимизация представляет собой поиск наилучшего решения задачи. Именно на этой фазе вся имеющаяся информация преобразуется в конечную форму, описывающую решение и показывающую, как зависят характеристики решения от исходных данных. Проведение оптимизации приводит к полной определенности решения задачи. Для решения задач в условиях неопределенности не всегда возможно проведение фазы оптимизации в строго формальном виде. Во многих случаях лицо, принимающее решение, (ЛПР) осуществляет оптимизацию в неявном виде, опираясь на некоторые общие принципы, профессиональный опыт и свои предположения.

Процесс принятия решения (ПР) требует полноценного информационного обеспечения, которое предполагает использование как имеющейся информации (априорной информации), так и получение, добывание с помощью экспериментов (опытов) новой послеопытной (апостериорной) информации.

Обобщенной характеристикой решения является эффективность решения. Эта характеристика включает эффект решения, определяющий степень достижения целей и стоимость решения - совокупность затрат ресурсов для принятия и реализации решения. Эффективность решения - это степень достижения целей, отнесенная к затратам на их достижение. Решение тем эффективнее, чем выше степень достижения целей и ниже стоимость затрат. *Система принятия решений* – организованная совокупность людей, методов, технических средств, информации и технологии ПР для достижения поставленных целей.

Классификацию ЗРП можно осуществить на основе опыта, накопленного в области технической и экономической кибернетики с учётом особенностей формальной модели. Для этого выделяют следующие отдельные, важные классификационные признаки:

1. Число целей операции, преследуемых одной оперирующей стороной.

2. Наличие или отсутствие зависимости критерия оптимальности и дисциплинирующих условий от времени.
3. Наличие случайных и неопределенных факторов, влияющих на исход операции. Этот признак назван «определенность – риск – неопределенность».

По первому классификационному признаку ЗПР делятся на два больших класса: *одноцелевые, или однокритериальные* (скалярные), и *многоцелевые, или многокритериальные*, ЗПР.

Многокритериальные задачи – задачи, которые состоят в поиске лучшего решения, удовлетворяющего нескольким несводимым друг с другом критериям. Для решения таких задач требуется их формализация, которая неизбежно связывается с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними. Термин «многокритериальные задачи» нельзя смешивать с термином «задачи векторной оптимизации»: в последнем случае речь идет о сопоставлении однородных критериев разных участников (такие задачи решаются с помощью критерия оптимальности, по Парето). Нельзя также оба эти термина смешивать с термином «многоэкстремальные задачи», для которых характерны не разные критерии, а наличие у целевой функции не только глобального, но и локальных экстремумов.

По второму классификационному признаку ЗПР делятся на два больших класса: *статические и динамические*.

В статических ЗПР критериальная функция и функция ограничений не зависят от времени. В статической экономико-математической модели значения всех переменных относятся к одному моменту времени. Статический подход к изучению экономики – это изучение состояния экономики на данный момент (статистики) в отличие от динамического подхода, при котором экономика исследуется в развитии и движении.

Динамические задачи сложнее статических. Модель является динамической, если как минимум одна её переменная относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные. Динамические задачи отличаются две характерные особенности:

а) в качестве критерия оптимальности в динамических ЗПР выступает обычно не функция, как в статических ЗПР, а функционал, зависящий от функции времени, описывающий поведение некоторых динамических объектов, участвующих в операции;

б) в числе дисциплинирующих условий в динамических ЗПР обычно присутствуют так называемые дифференциальные связи. Они представляют собой дифференциальные уравнения, описывающие поведение динамических объектов, участвующих в операции.

Для математического описания динамических моделей используются системы линейных дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностные уравнения (в моделях с дискретным временем), а также системы обыкновенных алгебраических уравнений.

В качестве примера динамической ЗПР можно привести задачу вывода летательного аппарата в заданную точку пространства с заданной точностью и за заданное время с минимальным расходом топлива. В настоящее время динамические ЗПР ещё не получили широкого применения в экономических

исследованиях по причине сложности получения достоверных данных о бизнессреде.

По третьему классификационному признаку – «определенность – риск – неопределенность» – ЗПР делятся на три больших класса.

Принятие решений *при определенности (детерминированные ЗПР)*. Такие ЗПР характеризуются однозначной, детерминированной связью между принятым решением и его исходом. Это наиболее простой и наиболее изученный случай принятия решений, когда относительно каждой стратегии оперирующей стороны заранее, до проведения операции, известно, что она неизменно приводит к некоторому конкретному результату. В детерминированных ЗПР критерий оптимальности и дисциплинирующие условия зависят только от стратегий оперирующей стороны и фиксированных детерминированных факторов, т. е. от факторов, полностью известных оперирующей стороне.

Принятие решений *в условиях риска (стохастические ЗПР)*. В этом случае каждая стратегия оперирующей стороны может привести к одному из множества возможных исходов, причём каждый исход имеет определённую вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности заранее, до определения операции, полностью известны. В некоторых случаях эти вероятности могут быть определены с любой требуемой для целей исследования степенью точности. В стохастических ЗПР критерий оптимальности зависит кроме стратегий оперирующей стороны и детерминированных факторов также от фиксированных стохастических факторов, т. е. от случайных факторов, законы распределения вероятностей которых априорно известны оперирующей стороне. Статистические характеристики (законы распределения, математические ожидания, дисперсии и т. п.) стохастических факторов, а также значения детерминированных факторов являются той исходной информацией, которая может быть использована исследователем операции при определении оптимальной стратегии.

Принятие решений *в условиях неопределенности*. В данных ЗПР критерий оптимальности зависит кроме стратегий оперирующей стороны и фиксированных факторов также от неопределённых факторов, неподвластных оперирующей стороне и неизвестных ей в момент принятия решения (или известных с недостаточной для принятия решения точностью). В результате влияния неопределённых факторов каждая стратегия оперирующей стороны оказывается связанной с множеством возможных исходов, вероятности которых либо неизвестны оперирующей стороне (или известны с недостаточной для принятия решения точностью), либо вовсе не имеют смысла. Первое соответствует неопределённым факторам стохастической природы (т.е. недостаточно изученным стохастическим факторам, относительно которых отсутствует необходимая статистическая информация), второе – неопределённым факторам нестохастической природы.

Тема 2. Задачи линейного программирования

2.1 Понятие задач линейного программирования

Задачи оптимизации – задачи о выборе наилучшего (оптимального) решения – занимают центральное место в экономико-математическом моделировании. Для решения оптимизационных задач применяется аппарат математического программирования, в том числе, линейное программирование.

Линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на переменные которой наложены линейные ограничения.

Линейное программирование является инструментом математической теории оптимального принятия решений (*термин «программирование» в данном случае означает, что искомые переменные определяют программу (план) работы (производства) исследуемого экономического объекта; прилагательное «линейное» означает, что существует линейная (прямо пропорциональная) зависимость между переменными модели*).

Существуют следующие типы задач линейного программирования.

Задача оптимального производственного планирования. Этот тип задач является наиболее распространенным и сводится к определению максимального выпуска продукции в соответствии с имеющимися ограниченными запасами ресурсов при различных технологиях производства.

Задача об оптимальном составе смеси. Задачи подобного рода возникают при необходимости смешивания различных компонент со сходными свойствами с целью создания смеси, отвечающей определенным требованиям.

Задача об оптимальном плане перевозок (транспортная задача). В простейшем варианте транспортная задача возникает при необходимости наиболее рациональной перевозки некоторого однородного груза. При этом потребителям безразлично откуда он поступает, лишь бы был удовлетворен спрос, а каждый поставщик имеет возможность поставлять груз любому потребителю.

Задача динамики производства и создания запасов. Эта задача состоит в оптимальном распределении во времени производства некоторой продукции и ее запасов. В условиях действующего производства всякое изменение объема выпуска связано с дополнительными затратами. Хранение готовой продукции также требует определенных расходов. Когда спрос на готовую продукцию в отдельные отрезки времени непостоянен, возникает проблема поиска такого плана выпуска, при котором суммарные затраты на расширение и свертывание производства, а также на хранение излишков продукции были бы минимальными при условии своевременного и полного удовлетворения потребностей.

Линейное программирование является подходящим методом для моделирования распределения ресурсов, если цель и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в форме линейных взаимосвязей между переменными. Этот метод включает в себя ряд шагов:

1. Необходимо осуществить математическую формализацию ЗЛП. Это означает, что нужно идентифицировать управляемые переменные и цель задачи.

Затем с помощью этих переменных цель и ограничения на ресурсы описываются в форме линейных соотношений.

2. После завершения формулировки ЗЛП рассматриваются все допустимые сочетания переменных. Из них выбирается то, которое оптимизирует целевую функцию задачи. Если исследуемая задача содержит только две переменные, ее можно решить графически. Однако в случае исследования задачи со многими переменными необходимо прибегнуть к одному из алгебраических методов решения задач линейного программирования, для использования которых существуют пакеты прикладных программ.

3. Когда оптимальное решение получено, производится его оценка. Она включает в себя анализ задачи на чувствительность.

Задача линейного программирования (ЗЛП) в общем виде формулируется следующим образом.

Найти максимум целевой функции (ЦФ) по формуле (2.1):

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad s \leq m; \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{s+1, m}; \quad (2.3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad k \leq n. \quad (2.4)$$

Для решения ЗЛП используются симплекс-метод и графический метод.

Любой ЗЛП (1) – (4) можно поставить в соответствие **двойственную задачу** следующего вида:

$$f(Y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min; \quad (2.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, k}; \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j, \quad j = \overline{k+1, n}; \quad (2.7)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.8)$$

Заметим, что y_i имеет произвольный знак для $i = \overline{s+1, m}$.

2.2 Двойственная задача линейного программирования

Двойственная задача является фундаментальным понятием оптимального программирования. К каждой ЗЛП, в которой определяется наилучшее распределение имеющихся ресурсов, можно построить соответствующую симметричную задачу, в которой неизвестными будут особые расчетные цены ресурсов, при которых каждый вид продукции, выпускаемый по оптимальному

плану, будет рентабелен. Таким образом в оптимальном плане значения целевых функций обеих задач оказывается равным. При этом в прямой задаче оно отображает наиболее эффективную комбинацию ресурсов, а в обратной наиболее эффективную комбинацию расчетных цен (их называют оптимальными или **объективно обусловленными оценками**).

Например, если прямой задачей является максимизация прибыли, то двойственная заключается в минимизации затрат ресурсов. Целевая функция такой задачи – сумма произведений цены каждого ресурса на его количество – равна целевой функции прямой задачи. Эту цену называют **объективно обусловленной оценкой** (оптимальной оценкой, разрешающим множителем). В двойственной задаче ограничения показывают, что общий расход ресурсов на производство единицы продукции, измеренный в оптимальных ценах, не меньше стоимости этой продукции. Каждый ресурс должен оцениваться с точки зрения приносимого им экономического эффекта. Объективно обусловленные оценки как раз и показывают, насколько возрастает (или уменьшается) целевая функция (критерий оптимальности) при увеличении (или уменьшении) запаса ресурса на одну единицу.

Поскольку задача, двойственная по отношению к двойственной, представляет собой исходную задачу, говорят, что эти задачи образуют **пару взаимно двойственных задач**.

Неизбежное колебание значений таких экономических параметров, как цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке и т.д. может привести к неоптимальности или непригодности прежнего режима работы. Для учета подобных ситуаций проводится **анализ чувствительности**, т.е. анализ того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение задачи ЛП.

Три основные задачи анализа решения ЗЛП на чувствительность:

1. Анализ изменений запасов ресурсов, позволяет ответить на два вопроса:

1.1. На какую величину можно увеличить запас некоторого дефицитного ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции?

1.2. На какую величину можно снизить запас некоторого недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Ресурс относят к разряду *дефицитных*, если он израсходован полностью. *Недефицитный* ресурс имеется в избытке.

Таким образом, объем дефицитного ресурса не следует увеличивать сверх того предела, когда соответствующее ему ограничение становится избыточным. Объем недефицитного ресурса можно уменьшить на величину избытка.

2. Определение наиболее выгодного ресурса, т.е. ресурса, которому следует отдавать предпочтение при инвестировании дополнительных средств.

Для этого вводится **характеристика ценности** каждой дополнительной единицы дефицитного ресурса y_i :

$$y_i = \frac{\text{максимальное приращение ЦФ}}{\text{максимально допустимый прирост ресурса } i}.$$

Решение двойственной задачи y_i определяет **теневую цену** i -го ресурса. **Теневая цена** ресурса показывает, на сколько единиц увеличится значение целевой функции при увеличении запаса этого ресурса на единицу.

Теневая цена также предоставляет возможность оценить целесообразность введения в оптимальный план продукцию нового вида. Если выполняется условие (2.9):

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i < c_j, \quad (2.9)$$

то введение в план j -го вида продукции выгодно.

3. Определение пределов изменения коэффициентов целевой функции делает возможным исследование следующих вопросов:

3.1. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции, при котором не происходит изменения оптимального решения?

3.2. На сколько единиц следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы сделать некоторый недефицитный ресурс дефицитным, и, наоборот, дефицитный ресурс сделать недефицитным?

Одним из подходов к решению ЗЛП является использование надстройки «Поиск решения» из пакета электронных таблиц Microsoft Excel.

Тема 3. Методы решения задач линейного программирования

Основные методы решения задач линейного программирования – это *символический* и *графический* методы, а также *методы внутренней точки*.

Символический метод применяется для задач с любым количеством переменных, в то время как графический метод подходит только для задач с двумя переменными.

Методы внутренней точки представляют собой альтернативные алгоритмы, эффективные для решения очень больших задач, в отличие от симплекс-метода, который перемещается по границам области.

Симплекс-метод:

- универсальный, итерационный алгоритм, основанный на последовательном переходе от одной вершины допустимого многогранника к другой, улучшая значение целевой функции на каждом шаге.
- является самым известным и широко применяемым методом для решения задач линейного программирования в общем виде.
- может быть модифицирован для решения конкретных типов задач, например, с помощью «метода искусственного базиса» или «М-метода».

Графический метод:

- используется для задач с двумя переменными, так как основан на наглядной геометрической интерпретации.
- предполагает построение области допустимых решений (многоугольника) и поиск оптимального значения целевой функции путем анализа её вершин или перемещения линии уровня.

Методы внутренней точки:

- альтернативный класс алгоритмов, которые движутся к оптимальному решению внутри области допустимых решений, а не по её границам, в отличие от симплекс-метода.
- особенно эффективны при решении задач с очень большим количеством переменных.

Метод Штифеля:

- является вариантом метода жордановых исключений, который применяется для решения задач линейного программирования.
- преимущество в том, что он может решать задачи в стандартном виде, не требуя предварительного приведения к каноническому.

Для задач целочисленного линейного программирования (когда переменные должны быть целыми) используются также специальные методы, такие как метод ветвей и границ или метод отсекающих плоскостей, хотя их эффективность далека от совершенства.

Существуют программные решения, такие как «Поиск решения» в MS Excel, которые могут автоматически решать задачи линейного программирования.

Графический метод решения задачи линейного программирования.

Если число переменных в задаче линейного программирования равно двум, а ограничениями является система неравенств, то задачу можно решать графическим методом.

Графический метод существенно нагляднее и обычно проще для понимания и решения (хотя занимает много времени, так как требует тщательного построения чертежа). Также этот метод позволяет практически одновременно найти решение на минимум и максимум, тогда как симплекс-методом придется делать «два подхода».

Основные шаги по решению ЗПЛ графическим методом следующие:

- 1) построить область допустимых решений задачи (выпуклый многоугольник), который определяется как пересечение полуплоскостей, соответствующих неравенствам задачи,
- 2) построить линию уровня целевой функции, и, наконец,
- 3) двигать линию уровня в нужном направлении, пока не достигнем крайней точки области – оптимальной точки (или множества). При этом можно найти единственное оптимальное решение (точку), множество (отрезок) или ни одного (область пустая или не ограниченная в нужном направлении).

Графический метод.

Пример. Решить задачу.

$$f = x + 2y \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений задачи, ограниченную неравенствами:

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Строим прямые (по двум точкам каждую):

- (I) $5x + 3y = 30$, точки (6,0), (0,10).
- (II) $x - y = 3$, точки (3,0), (6,3).
- (III) $-3x + 5y = 15$, точки (0,3), (5,6).

Выделяем нужные полуплоскости цветом, соответствующие знакам неравенств (рисунок 3.1).

Графическое решение задачи линейного программирования
 $x - 2y \rightarrow \min, \max$

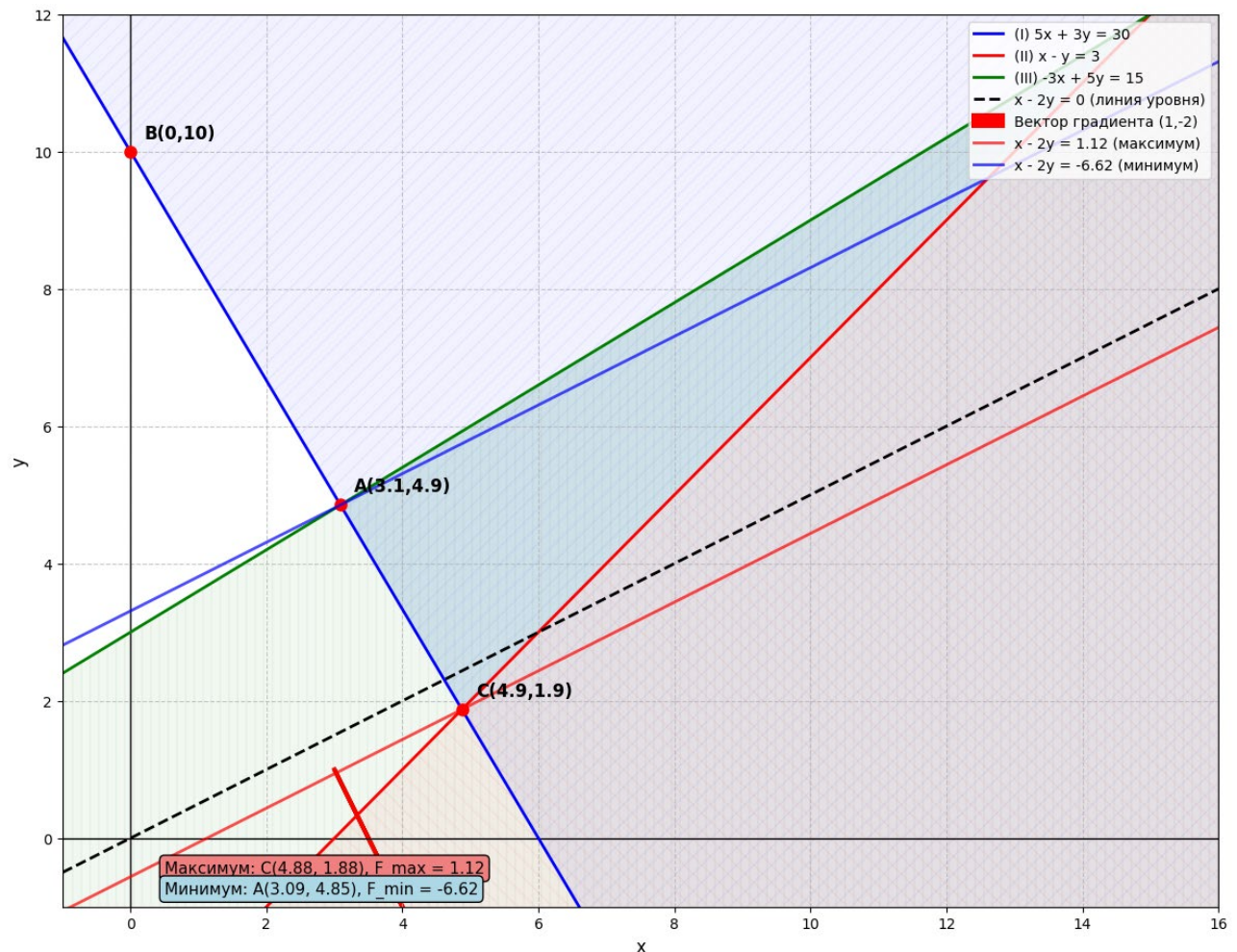


Рисунок 3.1 – Графический метод решения задачи

На пересечении всех полуплоскостей получаем ограниченную выпуклую область ABC (закрашена на рисунке).

Строим линию уровня целевой функции $x - 2y = 0$ и вектор градиента $\vec{n} = (1, -2)$. Двигаем линию уровня параллельно себе по направлению градиента (и против направления градиента) (см. рисунок), пока не войдем в область и не выйдем из области.

Видно, что выход из области (максимум целевой функции) произойдет в точке пересечения прямых (I) и (II), она имеет координаты $C\left(\frac{39}{8}; \frac{15}{8}\right)$, так как:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 30, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 5(3 + y) + 3y = 30, \\ x = 3 + y. \end{cases} \quad \begin{cases} 8y = 15, \\ x = 3 + y. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 15/8, \\ x = 39/8. \end{cases}$$

Таким образом, максимум целевой функции:

$$f_{\max} = f\left(\frac{39}{8}; \frac{15}{8}\right) = \frac{39}{8} - 2 \cdot \frac{15}{8} = \frac{9}{8} = 1,125$$

Видно, что вход в область (минимум целевой функции) произойдет в точке B(15;12). Таким образом, минимум целевой функции:

$$f_{min} = f(15; 12) = 15 - 2 \cdot 12 = -9$$

Но точка B(15,12) НЕ принадлежит области ABC! Из рисунка 3.1 видно, что минимум будет в точке B(3,09; 4,85):

$$f_{min} = f(3,09; 4,85) = -6,62$$

Симплекс-метод.

В случае двух переменных область допустимых решений, как правило, представляет собой замкнутый многоугольник. Для n переменных, областью допустимых решений является n -мерный многогранник. Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника. Симплекс-метод заключается в последовательном целенаправленном обходе вершин симплекса. В каждой следующей граничной точке симплекса значение целевой функции, в общем случае, улучшается.

Для применения симплекс-метода задачу следует записать в канонической форме:

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения j_x , при которых целевая функция имеет максимум. Переход к канонической форме записи производится с помощью действий:

1) если требуется найти минимум функции f , то заменяя f на $-f$, переходят к задаче максимизации, так как $\min f = -\max(-f)$;

2) если ограничение содержит неравенство со знаком $\leq$, то от него переходят к уравнению, добавляя в левую часть ограничения дополнительную неотрицательную переменную;

3) если ограничение содержит неравенство со знаком $\geq$, то от него переходят к уравнению, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную;

4) если в задаче какая-либо из переменных произвольна, то от неё избавляются, заменяя её разностью двух неотрицательных переменных.

Пример. Представить в канонической форме задачу:

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем целевую функцию в виде:

$$f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$$

Вычтем неотрицательную переменную x_4 из левой части первого неравенства и добавим дополнительную неотрицательную переменную x_5 к левой части второго неравенства. Произвольную переменную x_3 заменим разностью двух неотрицательных переменных $x_3 = x_6 - x_7$.

В результате получим каноническую форму записи:

$$\begin{cases} f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min \\ 2x_1 - 3x_2 + x_6 - x_7 - x_4 = 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_6 + 2x_7 - x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_6 - 7x_7 = 20, \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Задача решена.

Симплекс-метод является методом направленного перебора решений системы. Каждое следующее решение улучшает значение целевой функции. Симплекс-метод включает два этапа:

- 1) определение начального решения, удовлетворяющего ограничениям;
- 2) последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи.

Алгоритм симплекс-метода следующий:

Шаг 1. Получение начального решения. Выбирают m переменных, называемых базисными и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения системы. Остальные $n - m$ переменных называют свободными.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Шаг 4. Получение нового решения.

4.1 Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

4.2 Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

4.3 Выполнение симплекс преобразования.

Переход на шаг 3.

Симплекс-метод в Excel реализуется с помощью надстройки Поиск решения (Solver), которая позволяет решать задачи линейного программирования. Чтобы использовать ее, сначала нужно установить надстройку, а затем ввести условия задачи, задать целевую функцию и ограничения, после чего запустить решение.

Пример. Предприятие выпускает 3 вида изделий (A, B, B), для изготовления которых используется фрезерное, токарное, сварочное и шлифовальное оборудование.

Удельные затраты рабочего времени для каждого типа оборудования, общий фонд рабочего времени, а также прибыль от реализации единицы продукции каждого вида приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Тип оборудования	Затраты времени на обработку одного изделия			Общий фонд рабочего времени
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	10	360
Прибыль, у.е.	10	14	12	

Требуется так спланировать объемы выпуска изделий, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Пример записи функции ЗЛП и ограничений в Excel для данной задачи приведен на рисунке 3.2.

Excel Spreadsheet Data:

Тип оборудования	А	Б	В	Расход времени	Знак	Общий фонд рабочего времени	Статус ресурса
Фрезерное	2	4	5	120	<=	120	дефицитный
Токарное	1	8	6	168	<=	280	недефицитный
Сварочное	7	4	5	240	<=	240	дефицитный
Шлифовальное	4	6	10	204	<=	360	недефицитный
Прибыль, у.е.	10	14	12				
План выпуска	24,00	18,00	0,00				
ЦФ: общая прибыль	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$D\$9; \$E\$7:\$E\$9)						

Mathematical Model:

- Искомые переменные** по условию задачи – план выпуска изделий 3 видов, [ед]:
 x_1 – план выпуска изделия А,
 x_2 – план выпуска изделия Б,
 x_3 – план выпуска изделия В.
- Целевая функция** – общая прибыль от реализации продукции:
 $F(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$
- Ограничения по расходу времени обработки на оборудовании (Т1, Т2, Т3 и Т4):**
 $T1: 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$
 $T2: 1x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$
 $T3: 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$
 $T4: 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 360$

Solver Parameters:

- Optimize Objective Function: $\$B\11
- To: ☒ Maximum ☐ Minimum ☐ Value Of: 0
- Changing Variable Cells: $\$B\$9:\$D\9
- Subject to the Constraints:
 - $\$B\$9:\$D\$9 \geq 0$
 - $\$E\$3 \leq \$G\3
 - $\$E\$4 \leq \$G\4
 - $\$E\$5 \leq \$G\5
 - $\$E\$6 \leq \$G\6
- Make the Variable Cells Non-Negative: ☒
- Select a Solving Method: Поиск решения лин. задач симплекс-методом
- Method Description: Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Рисунок 3.2 – Решение ЗЛП в Excel

Тема 4. Задачи многокритериальной оптимизации

Наиболее общей постановкой оптимальной задачи является выражение критерия оптимальности в виде какой-либо экономической оценки (прибыль, рентабельность, производительность, себестоимость продукции). Но достаточно часто критерий эффективности представляет собой вектор, компонентами которого являются различные, несводимые друг к другу критерии оптимальности подсистем, входящих в исследуемую систему. В таком случае возникает задача **векторной оптимизации**.

В случае, когда критерий эффективности представляет собой совокупность разнородных критериев одного «участника» исследуемой системы, имеется в виду **многокритериальная оптимизация (МКО)**.

Термины «векторная оптимизация» и «многокритериальная оптимизация» часто отождествляются, в связи с тем, что методы их решения одинаковы. Например, при решении задач можно придерживаться принципа оптимальности по Парето¹.

Основной проблемой при решении задач МКО является неоднозначность выбора «оптимального решения». Под оптимальным решением задачи МКО будем понимать одно из эффективных (парето-оптимальных) решений.

В отличие от задач скалярной оптимизации с одним критерием в задачах МКО имеется **неопределенность целей**, поскольку существование решения, улучшающего сразу несколько целевых функций, является редким исключением. Поэтому с математической точки зрения задачи МКО являются неопределенными и их решением может быть только **компромиссное решение**. Например, при поиске плана предприятия, максимизирующего прибыль и минимизирующего затраты, очевидна невозможность одновременного достижения обеих целей, так как, чем больше затраты, тем больше должно быть продукции и тем больше будет прибыль.

Интерес к проблеме МКО усилился в связи с тем, что многокритериальные задачи возникают не только в экономике, но и в технике, например, при проектировании сложных технических систем.

Математическая формулировка задачи МКО:

требуется найти числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе ограничений:

¹ Впервые проблема многокритериальной оптимизации возникла у итальянского экономиста В.Парето в 1904 г. при математическом исследовании товарного обмена.

Критерий Парето формулируется им просто: «Следует считать, что любое изменение, которое никому не причиняет убытков и которое приносит некоторым людям пользу (по их собственной оценке), является улучшением». Этот критерий имеет весьма широкий смысл. Он применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались, а также таких, когда реализуется *композиционный подход* к построению плана развития экономической системы, учитывающий интересы составляющих ее *подсистем* (групп экономических объектов).

[<http://lopatinikov.pro/slovar/o/optimalnost-po-pareto/>]

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.1)$$

для которых функции:

$$z_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (4.2)$$

достигают максимального значения.

Множество точек $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе (4.1), образует допустимую область $D \subset R^n$.

Элементы множества D называются *допустимыми решениями* или *альтернативами*, а числовые функции $f_k, k = 1, 2, \dots, K$, – *целевыми функциями*, или *критериями*, заданными на множестве D . В формулировке задачи (4.1)-(4.2) присутствует K целевых функций.

Существуют следующие направления решения задач МКО:

а) оптимизация одного критерия (наиболее важного); остальные при этом играют роль дополнительных ограничений;

б) упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них;

в) сведение (свёртка) многих критериев к одному путём введения априорных (экспертных) весовых коэффициентов для каждого из критериев (более важный критерий получает более высокий вес).

Методы, применяемые при решении задач МКО, можно разделить на две группы:

Методы сведения задачи МКО к однокритериальной задаче:

а) Метод последовательных уступок.

б) Метод главного критерия.

с) Метод свёртки критериев (аддитивные, мультипликативные, максиминные).

д) Метод целевого программирования.

Интерактивные методы:

а) Метод анализа иерархий.

б) Метод эффективных множеств.

В лабораторной работе будут рассмотрены два из них: метод последовательных уступок и метод свёртки критериев.

Метод последовательных уступок

В этом методе критерии оптимальности нумеруются в порядке убывания важности.

Пусть критерии $f_1, f_2, \dots, f_k$ записаны в порядке убывания их важности.

Далее выполняется следующая последовательность действий.

Шаг 1. Решается однокритериальная задача по первому критерию:

$$z_1^* = \max_{X \in D} f_1(X).$$

Шаг 2. Назначается разумная уступка Δz_1 , составляется и решается новая задача оптимизации по второму критерию:

$$z_2^* = \max_{X \in D} f_2(X), \text{ с учетом дополнительного ограничения}$$

$$f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1, \quad (4.3)$$

Шаг 3. Назначается уступка для второго критерия Δz_2 , составляется и решается задача оптимизации по третьему критерию, с учётом дополнительных ограничений:

$$z_3^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \geq z_2^* - \Delta z_2}} f_3(X), \quad (4.4)$$

Процесс назначения уступок по каждому критерию и решения однокритериальных задач продолжается, пока не будет достигнут последний K -й шаг.

...

Шаг K . Назначается уступка для K -го критерия Δz_{K-1} , составляется и решается задача оптимизации по последнему K -му критерию, с учетом дополнительных ограничений по всем предыдущим критериям:

$$z_K^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \geq z_2^* - \Delta z_2 \\ \dots \\ f_{K-1}(X) \geq z_{K-1}^* - \Delta z_{K-1}}} f_K(X), \quad (4.5)$$

Основной недостаток методов, использующих ограничения на критерии, состоит в субъективности выбора контрольных показателей и в субъективности выбора уступок. При использовании метода последовательных уступок следует помнить, что уступки могут быть несоизмеримы между собой, поэтому надо предварительно организовать нормализацию критериев. Кроме того, в общем случае уже со 2-го шага решение может оказаться не оптимальным по Парето.

Метод аддитивной свёртки критериев

Вместо K частных критериев оптимальности $f_1, f_2, \dots, f_k$ рассматривается один скалярный критерий, полученный путем комбинации частных критериев.

Пусть критерии **соизмеримы**, например, нормированы, и определён **вектор весовых коэффициентов** критериев $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)$, характеризующих важность соответствующего критерия. Это означает, что $\alpha_i \geq \alpha_j$, если критерий f_i имеет приоритет над критерием f_j .

При этом сумма весовых коэффициентов равна 1: $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0$.

Для аддитивного метода строится новая целевая функция $f(X) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(X)$

и решается задача оптимизации скалярного критерия: $z = f(X) \rightarrow \max$ при условии $X \in D$.

Эффективная точка, или точка Парето, – это ключевое понятие в многокритериальной оптимизации, где необходимо одновременно улучшить несколько противоречивых целей. В отличие от классической оптимизации, которая ищет единственное наилучшее решение, в многокритериальной задаче

часто не существует одного решения, которое было бы оптимальным по всем критериям сразу.

Принцип Парето – это закономерность, которая гласит, что во многих сферах жизни и деятельности примерно 80% результатов происходит от 20% причин. Вывел ее итальянский экономист Вильфредо Парето. Правомерность этого утверждения можно обнаружить в различных областях жизни: экономике, бизнесе, управлении, социологии и личной продуктивности.

С точки зрения достижения целей принцип Парето направляет внимание на самые значимые задачи, сокращая рассеянность и увеличивая продуктивность. Необходимо учитывать, что это соотношение не точное и не универсальное, но оно подчеркивает, что большинство результатов часто происходит из меньшинства усилий.

Принцип Парето был сформулирован итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето в конце XIX века. Он начал карьеру как инженер и затем переключился на изучение экономики и социологии. Ученый заметил, что в различных сферах общественной и экономической жизни нередко наблюдается неравномерное распределение ресурсов и результатов. Один из самых известных примеров – наблюдение Парето, что примерно 80% земли в Италии принадлежит 20% населения. В основе закона лежит его работа *Cours d'économie politique* («Курс политической экономии»), опубликованная в 1897 году, где Парето обсуждает концепцию неравномерного распределения богатства в обществе.

Эту закономерность называли принципом Парето его последователи, а не сам ученый. Одним из адептов Парето был Джозеф Джуран. Он использовал концепцию 80/20 для анализа данных о производственных процессах, чтобы выявить причины проблем и оптимизировать управление в организациях. Джуран развил идеи Парето, применяя их к практическим аспектам управления бизнесом и производством.

В результате использования принципа Парето появилась диаграмма, которая помогает идентифицировать и приоритизировать наиболее значимые проблемы или причины определенной ситуации (рисунок 4.1).

Это столбчатая диаграмма, где элементы упорядочены по убыванию их значимости, что отражает относительное влияние каждого фактора или причины на итоговый результат. Обычно на графике используется двойная шкала: левая ось (ось ординат) представляет собой процентное или абсолютное значение, а правая (вторая ось ординат) обозначает кумулятивный процент.

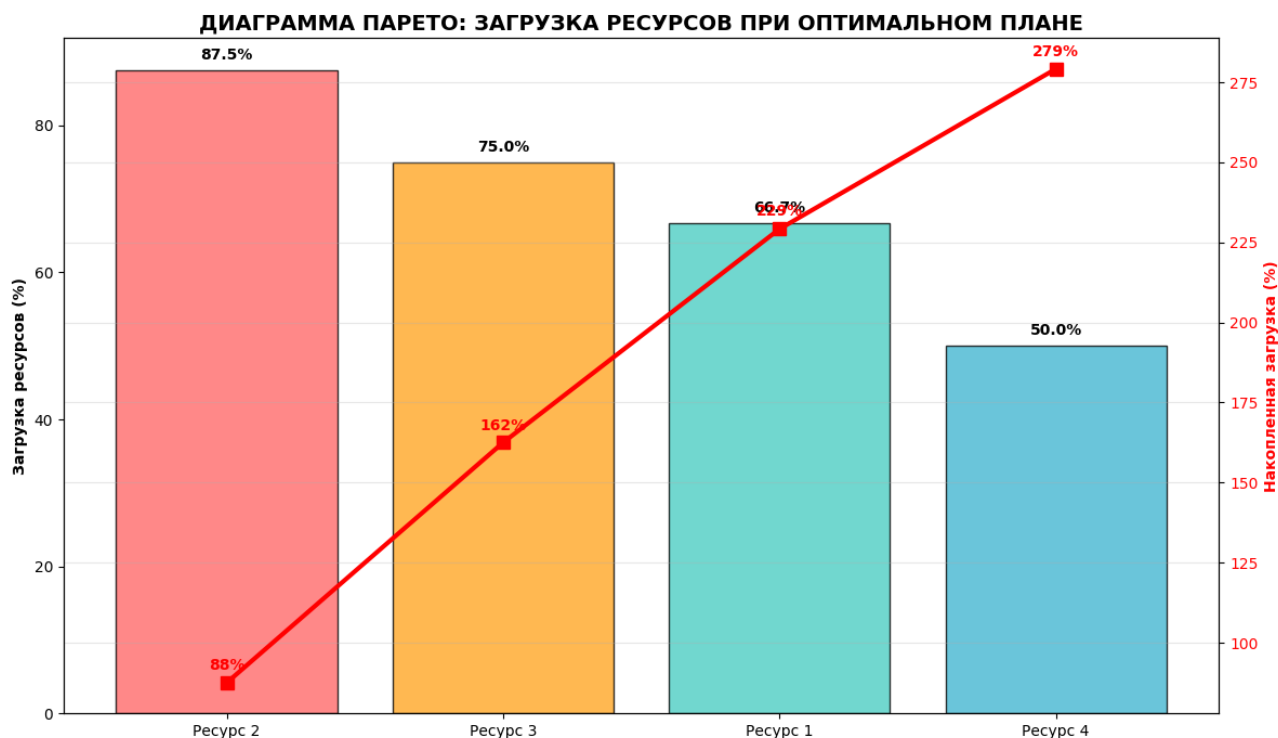


Рисунок 4.1 – Диаграмма Парето²

Закон Парето легко применить к любой сфере деятельности, он помогает систематизировать подход к анализу происходящего. Для него характерны определенные принципы:

1. *Неравномерное распределение ресурсов.* Закон Парето утверждает, что во многих ситуациях примерно 80% результатов происходит от 20% причин. Неравномерное распределение – главный принцип, который лежит в основе этой теории.

2. *Концентрация на ключевых факторах.* Понимание и выявление основных факторов позволяют сосредоточить усилия на наиболее важных областях для достижения желаемых целей.

3. *Эффективное использование ресурсов.* Изучение закона Парето помогает определить, какие ресурсы следует сосредоточить на наиболее важных задачах или областях, чтобы добиться наилучших результатов. Это способствует более эффективному использованию ограниченных ресурсов.

4. *Приоритизация.* Принцип Парето подразумевает приоритизацию задач и усилий, необходимость сосредоточиться на наиболее значимых аспектах [Что такое принцип Парето и как его применять. – URL: <https://style.rbc.ru/life/65fc948d9a79472b51f02e00>].

² Диаграмма построена с помощью сервиса Google Colab по данным задачи, приведенной в теме 3.

Тема 5. Транспортные модели

Среди задач линейной оптимизации могут быть выделены два класса задач со специальной структурой: транспортная задача и задача о назначениях. Эти задачи используются для моделирования и оптимизации экономических проблем, связанных с формированием оптимального плана перевозок, оптимального распределения индивидуальных контрактов на транспортировки, составления оптимального штатного расписания, определения оптимальной специализации предприятий, рабочих участков и станков, оптимального назначения кандидатов на работы, оптимального использования торговых агентов. Критерияльной функцией в данных задачах является линейная функция, ограничения также линейны, поэтому для решения могут применяться методы линейной оптимизации, например, симплекс-метод. Однако специальная структура таких задач позволяет предложить более удобные методы их решения.

Транспортная задача (ТЗ) представляет собой особый класс задач линейного программирования. Сущность ТЗ заключается в наиболее выгодном прикреплении поставщиков одного вида продукции ко многим потребителям этой продукции. Для стандартной ТЗ величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку единицы продукции.

В общем виде ТЗ по критерию стоимости транспортировки формулируется следующим образом.

Имеется m поставщиков однородного груза и n потребителей.

Запасы i -го поставщика обозначим a_i , спрос j -го потребителя – b_j .

Затраты на перевозку единицы груза от i -го поставщика j -му потребителю обозначим c_{ij} .

Через x_{ij} обозначим объем перевозок от i -го поставщика j -ому потребителю.

Требуется доставить необходимое количество груза от поставщиков к потребителям и обеспечить при этом минимум затрат на транспортировку.

Условие ТЗ обычно записывается в виде матрицы, где поставщики однородного груза размещаются по строкам, а потребители – по столбцам. В последнем столбце матрицы указывается запас груза для каждого поставщика, а в последней строке – спрос (потребность) потребителей. На пересечении строк и столбцов записывают затраты на перевозку единицы груза, расстояние пробега, размер поставки.

Для построения математической модели ТЗ необходимо:

- 1) Определить переменные ТЗ.
- 2) Проверить сбалансированность задачи.
- 3) Построить сбалансированную транспортную матрицу.
- 4) Записать целевую функцию.
- 5) Задать ограничения по объемам поставки и потребления, неотрицательности переменных.

Математическая модель ТЗ (транспортная модель) имеет вид:

- 1) общая сумма затрат на перевозку груза должна быть минимальной:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (5.1)$$

Вместо матрицы затрат (стоимостей перевозок) c_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ могут задаваться матрицы расстояний.

2) объем поставок i -го поставщика должен равняться количеству имеющегося у него груза:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.2)$$

3) объем поставок j -ому потребителю должен быть равен его потребности (спросу):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.3)$$

4) объемы поставок должны выражаться неотрицательными числами

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

Если суммарный объем отправляемых грузов равен суммарному объему потребностей в этих грузах по пунктам назначения

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (5.5)$$

то такая ТЗ называется *закрытой (сбалансированной)*, в противном случае – *открытой (несбалансированной)*.

Если имеет место открытая ТЗ, ее необходимо свести к закрытой:

1) в случае перепроизводства (запасы поставщиков превышают потребности потребителей) следует ввести **фиктивного потребителя** с необходимым объемом потребления $b_\phi = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ (при этом элементы матрицы c_{ij} , связывающие фиктивные пункты с реальными, могут иметь значения, равные затратам на хранение невывезенного груза);

2) в случае дефицита (спрос потребителей превышает запасы поставщиков) необходимо ввести **фиктивного поставщика** с недостающим объемом отправляемых грузов $a_\phi = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ (при этом элементы матрицы c_{ij} , связывающие фиктивные пункты с реальными, могут иметь значения, равные штрафам за недопоставку продукции).

Если указанные затраты неизвестны (или не указаны), то соответствующие фиктивным тарифам элементы матрицы c_{ij} полагают равными нулю.

Транспортным задачам присущи следующие особенности:

- 1) распределению подлежит однородный груз;
- 2) основные ограничения задачи описываются только уравнениями;
- 3) все неизвестные имеют одинаковые единицы измерения;
- 4) во всех уравнениях коэффициенты при неизвестных равны единице;
- 5) каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений.

Для решения задач транспортного типа используются симплекс-метод, метод потенциалов, венгерский метод.

Модель транспортной задачи линейного программирования может использоваться для исследования ряда операций, не связанных непосредственно с перевозкой грузов. Например, с ее помощью решаются задачи по оптимизации размещения производства, топливно-энергетического баланса, планирования загрузки оборудования, распределения сельскохозяйственных культур по участкам различного плодородия и т.д. **Распределительную (лямбда) задачу** часто называют обобщенной транспортной задачей.

Частным случаем ТЗ является **задача о назначениях**.

В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы спроса и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{й рабочий работает на } j - \text{м станке,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При решении практических задач зачастую приходится учитывать ряд дополнительных ограничений.

Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены (из-за отсутствия необходимых условий хранения, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т.д.). Это достигается искусственным значительным завышением затрат на перевозки c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить

$$c^3 > \max c_{ij} \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \right), \quad (5.6)$$

2. На предприятии необходимо определить минимальные суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей сталкиваются при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленных пунктов, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах в качестве критерия оптимальности принимают сумму затрат на производство и транспортировку продукции.

3. Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы, имеют ограничения по пропускной способности. Если, например, по маршруту $A_i B_j$ можно перевезти не более q единиц груза, то B_j -й столбец матрицы

разбивается на два столбца – B'_j и B''_j . В первом столбце спрос принимается равным $b'_j = b_j - q$, во втором – $b''_j = q$. Несмотря на то, что фактические затраты c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны исходным, в столбце B'_j вместо истинного тарифа c_{ij} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

4. Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет. В этом случае уменьшают запас груза у поставщиков и спрос потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые необязательны. Полученное решение корректируют с учетом обязательных поставок.

5. Необходимо максимизировать целевую функцию задачи транспортного типа (например, задача об оптимальном распределении оборудования). В этом случае необходимо изменить знак в тарифах на противоположный. В ответе отрицательный знак игнорируется.

Решение закрытой транспортной задачи можно проводить средствами надстройки MS Excel Поиск решения.

Пример. Предприятие доставляет однородный груз от трех поставщиков (О1, О2, О3, О4) четырем потребителям (П1, П2, П3, П4) в заданных объемах и в соответствии с тарифами, представленными в таблице 5.1.

Необходимо составить план транспортировки грузов к потребителям, обеспечивающий минимальную стоимость перевозки.

Таблица 5.1 – Исходные данные ТЗ-1

Поставщики	Тарифы на перевозку потребителям, ден.ед./т				Запас, т
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄	
О ₁	1	2	3	4	60
О ₂	4	3	2	1	80
О ₃	1	2	2	1	100
Спрос, т	40	60	80	60	

Порядок решения задачи:

Готовим постановку задачи и исходные данные в Excel. Определяем, к какому типу относится транспортная задача (открытого или закрытого типа), используя стандартную функцию MS Excel **ЕСЛИ** (рисунок 5.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Поставщики	Тарифы на перевозку потребителям, ден.ед./т				Запас, т	
2		П ₁	П ₂	П ₃	П ₄		
3	O ₁	1	2	3	4	60	
4	O ₂	4	3	2	1	80	
5	O ₃	1	2	2	1	100	
6	Спрос, т	40	60	80	60		240
7						240	
8	Тип ТЗ	=ЕС.ЛИ(F7=G6;"Закрытая";"Открытая")					

Рисунок 5.1 – Исходные данные ТЗ

1.1 Строим математическую модель ТЗ:

1.1.1 Определяем число искомых переменных ТЗ.

1.1.2 Записываем целевую функцию и ограничения.

1.2 На основании математической модели строим макет таблицы для решения задачи.

Для записи формул целевой функции и левой части ограничений используйте стандартные функции MS Excel **СУММПРОИЗВ** и **СУММ**.

1.3 С помощью надстройки Поиск решения решаем задачу.

10							
11	Поставщики	Тарифы на перевозку потребителям, ден.ед./т				Вывезено, т	
12		П ₁	П ₂	П ₃	П ₄		
13	O ₁	40	20	0	0	=СУММ(B13:E13)	
14	O ₂	0	0	20	60	80	
15	O ₃	0	40	60	0	100	
16	Доставлено, т	40	60	80	60		
17							
18	ЦФ:Стоимость перевозки	=СУММПРОИЗВ(B3:E5;B13:E15)					→ min
19							

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: \$B\$18

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения: 0

Изменяемые ячейки: \$B\$13:\$E\$15

В соответствии с ограничениями:

\$B\$13:\$E\$15 >= 0
 \$B\$16:\$E\$16 = \$B\$6:\$E\$6
 \$F\$13:\$F\$15 = \$F\$3:\$F\$5

☒ Сделайте переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения линейных задач симплекс-методом

Добавить Изменить Удалить Сбросить Загрузить/сохранить

Рисунок 5.2 – Ход решения ТЗ

10							
11	Поставщики	Тарифы на перевозку потребителям, ден.ед./т				Вывезено, т	
12		П ₁	П ₂	П ₃	П ₄		
13	O ₁	40	20	0	0	60	
14	O ₂	0	0	20	60	80	
15	O ₃	0	40	60	0	100	
16	Доставлено, т	40	60	80	60		
17							
18	ЦФ:Стоимость перевозки	380					→ min
19							

Рисунок 5.3 – Результаты решения ТЗ

Тема 6. Двойственность и анализ чувствительности

6.1 Двойственная задача

Двойственная задача — это вспомогательная задача линейного программирования, которая образуется при помощи определённых правил непосредственно из условий исходной задачи.

Двойственная задача является сопряженной, обратной задачей. Это одно из фундаментальных определений теории линейного программирования. Это инструмент, который позволяет выяснить является ли оптимальным данное допустимое решение задачи линейного программирования среди всех допустимых решений.

Целью такого анализа является оценка возможностей и способов правильного и своевременного реагирования на регулярно изменяющиеся условия.

С помощью решения двойственной задачи и определения связей между переменными взаимно-двойственных задач можно добиться глубокого анализа моделируемой экономической ситуации. Например, из-за тесной связи между решениями пары двойственных задач, по значениям компонентов оптимального решения двойственной задачи, можно:

- а) установить характер изменения оптимизируемой функции исходной задачи;
- б) дать оценку влиянию правых частей системы ограничений (b_i) исходной задачи на оптимальное значение целевой функции;
- в) с помощью оптимальных оценок u_i * изучить, как реагирует целевая функция на изменение ресурсов и т.д.

Компоненты оптимального решения двойственной задачи можно назвать оптимальными (двойственными) оценками начальной, исходной задачи. Доктор физико-математических наук (1935), академик Л.В.Канторович назвал их объективно обусловленными оценками, а в литературе часто встречается понятие «скрытые доходы».

По соотношению к объективно обусловленным оценкам могут быть конкретизированы расчетные нормы заменяемости ресурсов. При их соблюдении проводимые замены в пределах устойчивости двойственных оценок оказывают некоторое влияние на эффективность оптимального плана.

Отметим, что с помощью объективно обусловленных оценок можно судить об эффекте изменения объемов материально-сырьевых ресурсов лишь при локальных их возмущениях, а не во всех случаях их изменения. В оптимальном плане производства дефицитные (т.е. целиком применяемые) ресурсы приобретают ненулевые оценки, а недефицитные — нулевые оценки. Исходя из этого, можно сказать, что объективно обусловленные оценки ресурсов определяют уровень дефицитности ресурсов.

Возможность эффективного использования объективно обусловленных оценок при экономическом анализе имеет некоторую связь в основном со следующими двумя особенностями таких оценок. Первая особенность заключается в том, что, прежде всего, эти оценки имеют достаточную

устойчивость: при небольших изменениях исходных данных они, в основном, меняются незначительно. Другой особенностью считается реальность определяемых этими оценками отношений эквивалентности.

В оптимальный план производства могут попасть только рентабельные, то есть неубыточные типы продукции. Это происходит только в том случае, если критерий рентабельности состоит в том, что цена продукции не превосходит затраты на используемые при ее производстве материально-сырьевые ресурсы.

Что показывают численные значения объективно обусловленных оценок ресурсов, можно узнать из третьей теоремы двойственности. Объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная выручка от производства продукции, если изменить запас соответствующего ресурса на одну единицу.

Двойственные оценки так же можно считать инструментом принятия правильных решений и анализа в условиях постоянно меняющегося производства. Например, с помощью объективно обусловленных оценок ресурсов можно сопоставить оптимальные условные затраты и результаты производства.

Объективно обусловленные оценки ресурсов позволяют рассуждать об эффекте не любых, а только сравнительно маленьких изменений ресурсов. При сильных изменениях объективно обусловленные оценки могут стать другими, это, в свою очередь, может привести к невозможности их дальнейшего применения для анализа эффективности производства.

Применение объективно обусловленных оценок сейчас можно найти в оптимизационных расчетах. Их используют при решении задач размещения производства, наиболее рационального прикрепления поставщиков к потребителям, так же применяют при оптимальном раскрое материалов и так далее. С их помощью сформированы важные, ценные методы экономикоматематического анализа хозяйственных процессов, которые помогают глубже входить в сущность развития этих процессов, оценивать перспективы развития и будущие результаты принимаемых сегодня решений [24].

Любой ЗЛП можно поставить в соответствие другую задачу, сформулированную по неким правилам так, что решение одной из задач является решением другой и наоборот. Такие задачи называют взаимодвойственными. Двойственная обратная задача – это ЗЛП, формулируемая по определенным правилам из условий исходной задачи. Известно, что общая форма записи ЗЛП имеет вид:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{<, =, >\} b_i, i = \overline{1, m} \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Будем называть эту запись прямой задачей ЛП. Чтобы получить двойственную задачу, нужно выполнить следующие требования:

- 1) каждому из ограничений прямой задачи соответствует переменная двойственной (например, если в прямой задаче задано три ограничения, то в обратной им будут соответствовать три неизвестных переменных – y_1, y_2, y_3);
- 2) каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной (другими словами, сколько есть переменных x_j в прямой задаче, столько же ограничений будет в двойственной);
- 3) двойственная задача решается на минимум, если прямая задача – на максимум, и наоборот;
- 4) если прямая задача решается на максимум, то в двойственной задаче знак неравенств в системе ограничений задается в виде соотношения типа $\geq$, и наоборот – если прямая задача решается на минимум, то в ограничениях двойственной задачи используется тип соотношения $\leq$;
- 5) в качестве правых частей системы ограничений в двойственной задаче используются коэффициенты целевой функции прямой задачи (c_j);
- 6) коэффициентами целевой функции в двойственной задаче являются правые части системы ограничений прямой задачи (b_i);
- 7) если некоторая переменная $x_j \geq 0$, то в прямой задаче соответствующее j -ое ограничение в двойственной является неравенством; если x_j – любое, то j -ое ограничение выполняется как равенство;
- 8) если i -ое ограничение в прямой задаче является неравенством, то соответствующая переменная $y_i \geq 0$; если i -ое ограничение – равенство, то y_i – любое. Перечисленные правила можно представить в виде таблицы 6.1.

Таблица 6.1 – Условия записи двойственной задачи

Переменные двойственной задачи	Переменные прямой задачи						
	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	
	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
			...		...		
			...		...		
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
				j -е ограничение двойственной задачи			коэффициенты целевой функции двойственной задачи

Используя эти правила, составляют двойственную задачу к исходной (прямой) задаче ЛП:

- 1) в исходной задаче m ограничений, следовательно, в двойственной будет m переменных – $y_1, y_2, \dots, y_m$);
- 2) в исходной задаче n неизвестных – $x_1, x_2, \dots, x_n$, следовательно, в двойственной будет n ограничений;
- 3) меняется знак ограничений на противоположный (в прямой задаче были соотношения типа $\leq$, в двойственной будет противоположный тип $\geq$).

Таким образом, получаем следующую двойственную задачу:

Целевая функция:

$$\min F(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Ограничения:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, n}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, m}$$

6.2 Экономическая интерпретация двойственности.

Свойства двойственных оценок

Если ЗЛП можно рассматривать как модель распределения ограниченных ресурсов, в которой целевая функция может выражать максимальную прибыль или доход от производственной деятельности, то для понимания экономического смысла двойственной задачи, необходимо рассмотреть следующие теоремы двойственности.

Определим, что решением прямой задачи является вектор $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а решением двойственной – вектор $Y^* = (y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Первая теорема двойственности.

Если существует решение прямой задачи, то одновременно существует решение двойственной задачи, т. е. $\max f(X^*) = \min g(Y^*)$. Другими словами, для любой пары допустимых решений прямой и двойственной задач значение целевой функции в задаче максимизации не превышает значения целевой функции в задаче минимизации, а в точке оптимума это соотношение принимает вид строгого равенства.

Следовательно, можно записать неравенство:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

И соответственно в точке оптимума будет выполняться равенство:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (6.1)$$

В прямой задаче коэффициенты целевой функции c_j представляют собой прибыль на единицу продукции j -го вида экономической деятельности, причем на единицу продукции этого вида деятельности расходуется a_{ij} единиц ресурса i , запасы которого ограничены величиной b_i .

Тогда левую часть равенства (6.1) по смыслу можно интерпретировать как доход, а правую часть – как общую стоимость ресурсов (количество ресурса i , умноженное на «цену» единицы ресурса a_i). Поэтому переменные двойственной задачи $y_1, y_2, \dots, y_m$ называются *двойственными* или *теневыми ценами ресурсов*.

Соответственно, если равенство (6.1) не выполняется, то есть доход (левая часть) строго меньше общей стоимости ресурсов (правой части), то система находится в нестабильном состоянии («вход» системы – ресурсы превышают ее «выход» – доход). Следовательно, устойчивость системы характеризуется равенством входа и выхода или тогда, когда все потребляемые ресурсы использованы полностью.

Важным следствием данной теоремы является возможность получения оптимального плана двойственной задачи на основе оптимального плана прямой задачи.

Вторая теорема двойственности.

Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – допустимое решение прямой задачи, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – допустимое решение двойственной задачи. Тогда, чтобы вектора X и Y являлись оптимальными решениями необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0, i = \overline{1, m} \quad (6.2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0, j = \overline{1, n} \quad (6.3)$$

Из равенства (6.2) следует, что произведение равно нулю только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Если

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i \right) = 0, \text{ а } y_i^* > 0,$$

то это значит, что выполняется равенство:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i,$$

и ресурс был использован полностью.

Таким образом, ресурсы, имеющие положительную двойственную цену $y_i^* > 0$, используются в производстве полностью.

Если же $y_i^* = 0$, а

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* - b_i \right) \neq 0,$$

то это значит, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* \leq b_i$$

т.е. такие ресурсы используются не полностью, и двойственная цена таких ресурсов равна нулю.

Аналогично из равенства (6.3) следует, что если

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0,$$

то $x_j^* \neq 0$.

Учитывая, что величина

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*$$

соответствует суммарной стоимости ресурсов, используемых на производство единицы продукции j -го вида деятельности, коэффициент c_j – доход на единицу «выхода» j -го вида производственной деятельности, то неравенство

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* < c_j$$

будет означать, что производственную деятельность можно наращивать до тех пор, пока доход от нее превышает возможные издержки (стоимость ресурсов), затрачиваемые на ее осуществление.

Следовательно, выпуску подлежат те виды продукции, для которых стоимость ресурсов равна доходу от продажи:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$$

Если же, $x_j^* = 0$, то соответственно

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j,$$

и это означает, что нецелесообразно выпускать те виды продукции, для которых стоимость затрачиваемых ресурсов больше дохода от реализации.

Из указанных теорем можно окончательно сформулировать экономические свойства двойственных цен (оценок) y_i^* :

Свойство 1. Двойственные оценки как мера дефицитности ресурсов.

Если двойственная оценка является положительной, то соответствующий ресурс полностью используется в производстве, то есть он является дефицитным. Если двойственная оценка равна нулю, то соответствующий ресурс был использован не полностью, следовательно он недефицитный. (Следует из равенства 6.2).

Свойство 2. Двойственные оценки как мера влияния ограничений на целевую функцию.

Двойственные оценки можно рассматривать как меру дополнительной ценности ресурса (теневую цену). Чем выше значение y_i^* , тем острее дефицитность ресурса.

Свойство 3. Двойственные оценки как инструмент определения эффективности производственных вариантов.

Это свойство позволяет ответить на вопрос о том, выгодно ли запускать в производство новые виды продукции? (Следует из равенства 6.3).

Если выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* \leq c_i,$$

т.е. выручка от продажи ресурсов, идущих на производство единицы этого продукта, покрывается прибылью, то данный вид продукции выгодно выпускать (поэтому $x_j^* > 0$).

Если выручка от продажи ресурсов, идущих на изготовление данного вида продукта, больше прибыли от его производства:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^* > c_i,$$

то выпускать данный вид продукции невыгодно ($x_j^* = 0$).

Таким образом, существование и решение двойственной задачи позволяет провести анализ чувствительности оптимального решения прямой задачи. При этом в симплекс-таблице решения прямой задачи можно получить анализ всех указанных выше свойств. Дополнительно можно также определить пределы изменения правых частей ограничений.

Тема 7. Сетевые модели

7.1 Метод сетевого планирования и управления

На практике часто приходится сталкиваться с необходимостью планирования комплекса проводимых работ. Это может быть производство и ремонт промышленных изделий, разработка бизнес-плана предприятия, проведение и организация коммерческих сделок и т.д. Эти комплексы работ объединяет то, что при всей их разновидности и масштабности они состоят из ряда отдельных операций, которые выполняются как параллельно, так и последовательно одна за другой. Причем ряд работ не может быть начат раньше, чем будут завершены предшествующие.

Метод сетевого планирования и управления (СПУ) – метод решения задач исследования операций, в которых необходимо оптимально распределить сложные комплексы работ.

Впервые метод сетевого планирования был использован в 1950-х гг. в США фирмой E. I. du Pont de Nemours & Company для управления программами строительства, а затем был развит и обобщен фирмой Mauchly Associates. Метод был основан на построении сетевых графиков и получил название *метод критического пути* (Critical Path Method – CPM). В то же время был разработан консультативной фирмой по заказу военно-морского министерства США для календарного планирования научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ программы создания ракет «Поларис» *метод анализа и оценки программ* (Program evaluation and Review Technique – PERT). Методы PERT и CPM были разработаны независимо, но отличаются поразительным сходством. Самым существенным различием первоначально было то, что в методе CPM оценки продолжительности операций предполагались детерминированными величинами, а в метод PERT – случайными. В настоящее время оба метода составляют единый метод PERT-CPM – метод сетевого планирования и управления (СПУ).

С помощью методов СПУ создается возможность выявления и использования внутренних (трудовых, материальных и временных) резервов, прогнозирования и предупреждения возможных срывов в ходе выполнения работ на строгой математической основе.

Основным элементом системы СПУ является *сетевой график* – модель процесса, на которой можно проводить эксперименты и выяснять, к каким результатам приведет то или иное изменение в модели.

Методы СПУ используются при планировании сложных комплексных проектов, например, таких как:

- строительство и реконструкция каких-либо объектов;
- выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ;
- подготовка производства к выпуску продукции;
- перевооружение армии;
- развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из

ряда отдельных, элементарных работ. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

СПУ состоит из трех основных этапов.

1. **Структурное планирование.** Начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта. Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

2. **Календарное планирование.** Предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

3. **Оперативное управление.** В ходе оперативного управления используются сетевой и календарных графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

Сущность метода СПУ заключается в особом моделировании исследуемого процесса, а именно – создаётся информационно-динамическая модель задачи. В качестве такой модели в методе СПУ используется графическая модель в виде *сетевого графика*, который изображается в виде ориентированного графа (множество вершин, соединённых направленными дугами).

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия *работы* и *события*.

Работа (дуги на сетевом графике) – это действие, трудовой процесс, сопровождающийся затратами времени или (и) ресурсов и приводящий к определенным результатам. Работы подразделяются на:

1. **Действительные работы** – трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность (на графике – сплошные стрелки).

2. **Ожидание** – процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность (на графике – штрихпунктирные стрелки). Например, процесс отвердения бетона, высыхание краски и т.п.

3. **Фиктивные работы** используются для обозначения логических связей между операциями, не требуют затрат времени и ресурсов (на графике – пунктирные линии), указывают на то, что начало последующей операции, зависит от результатов предыдущей.

Событие (вершины на сетевом графике) – это момент времени, когда

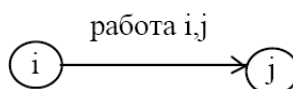
завершаются одни работы и начинаются другие. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени (фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы).

Любая работа сетевой модели соединяет два события: начальное и конечное. Для однозначного обозначения работ используют идентификаторы (i,j) , где

i – номер начального события работы,

j – номер конечного события работы.

Обычно на сетевых графиках события упорядочены, т.е. $i < j$, например $(2,4)$; $(3,8)$; $(9,10)$. На графике события изображаются кружками, квадратами или прямоугольниками.



На сетевом графике можно выделить:

1. *Исходное событие* – это событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. событие, с которого начинается проект,

2. *Промежуточное событие* – это результат одной или нескольких работ, который обеспечивает возможность начать одну или несколько последующих работ.

3. *Завершающее событие* – это событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта.

7.2 Правила построения сетевого графика

Порядок построения сети может быть разный, но в целях типизации лучше придерживаться ряда общих положений и правил.

Правило 1. Направление стрелок работ в сетевом графике следует изображать слева направо. Наклон стрелок произвольный (рисунок 7.1).

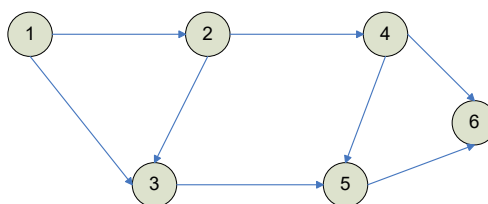


Рисунок 7.1 – Сетевой график

Каждое событие с большим порядковым номером изображается правее предыдущего. Нумерацию событий рекомендуется осуществлять после построения сети. Работы-стрелки могут иметь произвольную длину.

Правило 2. Последующая работа может начинаться только после окончания предшествующей.

Правило 3. Правило изображения параллельных работ.

На практике часто две и более работы выходят из одного и того же

события, выполняются параллельно и заканчиваются одним и тем же событием. Например, одновременно начинается проектирование двух вариантов приспособлений (работы а и б). После их разработки проводится сопоставление и выбор наилучшего варианта (работа в).

На рисунке 7.2 сетевой график построен неверно, так как при расчете сети при таком изображении получим две работы с одним и тем же кодом (1-2), а это недопустимо. В подобных случаях должны быть введены дополнительные события или логическая связь (рисунок 7.3).

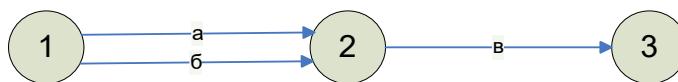


Рисунок 7.2 – Неправильное построение сети

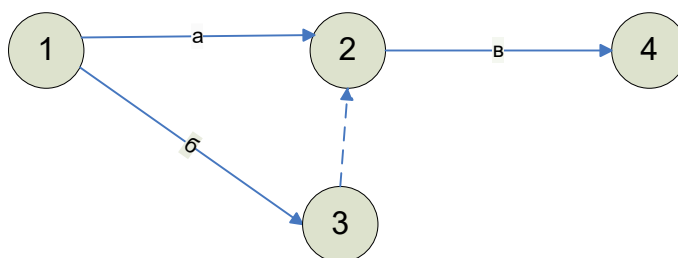


Рисунок 7.3 – Правильное построение сети

Правило 4. График должен быть простым, без лишних пересечений, надо стремиться большинство работ изображать горизонтальными линиями.

Правило 5. Правило расчленения и запараллеливания работ. Для одновременно выполняемых (совмещенных) зависимых друг от друга работ их разбивают на участки, при этом каждый участок является самостоятельной работой.

Пример. Пусть имеется 2 работы: подготовка автобуса к покраске (продолжительность 16ч) и окраска (продолжительность 30ч). По технологии окраска начинается после окончания подготовительных работ. Таким образом, для выполнения комплекса работ по окраске автобуса требуется 46 часов. Для сокращения комплекса работ следует подготовительные и окрасочные работы разбить на участки (рисунок 7.4).

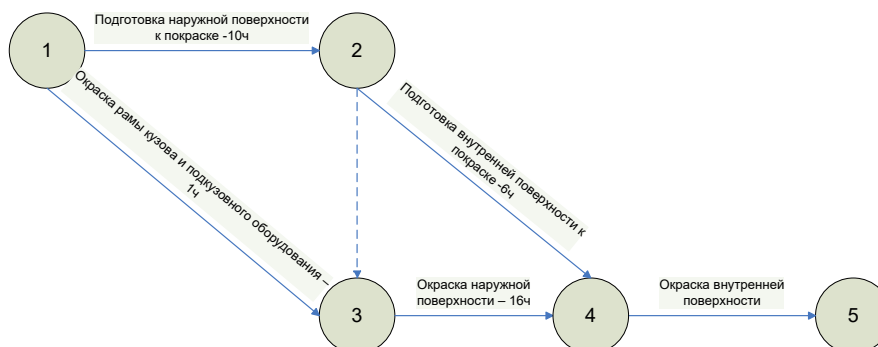


Рисунок 7.4 – Совмещенное выполнение работ по подготовке к покраске и покраске автобуса на сетевом графике

Работы по подготовке наружной поверхности к окраски

(продолжительность 10 ч) и подготовка внутренней поверхности к окраске (6 ч). Работы по окраске автобуса с продолжительностью 30ч разбивают на 3 участка, которые станут самостоятельными работами:

- окраска рамы кузова и подкузовного оборудования (4 ч)
- окраска наружной поверхности (16 ч)
- окраска внутренней поверхности (10 ч)

Подготовка наружной поверхности к окраске и окраска рамы и подкузовного оборудования не зависят друг от друга, и рама и подкузовное оборудование подготовлены к окраске предыдущими работами (очистка, ремонт). Поэтому работы 1-2 и 1-3 выполняют параллельно. После окончания подготовительных работ можно приступить к окраске. Зависимость 2-3 показывает на возможность начала работы 3-4 и 2-4. Работа 4-5 может быть начата после завершения работ 2-4, 3-4. В общем продолжительность всех покрасочных работ сократилось с 46 до 36 ч, что доказывает возможность сокращения сроков выполнения работ с использованием сетевого графика при разбивке работ на участки и одновременности выполнения.

Следует особо подчеркнуть, что ни в коем случае нельзя допускать никаких отклонений в сетевом графике от технологии, так как малейшее нарушение может привести к провалу метода СПУ при его внедрении.

Правило 6. Правило запрещения замкнутых контуров. В сетевом графике не должно быть замкнутых контуров (рисунок 7.5), т.е. ни один путь не должен проходить дважды через одно и то же событие. Если такие пути обнаружены при первоначальном построении сетевого графика, то это указывает на ошибку и требует исправления (рисунок 7.6).

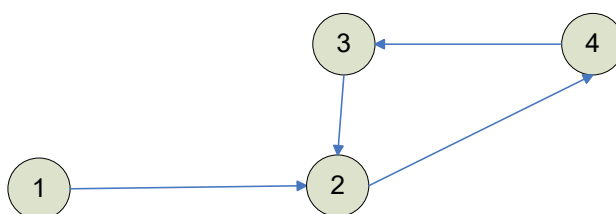


Рисунок 7.5– Неправильное построение сети

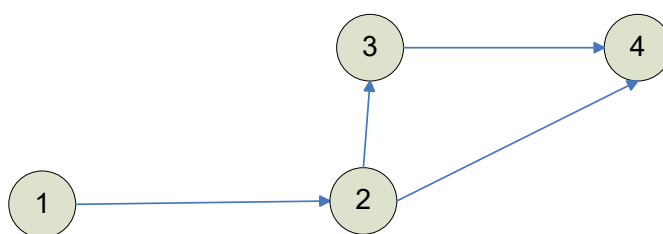


Рисунок 7.6 – Правильное построение сети

Правило 7. Правило запрещения «тупиковых» и хвостовых событий (для одноцелевых сетей). На графике не должно быть тупиковых и хвостовых работ (рисунок 7.7), т.е. не имеющих предшествующих или последующих работ (кроме завершающего и исходного события).

Наличие тупиков в сети указывает либо на то, что данная работа никакие

работы не лимитирует или вообще оказалась ненужной и ее можно не выполнять. Для исправления ситуации следует использовать фиктивные работы (рисунок 7.8).

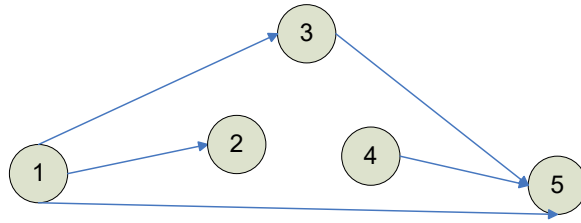


Рисунок 7.7– Неправильное построение сети

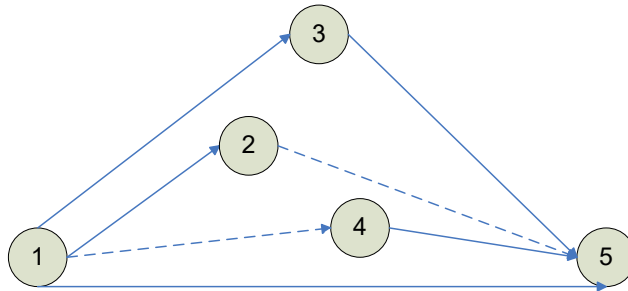


Рисунок 7.8– Правильное построение сети

Правило 8. Правило изображения дифференцированно зависимых работ. Работа *в* зависит от выполнения работ *а* и *б*, а работа *г* – только от *а*.

На рисунке 7.9 работы *в* и *г* зависят от *б* и *а*. Правильно изобразить зависимость работ *в* и *г* поможет фиктивная работа (рисунок 7.10).

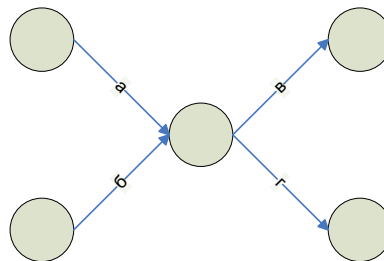


Рисунок 7.9– Неправильное построение сети

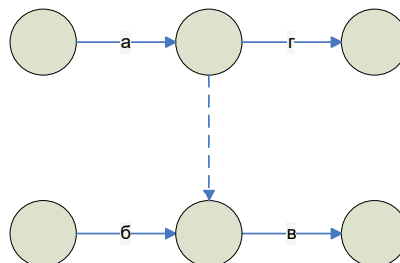


Рисунок 7.10– Правильное построение сети

Правило 9. Критический путь выделяется на сетевом графике жирной, двойной или цветной линией.

Правило 10. Правило кодирования событий сетевого графика

- каждое событие имеет свой самостоятельный номер;
- событие кодируется натуральным рядом цифр;

- номер последующему событию присваивается после присвоения номеров предшествующим событиям;
- стрелка работы должна быть направлена из события с меньшим номером в событие с большим номером;
- работы на графике должны быть упорядочены (на рисунке 7.11 приведен неупорядоченный график, на рисунке 7.12 – упорядоченный).

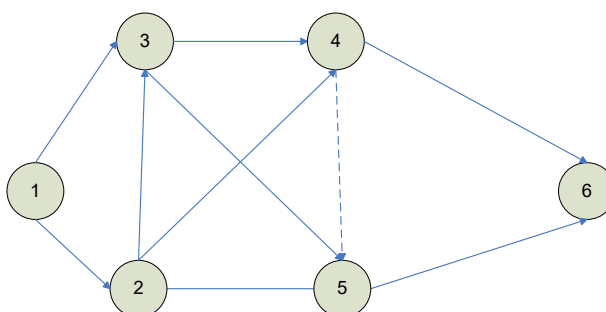


Рисунок 7.11 – Неупорядоченный график

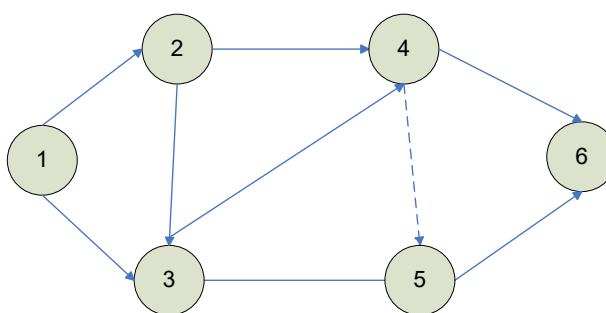


Рисунок 7.12– Упорядоченный график

7.3 Пример построения сетевого графика

Пусть необходимо спроектировать, изготовить и сдать в эксплуатацию стенд согласно полученному техническому заданию (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Исходные данные к сетевому планированию

Шифр предшествующей работы	Наименование работы	Шифр работы	Продолжительность работы	Количество рабочих на данной операции
1	2	3	4	5
-	Проектирование и разработка технологии изготовления электрической части стенда	а	3	3
-	Разработка технических условий на стенд	б	8	2
-	Проектирование и разработка технологии изготовления механической части стенда	в	9	1
а	Изготовление и монтаж элементов электросхемы	г	4	4
а	Оформление и размещение заказов на электрические элементы	д	7	1
в	Оформление и размещение заказов на механические узлы	е	10	2

Шифр предшествующей работы	Наименование работы	Шифр работы	Продолжительность работы	Количество рабочих на данной операции
1	2	3	4	5
б, д	Исполнение заказов на покупные элементы стенда	з	2	3
б, д	Изготовление и сборка механической части стенда	ж	5	2
е, з	Сборка и отладка стенда	и	4	2

На основании граф 1 и 3 таблицы 7.1 проводится построение сети. Поскольку работам "а", "б", "в" не предшествует никакая другая работа, они начинаются с исходного события.

За работой "а" следует "г" и "д", за работой "в" – работа "е" и т.д.

Работы "г", "ж", "и" не имеют за собой последующих работ, и поэтому входят в завершающее событие.

Используя вышеописанные правила построения сети, получаем сетевой график (рисунок 7.13).

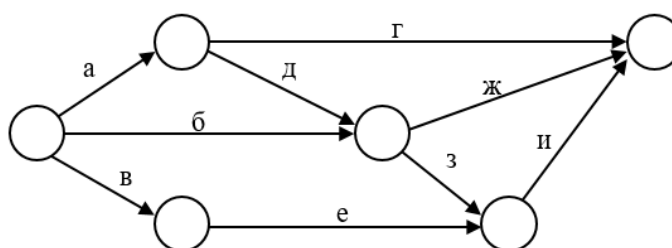


Рисунок 7.13 – Исходная модель сетевого графика

Далее производится кодирование событий на графике, а вместо шифра работ записывается их продолжительность (графа 4 из таблицы 7.1, рисунок 7.14).

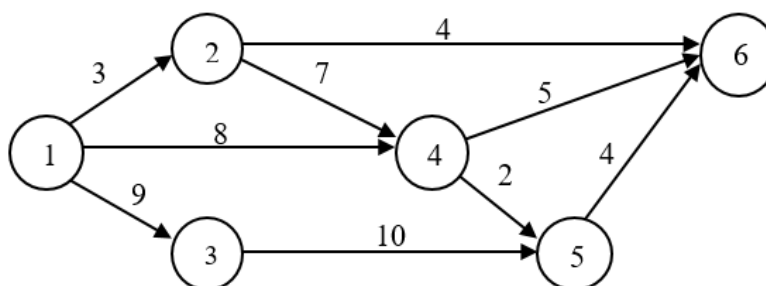


Рисунок 7.14 – Сетевой график, подготовленный для расчёта временных параметров

7.4 Расчет временных параметров сетевого графика

Применение методов СПУ в конечном счете должно обеспечить получение календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой

операции. Построение сети является лишь первым шагом на пути к достижению этой цели. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике.

Продолжительность работы (t_{ij}) – время, необходимое для выполнения работы (i, j).

Путь (L) – любая последовательность работ, в которой конечное событие предыдущей работы является начальным событием последующей.

Полный путь – последовательность работ, соединяющих исходное и завершающее события.

Длина пути – продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих этот путь.

Критический путь – наиболее протяженный по времени полный путь. Его продолжительность определяет $\min$ время выполнения всего проекта (*критический срок* $t_{кр}$). На сетевом графике критических путей может быть несколько. Работы и события, лежащие на критическом пути, называются *критическими*, а остальные работы и события – *некритическими*. Если выполнение любой работы критического пути будет задержано, то это замедлит время реализации всего проекта. Некритические работы допускают некоторое запаздывание их выполнения без нарушения критического срока.

При анализе сетевых графиков прежде всего вычисляют их основные временные параметры:

- продолжительность критического пути (критический срок);
- сроки свершения и резервы событий;
- сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Свершение события – момент, к которому заканчиваются все входящие в него работы и может быть начата любая выходящая работа. Событие может иметь некоторый интервал свободы свершения (резерв времени).

Ранний срок $t_p(j)$ *свершения события* j – самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(1)=0, \quad t_p(j)=\max(t_p(i)+t_{ij})$$

Для завершающего события S – $t_p(S)=t_{кр}$.

Поздний срок $t_n(i)$ *свершения события* i – предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием без нарушения сроков реализации проекта в целом.

$$t_n(i)=\min(t_n(j)-t_{ij})$$

Для завершающего события S – $t_n(S)=t_p(S)=t_{кр}$.

Резерв времени $R(i)$ *события* i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Ранние и поздние сроки критических событий совпадают, т.е. резерв времени у них = 0.

Ранний срок начала работы (i,j) $t_{pn}(i,j) = t_p(i)$

Ранний срок окончания работы (i,j) $t_{po}(i,j) = t_p(i) + t(i,j)$

Поздний срок окончания работы (i,j) $t_{no}(i,j) = t_n(j)$

Поздний срок начала работы (i,j) $t_{nn}(i,j) = t_n(j) - t(i,j)$

В отличие от событий для работ существуют резервы времени разного вида:

Полный резерв времени $R_n(i,j)$ работы (i,j) – максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок:

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j)$$

Свободный (частный) резерв времени $R_c(i,j)$ работы (i,j) – максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушаются ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j)$$

Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют.

Существует множество способов и методов расчета временных параметров сети. Для небольших сетевых графиков расчеты можно производить вручную. Для сложных расчетов применяется соответствующее программное обеспечение.

Для упрощения расчетов используется *четырёхсекторная схема* (рисунок 7.15).

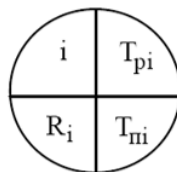


Рисунок 7.15 – Схема упрощения расчетов сетевой модели

Расчет параметров сетевого графика табличным методом сводится к определению:

- наиболее ранних из всех возможных сроков начала и окончания всех работ;
- наиболее поздних из всех возможных сроков начала и окончания работ;

- продолжительности критического пути и работ, лежащих на нем;
- общего и частного резервов времени для работ, не лежащих на критическом пути.

Пример. Расчет параметров сети табличным методом проводится в соответствии с таблицей 7.2 в следующей последовательности заполнения колонок: 2, 1, 4 и 7, 3 и 5, 6 и 8, 9, 10.

Таблица 7.2 – Расчет параметров сетевого графика

Количество предшествующих работ	Данная работа	t_{ij}^{PH}	t_{ij}	t_{ij}^{PO}	$t_{ij}^{ПН}$	t_{ij}	$t_{ij}^{ПО}$	R_{ij}	r_{ij}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1-2	0	3	3	7	3	10	7	0
0	1-3	0	9	9	0	9	9	0	0
0	1-4	0	8	8	9	8	17	9	2
1	2-4	3	7	10	10	7	17	7	0
1	2-6	3	4	7	19	4	23	16	16
1	3-5	9	10	19	9	10	19	0	0
2	4-5	10	2	12	17	2	19	7	7
2	4-6	10	5	15	18	5	23	8	8
2	5-6	19	4	23	19	4	23	0	0
Усл. работа 3	6-7	23							

Первой заполняется колонка 2 в строгой последовательности от события с меньшим номером к событию с большим номером. В колонку 1 записывается количество работ, предшествующих данной. В колонках 4 и 7 записывается продолжительность данных работ.

Далее определяются ранние сроки начала (t_{PH}) и окончания (t_{PO}) работ (графы 3 и 5). Для каждой работы обе графы заполняются одновременно с помощью соответствующих формул.

Раннее начало работ, выходящих из исходного события 1, равно 0: $t_{h-j}^{PH} = 0$.

Раннее окончание работы (1-2) равно 3, работы (1-3) – 9, а работы (1-4) – 8.

Раннее начало работ (2-4) и (2-6) равно раннему окончанию работы (1-2), т. е. 3. Раннее окончание работ (2-4) и (2-6) определяем по формуле. Если данной работе (4-5) предшествует более одной работы (1-4) и (2-4), то в качестве раннего начала работы (4-5) принимается наибольшее значение 10. Таким образом переходят последовательно сверху вниз, от события к событию, до завершающего.

Записываем раннее начало условной работы (6-7) – 23. Затем заполняем графы 8 и 6.

Наибольшее значение из ранних окончаний завершающего события будет его поздним окончанием, поэтому этот срок проставляется в графу 8 как позднее окончание работ (5-6), (4-6) и (2-6) – 23. Позднее начало работы (5-6) равно 19, работы (4-6) – 18, работы (2-6) – 19; они заносятся в графу 6.

Далее расчеты в таблице проводятся снизу вверх.

После составления сетевой модели разрабатываются **календарные планы**.

Их задача – составление и корректировка графика, в котором работы увязываются между собой во времени с учетом имеющихся трудовых, материальных и финансовых ресурсов. При этом должны быть соблюдены сроки, определенные в сетевой модели. В простейшем случае параметрами календарного плана являются даты начала и окончания работы, их продолжительность и требуемые ресурсы.

Сетевой график, хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, но недостаточно нагляден для определения тех из них, которые должны выполняться в конкретный момент времени. Удобным дополнением к сетевому графику является линейный (*график Ганта*). На нем каждая работа (i,j) изображается в привязке к оси времени $(0, t)$ горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна продолжительности работы t_{ij} , поэтому у отрезков указывается не время а интенсивность потребления ресурсов. Фиктивная работа нулевой продолжительности обозначается точкой. Начало каждой работы совпадает с ранним сроком свершения ее начального события. Работы обозначаются в той последовательности, что и в сети.

Одной из наиболее распространенных оптимизационных задач сетевого планирования является задача оптимизации сетевого графика по ресурсам, в которой требуется так спланировать работы, чтобы потребность в ресурсе в любой момент времени не превышала имеющийся в запасе ресурс, а продолжительность выполнения всего комплекса работ была минимальной.

7.5 Оптимизация проекта по трудовым ресурсам

Для изображения масштабного сетевого графика под сетью вычерчивают шкалу времени с нанесенными на нее рабочими днями. Затем прямой линией откладывается критический путь.

Стрелки работ изображаются горизонтально, сплошной линией, их длина соответствует продолжительности работы в установленном масштабе. Вверху стрелок записывается продолжительность работ.

Резервы времени изображаются пунктирными линиями как продолжение сплошных. Их проекции на ось времени показывают свободный резерв времени работ. Величину резервов надо записать над пунктирами и обвести кружком.

Для построения графика движения рабочей силы необходимо, прежде всего, из исходных данных по варианту перенести численность работающих (N_p) на масштабный сетевой график и записать эти значения в скобках под стрелками-работами.

Суммируя количество работающих на каждый день по всем работам, строим график движения рабочей силы, проецируя данные на горизонтальную ось.

С целью корректировки одновременно задействованных рабочих используются следующие приемы:

- а) раннее начало работы передвигают на позднее начало в пределах имеющегося резерва;
- б) сдвигают работу в пределах частного резерва времени;

- в) увеличивают продолжительность выполнения работы в пределах величины частного резерва за счет сокращения численности рабочих;
- г) сокращают продолжительность выполнения работы за счет увеличения численности рабочих;
- д) передвигают работу в пределах общего резерва времени.

Пример. Комплекс операций по сборке кузова автомобиля, представлен таблицей 7. 3. Найти сроки начала и окончания операции таким образом, чтобы в любой момент планируемого периода работу выполняли 10 человек (r).

Таблица 7.3 – Комплекс операций по сборке кузова автомобиля

Работа	Предшествующая работа	t	r
A1	-	3	6
A2	-	2	3
A3	-	5	1
A4	A1	2	8
A5	A2	3	3
A6	A2	4	2
A7	A3, A5	2	4

Строим сетевой график и рассчитываем его параметры четырёхсекторным и табличным методами (рисунки 7.16-7.18).

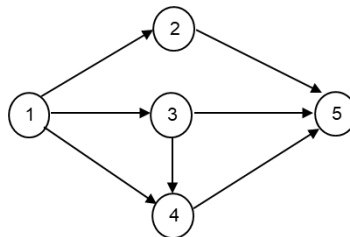


Рисунок 7.16 – Сетевой график проекта по сборке кузова автомобиля

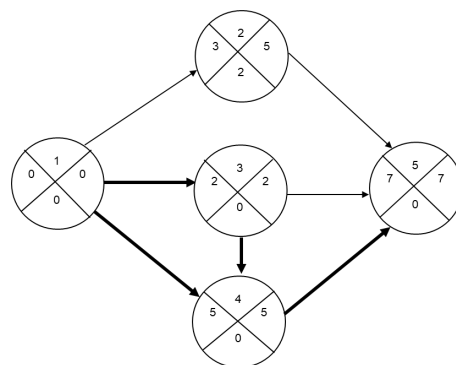


Рисунок 7.17 – Определение параметров сетевого графика четырёхсекторным методом

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
46										
47	$h-i$	$i-j$	t_{i-j}^{PH}	t_{i-j}	t_{i-j}^{PO}	t_{i-j}^{MH}	t_{i-j}	t_{i-j}^{MO}	R_{i-j}	r_{i-j}
48										
49	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
50	-	1-2	0	3	3	2	3	5	2	0
51	-	1-3	0	2	2	0	2	2	0	0
52	-	1-4	0	5	5	0	5	5	0	0
53	1	2-5	3	2	5	5	2	7	2	2
54	1	3-4	2	3	5	2	3	5	0	0
55	1	3-5	2	4	6	3	4	7	1	1
56	2	4-5	5	2	7	5	2	7	0	0
57	3	5-6	7							
58										

Рисунок 7.18 – Расчёт параметров сетевого графика табличным методом

Далее работы сетевого графика в соответствии с правилами корректировки наносятся на шкалу, как изображено на рисунке 7.19.

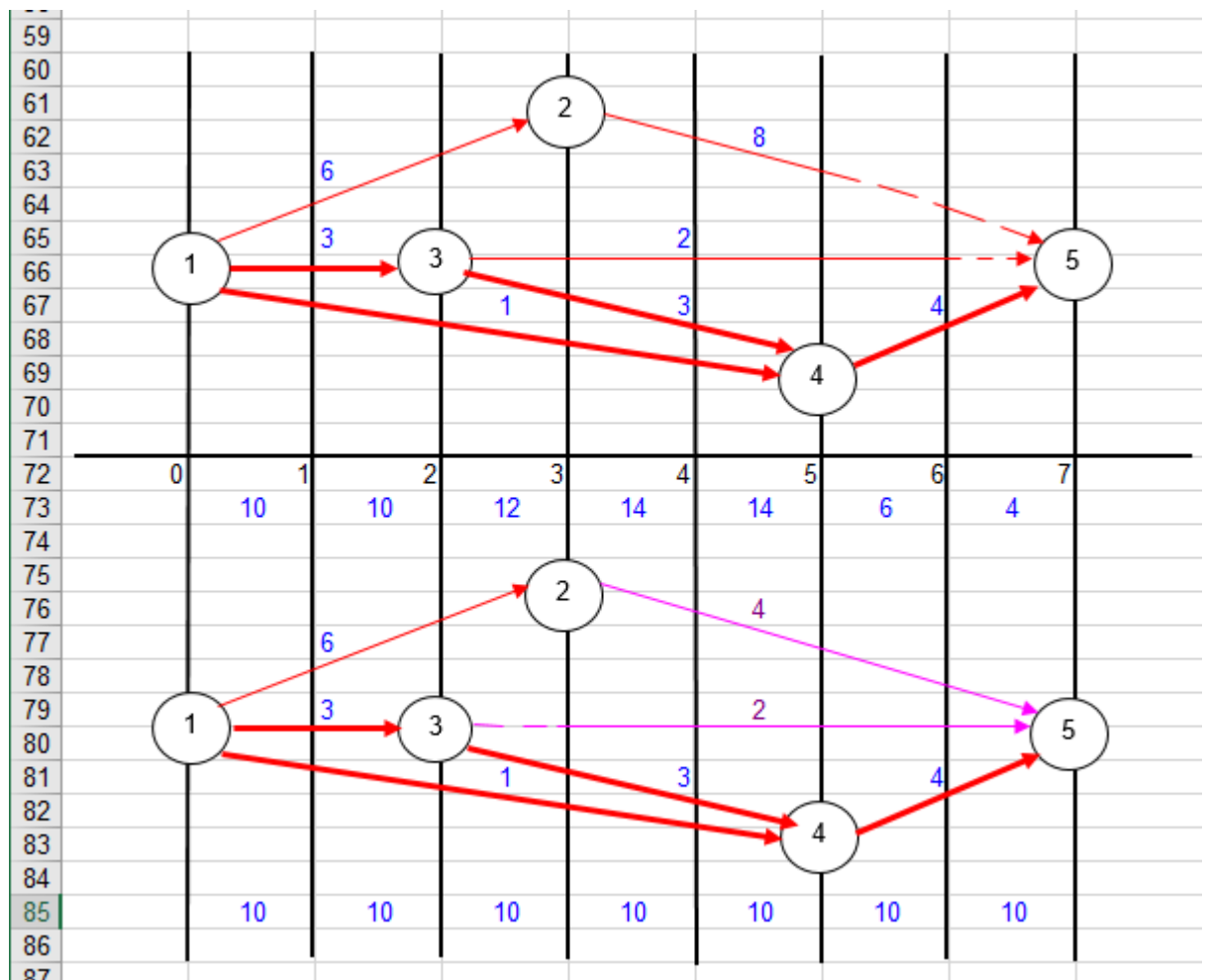


Рисунок 7.19 – Корректировка сетевого графика по трудовым ресурсам

7.6 Оптимизация проекта во времени

Оптимизация по времени комплекса операций сводится к сокращению продолжительности критического пути. Такая задача возникает, когда

критическое время выполнения комплекса операций превосходит срок T_0 , заданный оперирующей стороной. Сокращение времени выполнения комплекса операций требует осуществления определенных мероприятий или вложения каких-то средств.

В некоторых случаях сокращение может быть достигнуто за счет перепланировки сетевого проекта (изменения *топологии сети*). Так, например, одновременно выполняемые операции, не лежащие на критическом пути с большими резервами времени, целесообразно выполнять последовательно, если такое выполнение допускается технологией. Освободившиеся при этом ресурсы можно использовать на критических операциях, что приведет к ускорению их выполнения. Сокращение времени выполнения операций возможно также за счет автоматизации и механизации производственных процессов, улучшения организации работ и применения передовой технологии.

Задачи оптимизации комплекса операций по времени решаются с привлечением дополнительных средств и с использованием внутренних резервов.

1. Оптимизация с использованием дополнительных средств.

Задан сетевой график $G(E, \bar{e})$ выполнения комплекса операций, где E – множество событий графика, $\bar{e}$ – множество операций. Время выполнения каждой операции $(i, j) = t_{ij}$. Известно, что вложение x_{ij} дополнительных средств в операцию (i, j) сокращает время выполнения с t_{ij} до $t_{ij}' = f_{ij}(x_{ij}) < t_{ij}$. Но насыщение критических операций ресурсами не беспредельно. Для каждой операции существует минимально возможное время ее выполнения (d_{ij}).

Условие задачи выглядит следующим образом:

Определить время начала T_{ij}^h и окончания T_{ij}^o выполнения операций, размер дополнительно вложенных средств x_{ij} в каждую из операций (i, j) , чтобы:

1. Общее время выполнения комплекса операций было минимальным:

$$t_{кр} = T_{n-1, n}^o \rightarrow \min$$

2. Сумма вложенных дополнительных средств не превышала заданной величины B :
$$\sum_{(i, j) \in \bar{e}} x_{ij} \leq B$$

3. Время выполнения каждой операции было не меньше минимально возможного времени d_{ij} : $T_{ij}^o - T_{ij}^h \geq d_{ij}, (i, j) \in \bar{e}$

4. Время начала выполнения каждой операции было не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции: $T_{ij}^h \geq T_{jr}^o, i, r, j \in E$

5. $t_{ij}(x_{ij}) = T_{ij}^o - T_{ij}^h, (i, j) \in \bar{e}$

6. $T_{ij}^o \geq 0, T_{ij}^h \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \bar{e}$

При необходимости следует добавить фиктивную операцию, выходящую из последнего события.

Критический путь в данной задаче является функцией от объемов дополнительно вкладываемых средств x_{ij} .

Сформулированная задача относится к классу оптимизационных задач и может быть решена методами линейной или нелинейной оптимизации в зависимости от вида функций $f_{ij}(x_{ij})$.

Пример. Комплекс операций представлен сетевым графиком (рисунок 7.20). Цифры, приписанные дугам графика, означают соответственно продолжительность t_{ij} и минимально возможное время d_{ij} выполнения операции¹. Продолжительность выполнения работ зависит линейно от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t'_{ij}=t_{ij}*(1-k_{ij}*x_{ij})$, где $k_{12}=0,2$; $k_{13}=0,1$; $k_{14}=0,3$; $k_{23}=0,2$; $k_{24}=0,5$; $k_{45}=0,3$.

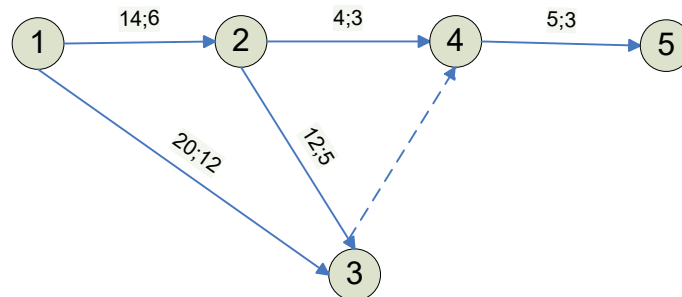


Рисунок 7.20 – Сетевой график проекта

Требуется построить развернутую математическую модель для определения времени начала и окончания выполнения операций и количества средств, вкладываемых в каждую операцию, чтобы время выполнения комплекса операций было минимальным, а сумма вложенных средств не превышала 10 единиц.

В силу особенностей сетевого графика целевая функция имеет вид:

$$t_{кр} = T_{45}^o \rightarrow \min.$$

Запишем ограничения задачи:

– сумма вложенных дополнительных средств не должна превышать их наличного количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{45} \leq 10$$

– время выполнения каждой операции должно быть не меньше минимально возможного времени:

$$T_{12}^o - T_{12}^n \geq 6; T_{13}^o - T_{13}^n \geq 12; T_{14}^o - T_{14}^n \geq 6; T_{23}^o - T_{23}^n \geq 5; T_{24}^o - T_{24}^n \geq 3; T_{34}^o - T_{34}^n \geq 0; T_{45}^o - T_{45}^n \geq 3$$

– время начала выполнения каждой операции было не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей операции:

$$T_{12}^n = T_{13}^n = T_{14}^n = 0, T_{23}^n \geq T_{12}^o, T_{24}^n \geq T_{12}^o, T_{34}^n \geq T_{23}^o, T_{45}^n \geq T_{14}^o, T_{45}^n \geq T_{34}^o, T_{45}^n \geq T_{24}^o.$$

– зависимость продолжительности операции от вложенных средств:

$$T_{12}^o - T_{12}^n = 14(1 - 0,2x_{12}); T_{13}^o - T_{13}^n = 20(1 - 0,1x_{13}); T_{14}^o - T_{14}^n = 10(1 - 0,3x_{14}); \\ T_{23}^o - T_{23}^n = 12(1 - 0,2x_{23}); T_{24}^o - T_{24}^n = 4(1 - 0,5x_{24}); T_{45}^o - T_{45}^n = 5(1 - 0,3x_{45}).$$

– условие неотрицательности неизвестных:

$$T_{ij}^o \geq 0, T_{ij}^n \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Сформулированная математическая модель содержит 17 неизвестных и 21 ограничение, может быть реализована симплекс-методом или решена при помощи функции «Поиск решения» Microsoft Excel.

Таким образом, чтобы время выполнения операции было минимальным (17 дней), необходимо вложить в операцию (1;2) 2,86 единицы дополнительных средств, в операцию (1;3) 1,06 единицы дополнительных средств, в операцию (1;4) 1,33 единицы дополнительных средств, в операцию (2;3) 2,92 единицы дополнительных средств, в операцию (2;4) 0,50 единицы дополнительных средств, в операцию (4;5) 1,33 единицы дополнительных средств.

7.7 Оптимизация с использованием внутренних резервов

Постановка этой задачи отличается от предыдущей тем, что в ней наложено ограничение на общее время выполнения комплекса операций, которое не должно превышать величину T_0 (*директивное время*).

Ставится задача определить значения неизвестных величин x_{ij} (объемы дополнительно вкладываемых средств в операции (i,j)) таким образом, чтобы:

1. Суммарное количество дополнительно привлекаемых средств было минимальным:

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in \vec{e}} x_{ij} \rightarrow \min$$

2. Время завершения комплекса операций было не выше заданного срока T_0 , а время выполнения каждой операции $(i,j) \in \vec{e}$ – не меньше минимально возможного времени d_{ij} :

$$T_{n-1,n}^o \leq T_0$$

3. Зависимость продолжительности выполнения операций от вложенных средств:

$$T_{ij}^o - T_{ij}^n \geq d_{ij}, (i, j) \in \vec{e}$$

4. Время окончания любой операции (i,j) сетевого графика было не больше времени начала непосредственно следующей за ней операции (j,r) , т.е. для любых смежных операций сети (i,j) и (j,r) должно выполняться условие

$$T_{jr}^n \geq T_{ij}^o, i, r, j \in E$$

$$T_{ij}^o \geq 0, T_{ij}^n \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i, j) \in \vec{e}.$$

Тема 8. Детерминированные модели динамического программирования

Динамическое программирование (или динамическое планирование) представляет собой особый математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование управляемых процессов. Под «управляемыми» подразумеваются процессы, на ход которых мы можем в той или другой степени влиять (Е.С. Вентцель). Речь идет о планировании производственных или иных процессов, когда управление ими осуществляется многоэтапным путем ввиду их сложности.

Динамическое программирование возникло и сформировалось в период 1950–1953 гг. благодаря работам американского математика Ричарда Беллмана (1920–1984). Первыми задачами, для решения которых применялся метод динамического программирования, были задачи управления запасами. Значительный вклад в развитие методов динамического программирования в контексте исследования операций и оптимизации управления многоэтапными процессами внесла Е.С. Вентцель (1907–2002) – советский математик, автор учебников по теории вероятностей и исследованию операций, монографии «Элементы динамического программирования» (1961).

Динамическое программирование представляет собой многоэтапный поиск оптимального решения. Оптимизация многошагового процесса базируется на принципе оптимальности Р. Беллмана.

В отличие от линейного программирования, для динамического программирования не существует единого стандартного алгоритма решения; для каждой конкретной задачи разрабатывается своя рекурсивная модель. Вычисления в динамическом программировании выполняются рекуррентно – оптимальное решение одной подзадачи используется в качестве исходных данных для поиска оптимального решения следующей подзадачи. Решение последней подзадачи позволяет получить оптимальное решение исходной задачи.

Метод динамического программирования является одним из основных инструментов оптимизации и решения задач в различных предметных областях: экономике, информатике, робототехнике и др. Например:

1. Решение задач, связанных с графами, таких как поиск кратчайшего пути.
2. Решение задач оптимизации, таких как нахождение оптимального распределения задач, оптимального управления ресурсами, оптимального порядка выполнения операций и т.д.
3. Решение задач финансовой математики, таких как оптимальное портфельное управление, оценка финансовых инструментов, моделирование рисков, и др.
4. В области задач искусственного интеллекта и машинного обучения динамическое программирование используется в таких алгоритмах, как обучение с подкреплением (reinforcement learning).
5. В лингвистике и обработке естественного языка динамическое программирование используется в задачах сравнения текстов, выделения ключевых фраз, автоматического перевода и др.

6. Решение задач планирования, управления запасами, распределения ресурсов и инвестиций, оптимизации производственных процессов и др.

Это лишь некоторые примеры. Динамическое программирование может быть применено в тех областях, где задача может быть сведена к комбинаторной оптимизации и разбита на подзадачи.

Поскольку динамическое программирование представляет собой метод решения задач оптимизации, основанный на разбиении сложной задачи на ряд более простых подзадач, которые имеют общую структуру, это позволяет использовать однородный способ их решения, а не решать каждую отдельно разными алгоритмами.

Особенность использования детерминированных моделей динамического программирования заключается в том, что каждый этап решения задачи оптимизации полностью определяет следующий, без случайных факторов. В отличие от вероятностных моделей, в детерминированных моделях все переходы между состояниями и результаты на каждом шаге известны и предсказуемы. Следует отметить, что динамическое программирование применимо и эффективно для решения задач, обладающих двумя свойствами:

1. Оптимальная подструктура. Свойство предполагает, что оптимальное решение всей задачи содержит в себе оптимальные решения отдельных подзадач.

2. Перекрывающиеся подзадачи, что означает многократные решения одних и тех же подзадач в процессе решения основной задачи.

В вероятностных моделях, в отличие от детерминированных, состояния или переходы могут быть случайными, например, как в задачах управления запасами или марковских процессах. Детерминированное динамическое программирование используется в тех случаях, где все условия и результаты известны заранее.

Основные положения динамического программирования:

1. Предсказуемость: переходы между состояниями являются фиксированными и не зависят от случайности.

2. Оптимальная подструктура: оптимальное решение всей задачи содержит в себе оптимальные решения подзадач.

3. Перекрывающиеся подзадачи: одна и та же подзадача может встречаться в нескольких разных ветвях решения, поэтому решение сохраняется, чтобы избежать повторных вычислений.

4. Принцип оптимальности: решение, найденное для подзадачи, используется для поиска оптимального решения на следующем шаге, вплоть до достижения финального состояния.

Основным принципом, лежащим в основе динамического программирования, является принцип оптимальности Беллмана. Он гласит, что *если начальное состояние и начальное решение оптимальны, то последующие решения должны составлять оптимальный курс действий для состояния, полученного в результате первого решения*. Иными словами, оптимальная стратегия обладает свойством, что ее последующие части являются оптимальными подстратегиями.

Суть принципа заключается в том, что при принятии решения на каждом шаге нужно исходить из того, что все последующие шаги будут также оптимальными. Это значит, что оптимальное решение для всей задачи содержит в себе оптимальные решения для всех её подзадач. Благодаря принципу оптимальности, можно строить рекуррентные соотношения, которые позволяют разбить сложную задачу на последовательность более простых подзадач, решения которых сохраняются и используются для решения следующих шагов. Этот подход позволяет избежать повторных вычислений и значительно ускоряет процесс решения задачи.

Для решения задач используются два подхода:

1) нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи, при этом используется простое запоминание результатов решения часто встречающихся подзадач подзадач;

2) восходящее динамическое программирование: включает в себя переформулирование сложной задачи в виде рекурсивной последовательности более простых подзадач. Все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи.

Примеры типичных задач из области исследования операций и экономики, для решения которых возможно применение метода динамического программирования: задачи о загрузке, планировании рабочей силы, замене оборудования и инвестировании.

Задача о загрузке относится к задаче о маршрутизации.

Цель задачи о загрузке – найти оптимальный способ распределения задач между исполнителями или ресурсами для максимальной эффективности (например, минимизации времени или стоимости).

Задача о планировании рабочей силы имеет отношение к оптимизации численности персонала.

Цель задачи о планировании рабочей силы – определить оптимальную численность сотрудников для выполнения производственного плана или других целей, а также их распределение по подразделениям.

Задача о замене оборудования связана с определением оптимальных сроков службы активов.

Цель задачи о замене оборудования – определить оптимальный момент для замены старого оборудования на новое, исходя из критериев минимизации затрат или максимизации прибыли. Решается путем сравнения затрат на эксплуатацию старого оборудования с расходами на новое.

Задача об инвестировании относится к выбору наилучших вариантов вложения средств.

Цель задачи об инвестировании – распределить имеющийся капитал между различными проектами таким образом, чтобы получить максимальную прибыль или осуществить другие стратегические цели.

Тема 9. Модели управления запасами

9.1 Классические модели управления запасами

Запасы – материальные ресурсы, находящиеся в местах хранения или в состоянии незавершенного производства, используемые в процессе производства для поддержания деятельности предприятия и в процессе обслуживания клиентов

Товарные запасы являются необходимым фактором, обеспечивающим непрерывность работы любого торгового предприятия. Поэтому эффективное управление запасами является важнейшей задачей любого предприятия.

Под управлением запасами понимается совокупность мероприятий по обеспечению их оптимального уровня на предприятии. **Задачи управления запасами** – определение моментов размещения заказов и объемов поставок

Каждый вариант стратегии управления запасами связан с определенными затратами.

Стратегию, при которой эти **затраты минимальны**, называют **оптимальной**, а ее определение является предметом теории управления запасами.

Многообразие реальных ситуаций является причиной большого количества различных **систем управления запасами**.

В основу их классификации могут быть положены:

- характер системы снабжения,
- интенсивность потребления,
- возможности пополнения запасов,
- **издержки** функционирования системы.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения управления запасами, должна учитывать только те издержки, которые зависят от выбора стратегии.

Цель разработки математической модели складской системы состоит в выборе с ее помощью приемлемой стратегии функционирования, которая обеспечит наибольшую возможную прибыль или минимизирует издержки.

Уравнение издержек, связанных с запасами в течение одного цикла (период времени между повторениями заказов), может быть записано следующим образом:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \quad (9.1)$$

где C_1 – организационные издержки, руб.;

C_2 – стоимость товаров, руб.;

C_3 – общие издержки содержания запасов, руб.;

C_4 – потери из-за отсутствия продукции (дефицита), руб.

Модели управления запасами в условиях детерминированного спроса используются в предположении, что интенсивность поступления требований является известной и постоянной во времени (однако на практике, спрос редко можно указать с определенностью; вместо этого его следует описывать в вероятностных терминах).

Детерминированные модели интересны тем, что позволяют познакомиться с методами анализа, используемыми в более сложных системах. Кроме того, результаты, полученные с помощью этих моделей, дают качественно правильные суждения о поведении системы даже при отказе от гипотезы детерминированного спроса.

Статические детерминированные модели можно разделить на две группы.

1. Статические детерминированные модели без дефицита:

a. Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель (модель Уилсона, рисунок 9.1).

b. Модель с определением точки заказа.

c. Модель определения величины партии в условиях оптовой скидки.

d. Модель с конечной интенсивностью поступления запаса.

2. Статические детерминированные модели с дефицитом

a. Модель с учетом неудовлетворенных требований.

b. Модель с потерей неудовлетворенных требований.

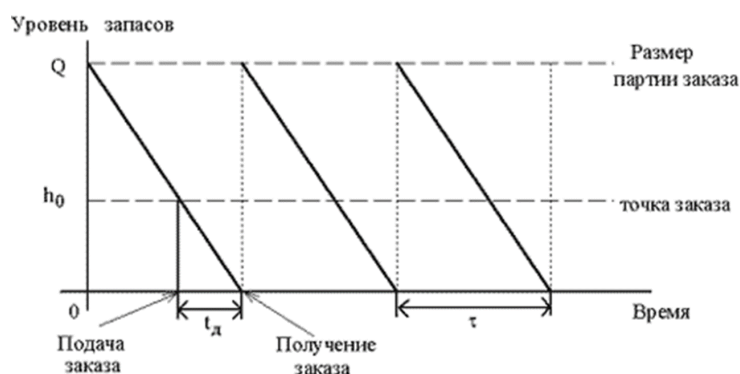


Рисунок 9.1 – Схема изменения уровня запасов в модели Уилсона

Бездефицитная простейшая однономенклатурная модель оптимальной партии поставки (модель Уилсона) строится при следующих предположениях:

- 1) Интенсивность спроса (v) в единицу времени величина постоянна.
- 2) Заказанная партия доставляется одномоментно.
- 3) Дефицит в модели недопустим.
- 4) Организационные издержки на поставку (K) постоянны и не зависят от величины партии q . Удельные затраты на хранение единицы продукции за единицу времени составляют s .

Уровень запаса снижается равномерно от q до 0 , после чего подается заказ на доставку новой партии величины q . Заказ выполняется мгновенно, и уровень запаса восстанавливается до величины q .

Оптимальный размер партии заказа: – формула размера партии (экономичная величина заказа, формула квадратного корня, формула Уилсона):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \quad (9.2)$$

Общие затраты на управление запасами в единицу времени:

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} \quad (9.3)$$

Интервал времени между поставками τ – цикл:

$$\tau = \frac{Q}{v}, \quad (9.4)$$

Точка заказа:

$$h_0 = \frac{v}{t_d}, \quad (9.5)$$

9.2 ABC-анализ

Метод ABC – метод формирования и контроля за состоянием запасов, заключающийся в разбиении номенклатуры N реализуемых товарно-материальных ценностей на 3 неравноценных подмножества А, В и С на основании формального алгоритма.

В основе ABC-анализа – известный **принцип Парето**, который гласит: 20% усилий дает 80% результата.

Метод ABC позволяет рассортировать номенклатурные позиции на три группы, которые оказывают разное влияние на конечный результат:

- А – наиболее важные для итога (20% дает 80% результата, например, выручки).
- В – средние по важности (30% – 15%).
- С – наименее важные (50% – 5%).

Группа А. Позиции номенклатуры немногочисленны, но на них приходится преобладающая часть денежных средств, вложенных в запасы. На позиции группы А, как правило, приходится 70-80% стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 20 %.

Группа В. Позиции номенклатуры, занимают среднее положение в формировании запасов склада. По сравнению с позициями номенклатуры группы А они требуют меньшего внимания – производится обычный контроль текущего запаса на складе и своевременности заказа. На товары группы В, как правило, приходится 15% стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 30-40%.

Группа С. Позиции номенклатуры, составляют большую часть запасов: на них приходится незначительная часть финансовых средств, вложенных в запасы. Как правило, по позициям группы С не ведется текущий учет, а проверка наличия осуществляется периодически (один раз в месяц, квартал или полугодие); расчеты оптимальной величины заказа и периода заказа не выполняются. На позиции группы С приходится 5-15 % стоимости всех складских запасов, а доля этой группы в общем количестве единиц товаров на складе составляет около 40-50%.

Существуют 4 метода проведения АВС-анализа: аналитический, дифференциальный, эмпирический и графический.

1. Аналитический метод.

Группы А, В и С определяются по статистическим данным учета запасов на складе, их границы строго не фиксированы, а определяются как зависимость $\sum C = f(N)$.

Например, для всей номенклатуры деталей N известны:

c_i – стоимость i-й детали,

q_i – количество (или оборот) i-й детали на складе в течение рассматриваемого интервала времени.

Алгоритм применения аналитического метода:

1. Рассчитываются затраты по каждой детали $C_i = q_i \cdot c_i$.

2. Полученные значения C_i ранжируются – располагаются в убывающей последовательности; $C_a > C_b > C_c$.

3. Для удобства расчетов вводятся относительные величины рассматриваемых стоимостных показателей q_i (в процентах), тем самым производится нормирование показателей:

$$q_i = \frac{c_i}{\sum_{i=1}^N c_i} \cdot 100\%, \quad (9.6)$$

4. Величины q_i суммируются нарастающим итогом $q_{\sum i} = \sum q_i$ и в зависимости от последующего способа определения номенклатурных групп представляются в табличной форме для определения нижней границы каждой группы.

5. Определяется группа А, В и С и рекомендации по управлению.

2 Дифференциальный метод.

Например, для всей номенклатуры деталей N известны:

c_i – стоимость i-й детали,

q_i – количество (или оборот) i-й детали на складе в течение рассматриваемого интервала времени.

Алгоритм применения дифференциального метода:

1. Рассчитываются затраты по каждой детали $C_i = q_i \cdot c_i$.

2. Определяются общие затраты по всей номенклатуре $\sum C_i$.

3. Рассчитывается средняя стоимость 1 позиции номенклатуры $p = \sum C / N$, где N – количество позиций номенклатуры.

4. Разделение по группам выполняется по следующим правилам:

а) все номенклатурные позиции, затраты на которые в 6 раз и более превышают p, относятся к группе А;

б) все номенклатурные позиции, затраты на которые составляют 0,5p или меньше, относятся к группе С;

с) остальные попадают в группу В.

Достоинство дифференциального метода – простота; нет необходимости ранжировать товары по стоимости, т.е, располагать в порядке возрастания или убывания, и строить кумулятивную (интегральную или накопленную) зависимость $\sum C_i$.

9.3 XYZ – анализ

Метод XYZ позволяет произвести распределение по группам тех же ресурсов, но в зависимости от характера их потребления и точности прогнозирования изменений в потребности.

Признаком, на основе которого конкретную позицию ассортимента относят к группе X, Y или Z, является коэффициент вариации спроса (v) по этой позиции. Он представляет собой отношение среднеквадратического отклонения к среднеарифметическому значению показателей (показывает отклонение расхода от среднего значения):

$$r = \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (9.7)$$

где x_i – i -е значение спроса по оцениваемой позиции;
 $\bar{x}$ – среднее значение спроса по оцениваемой позиции за период n ;
 n – величина периода, за который произведена оценка.

Величина коэффициента вариации изменяется в пределах от нуля до бесконечности.

Группировка ресурсов при проведении XYZ-анализа осуществляется в порядке **возрастания коэффициента вариации**.

В группу X включают товары, спрос на которые равномерен, либо подвержен незначительным колебаниям (от 5% до 15%). Объем реализации (потребления) по номенклатурным позициям, включенным в данную группу, хорошо предсказуем.

В группу Y включают позиции, объемы потребления которых подвержены колебаниям от 15% до 50%. В частности, в эту группу могут быть включены товары с сезонным характером спроса. Возможности прогнозирования по товарам группы Y – средние.

В группу Z включают позиции, спрос на которые возникает лишь эпизодически, колебание составляет от 50% и выше, т.е. характерно нерегулярное потребление и непредсказуемое колебание. Прогнозировать спрос практически невозможно.

Общий алгоритм проведения XYZ-анализа:

1. Определить коэффициенты вариации по отдельным позициям ассортимента.
2. Сортировать по возрастанию значений коэффициента вариации.
3. Разделение по группам выполняется по следующим правилам:
 - а) к группе X относят позиции, для которых коэффициент вариации менее 10%, $v < 10\%$;
 - б) к группе Y – $10\% \leq v < 25\%$;
 - в) к группе Z – $25\% \leq v < \infty$.

Таким образом, результатом XYZ –анализа является группировка позиций исходя из стабильности их поведения.

Тема 10. Модели прогнозирования

10.1 Применение экспертных методов и их классификация

Обычно в процессе принятия управленческих решений предварительно намечается ряд различных вариантов ответа на поставленную задачу. В связи с этим менеджеру необходимо тщательно рассмотреть все возможные варианты и выбрать из них наиболее рациональный, с учетом как количественных, так и качественных факторов, оказывающих влияние на принимаемое решение.

Выбор решения должен осуществляться на основе сопоставления эффективности ожидаемых результатов каждого из вариантов с учетом затрат на их реализацию.

Для решения вопросов, связанных с обработкой качественной информации, с успехом используются экспертные методы, позволяющие на основании учета мнений квалифицированных специалистов выявить приоритетные направления повышения конкурентоспособности продукции.

Экспертное исследование – это исследование, в процессе которого формируется группа независимых, достаточно компетентных в изучаемой проблеме специалистов, высказывающих свое согласованное мнение по анализируемой проблеме.

Экспертные оценки – это средние оценки, данные группой компетентных специалистов о каком-либо явлении или процессе при условии достижения ими согласованности или близости взглядов.

Экспертные методы получения информации используются при изучении рынка, прогнозирования параметров и составлении сценариев развития рынка, принятии стратегических решений, в повышении качества продукции, оценке потенциала конкурентов и т.д.

Экспертные методы анализа и прогнозирования могут быть:

1. *неформализованными* (творческими) – методы, в которых процедуры анализа не имеют четких алгоритмов,
2. *мягкоформализованными* – методы, основанные на гибких алгоритмах.

Экспертиза может быть реализована как самим аналитиком при наличии достаточных знаний, так и сторонними экспертами, если ответственность задачи или ее специфика требуют использования независимого мнения.

Методы экспертных оценок можно разделить на две основных группы:

1. Групповые методы. Подразумевают коллективную работу экспертов. Групповые методы формирования экспертизы в зависимости от характера и направленности обсуждения подразделяют на:

– *аналитические методы* – нацелены преимущественно на исследование характеристик изучаемого объекта. Экспертная группа – обсуждающая (основная цель работы аналитическая).

– *креативные методы* – нацелены на коллективную генерацию идей или выработку решения проблемы. Экспертная группа – созидательная (основная цель креативная).

1.1 Метод номинальных групп. При реализации этого метода сначала производится индивидуальный опрос одних экспертов, а затем результаты данных интервью так же автономно и независимо друг от друга обсуждаются другими экспертами. Эксперты могут выразить согласие или несогласие с ранее прозвучавшими мнениями, необходимо, чтобы критика или выражение солидарности были четко аргументированы.

1.2 Мозговой штурм – совместное очное обсуждение проблемы группой экспертов. Метод реализуется в 2 этапа.

Этап 1 («конференция идей»). Длительность этапа составляет примерно 1-1,5 часа. В ходе этого этапа эксперты выдвигают различные идеи, касающиеся трактовки анализируемой ситуации и или прогноза развития явления. Идеи протоколируются, но не обсуждаются, не критикуются. При этом идеи могут быть самыми разными, в том числе и «бредовыми». Главенствует принцип: чем больше идей, тем лучше.

Этап 2. Идеи обсуждаются, оцениваются, и выбираются те из них, которые признаются наиболее верными. Окончательный вердикт по проблеме может быть принят путем явного или неявного голосования. Процедуры генерации и обсуждения идей могут быть в большей или меньшей степени формализованы.

1.3 Метод «635» – формализованная вариация метода мозгового штурма. В группу входят 6 человек, каждый из которых в течение 5 минут должен выдвинуть 3 предложения или высказать 3 гипотезы по поводу некоторого аспекта решаемой задачи или анализируемой ситуации. Идеи каждого эксперта заносятся в специальные формуляры, которые передаются по кругу. После того как были рассмотрены все аспекты поставленной задачи и все эксперты получили возможность высказаться, происходит обсуждение и оценка решений и выбор наиболее верного.

1.4 Критическая атака («разносная» атака) – вариация метода мозгового штурма, принципиальное отличие состоит в критической направленности обсуждения.

Этап 1. Каждый участник экспертной группы предлагает свое решение поставленной задачи или свою версию развития событий. Решение должно предлагаться с подробной аргументацией.

Этап 2. Каждый эксперт должен ознакомиться с мнениями своих коллег и найти и аргументировать в предлагаемых решениях максимально возможное число слабостей.

Этап 3. Эксперты собираются вместе и по очереди обсуждают все выдвинутые решения. Задача каждого автора – отстоять свою версию решения, задача оппонентов – «разнести ее в пух и прах». По итогам дискуссии эксперты выбирают то решение, которое вызвало меньше всего нареканий и было наиболее обоснованным.

1.5 Экспертное фокусирование. Эксперты всесторонне рассматривают исследуемую ситуацию, «фокусируются» на ней. Основная цель – выявить структуру данной проблемы, определить по возможности все факторы, определяющие данную ситуацию, установить взаимосвязи между ними. Обсуждение носит более деловой характер, чем при классической версии мозгового штурма.

1.6 Метод комиссий. Метод также заключается в совместном обсуждении проблемы. Основное отличие от фокусирования – стремление выяснить, в чем состоит противоречие между разными вариантами предлагаемых решений, найти максимальное число «точек согласия» и прийти к консенсусу.

1.7 Метод интеграции решений. Метод в своей основе аналогичен методу комиссий, однако в большей степени формализован. Метод заключается в выработке совместного решения проблемы на основе выявления сильных сторон отдельных решений и их объединения.

Этап 1. Экспертам предлагается задача, и они рассматривают и решают ее независимо друг от друга.

Этап 2. В заранее подготовленный формуляр эксперты заносят свои индивидуальные решения.

Этап 3. Эксперты совместно обсуждают задачу и все предложенные решения с целью выявить сильные стороны каждого отдельного решения, которые также фиксируются в формуляре. При представлении индивидуальных решений возможны вариации – либо каждое решение презентуется автором и подробно аргументируется, либо соблюдается анонимность решений, чтобы избежать давления авторитетов. После того как обсуждены все решения и определены сильные стороны каждого из них, вырабатывается синтезированное решение на основе комбинирования преимуществ отдельных решений.

1.8 Деловая игра. Метод может быть реализован в разных формах. Наиболее распространенная форма – моделирование анализируемых процессов и/или будущего развития прогнозируемого явления в разных вариантах и рассмотрение полученных данных. Разработка процедуры проведения деловой игры – достаточно сложная задача, и ей должно быть уделено серьезное внимание. Должны быть четко определены и формально описаны следующие элементы игры: цели и задачи, роли участников, сюжет и регламент. Важным этапом любой деловой игры является рефлексия – разбор хода игры и подведение итогов. В данном случае рефлексия заключается не только в анализе самого игрового процесса, но и в анализе результатов моделирования исследуемого явления.

1.10 Метод «суда» – разновидность деловой игры. Обсуждение поставленной задачи реализуется в виде судебного процесса: выбираются «адвокат», «прокурор», «суд», «присяжные» и другие участники «процесса». Каждый отстаивает свою точку зрения, касающуюся анализируемого или прогнозируемого явления, аргументируя свои высказывания. Окончательный вердикт об исследуемой проблеме определяется в два этапа: голосование «присяжных» и конкретизация решения «судьями».

1.11 «Консилиум». Эксперты исследуют проблему подобно тому, как врачи обследуют пациента: определяются «симптомы» проявления проблемы, вскрываются причины возникновения проблемы, производится анализ, ставится «диагноз», и дается прогноз развития ситуации.

1.12 «Коллективный блокнот».

Этап 1. Все эксперты собираются вместе и им рассказывают о сущности возникшей проблемы и формулируют задачу. Далее каждый эксперт работает со

своим блокнотом в течение определенного времени (при этом также возможно, что разные эксперты сосредотачиваются на разных сторонах проблемы).

Этап 2. Блокноты собираются, информация систематизируется

Этап 3. В очном совместном обсуждении накопленного и систематизированного материала эксперты приходят к решению проблемы.

1.13 Метод Дельфи – заочный и анонимный опрос экспертной группы в несколько туров с согласованием мнений экспертов. Оценка по данному методу проводится с соблюдением следующих принципов: многоэтапность процедуры опроса; сохранение анонимности опрашиваемых; информирование по определенным правилам экспертов, как в процессе опроса, так и по результатам обработки данных; требование от экспертов обоснования своих решений на конечных этапах опроса. Чаще всего на практике используется четырехэтапный опрос экспертов:

Этап 1. Осуществляется независимый опрос без аргументации оценок.

Этап 2. Эксперты получают информацию о «крайних» оценках и вправе корректировать свои с обоснованием изменений.

Этап 3. Дополнительно сообщаются экспертам средние оценки, после чего они могут изменить собственные с соответствующей аргументацией.

Как правило, стабильная оценка наступает после 3-5 этапов, после чего опрос прекращают.

Метод Дельфи имеет весьма существенные достоинства, которые иногда делают его незаменимым:

1) заочность и анонимность позволяют избежать конформизма или ориентации на авторитеты, что могло бы возникнуть, если бы экспертов собрали вместе и они должны были бы обнародовать свое мнение;

2) эксперты имеют возможность изменить свое мнение без риска «потерять лицо».

Недостатком является определенное влияние мнения большинства на экспертные оценки после первого этапа.

2 Индивидуальные методы с последующим суммированием оценок каждого эксперта.

2.1 Интервью – свободная беседа или беседа по типу «вопрос-ответ». Степень формализации интервью может быть различной. Низкий уровень формализации опроса – неформальная беседа, для которой определяется только тема, а далее эксперт сам решает, как ее освещать (интервьюер при этом задает уточняющие или наводящие вопросы). Высокий уровень формализации – разработка четко структурированного опросника с вопросами открытого типа. Данный метод по сравнению с предыдущим более сложен как на этапе проведения опроса (требует высокой квалификации интервьюера), так и на этапе интерпретации полученной информации и требует высокой квалификации исследователя.

2.2 Анкетирование. Каждый эксперт дает количественные оценки отобранному факторам или альтернативам. Данный метод требует от исследовательской команды предварительного четкого структурирования проблемы и определения перечня всех вопросов, на которые должны быть получены однозначные ответы. Для реализации опроса разрабатывается

стандартизированная анкета с вопросами закрытого типа (с предложением вариантов ответа). Анкетирование может проводиться: при личной беседе интервьюера с экспертом или путем «самозаполнения». Метод предполагает высокую квалификацию специалистов-исследователей на этапе постановки задачи и планирования исследования, однако весьма прост в части организации и проведения опроса, а также в части обработки полученной информации. Требования к анкетам (структура, формулировка вопросов и вариантов ответов) достаточно стандартны и аналогичны требованиям, предъявляемым к опросам неэкспертного уровня. Одно из основных требований – использование общепринятого профессионального языка, однозначность трактовки используемых терминов.

2.3 Метод «индивидуального блокнота» – заочная работа эксперта без непосредственного общения с исследователями. Эксперт получает блокнот, на первой странице которого описана проблема, и затем в течение оговоренного периода времени (определяемого сложностью проблемы и срочностью ее решения) заносит в этот блокнот все свои мысли, идеи, замечания, касающиеся поставленной задачи, после чего сдает блокнот исследователям. Существенную сложность представляет последующая обработка информации и ее интерпретация. Метод требует значительного вовлечения эксперта и, следовательно, предполагает высокий уровень оплаты его труда.

2.4 Метод априорного ранжирования основан на экспертной оценке факторов группой специалистов, компетентных в исследуемой области. Метод априорного ранжирования является наиболее простым и часто применимым. Состоит из следующих этапов:

1. Специалистами, проводящими экспертизу, определяется перечень направлений, требующих ранжирования, например, факторы, обеспечивающие повышение конкурентоспособности конкретной продукции.
2. Составляется анкета, в которой приведены факторы преимущественно в табличной форме, а также необходимые пояснения, инструкции и примеры заполнения анкет.
3. Выбираются эксперты и оценивается их компетентность.
4. Проводится устный или письменный инструктаж группы экспертов.

Иногда, когда экспертам более глубоко известна анализируемая задача, степень влияния того или иного фактора оценивается баллами от 1 до 100. Известна и весовая оценка, при которой суммарный вес всех факторов принимается за единицу. Существует связь между весом фактора и его местом при ранжировании. Вес фактора может быть вычислен исходя из предположения о его пропорциональности членам убывающей арифметической прогрессии по формуле:

$$q_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)} \text{ при } \sum_{i=1}^n q_i = 1, \quad (10.1)$$

где n – общее число факторов;

i – место, занимаемое фактором при ранжировании.

Например, при $n=5$ веса факторов соответственно равны:

$$q_1 = \frac{2(5-1+1)}{5(5+1)} = 0,33; q_2 = \frac{2(5-2+1)}{5(5+1)} = 0,27; q_3 = \frac{2(5-3+1)}{5(5+1)} = 0,2;$$

$$q_4 = \frac{2(5-4+1)}{5(5+1)} = 0,13; q_5 = \frac{2(5-5+1)}{5(5+1)} = 0,07.$$

Для уточнения оценки, когда она определяется весом, применяется *метод последовательных предпочтений*, учитывающий зависимости значимых факторов. Этот способ сводится к последовательному сравнению фактора, имеющего максимальный вес с суммарным весом всех остальных факторов и соответствующей корректировке весов.

Преимущества априорного ранжирования – простота методов, небольшой объем работ, экономичность, универсальность и оперативность.

Недостатки – определенная субъективность, влияние квалификации экспертов на конечную оценку и т.д. Для получения более объективных данных сравнивают мнения экспертов различных групп [18].

10.2 Метод ранговой корреляции

Наиболее распространен метод ранговой корреляции, суть которого сводится к следующему. Каждый эксперт получает 2 анкеты с n факторами. Форма анкет имеет вид таблицы 1.

Таблица 10.1 – Форма анкеты для проведения ранговой корреляции

Номер анкеты		
Номер фактора	Факторы	Ранги
1		
2		
...		
n		

Задача эксперта состоит в присвоении факторам соответствующих рангов. Для первой анкеты фактору, оказывающему наибольшее влияние на рассматриваемую проблему, присваивается самый высокий ранг 1. Другим факторам соответственно степени их влияния назначаются ранги 2, 3 и т.д. Если эксперт сомневается в предпочтении того или иного фактора, он может повторно использовать один и тот же ранг. Во второй анкете эксперты оценивают размеры инвестиций на реализацию факторов, причем самый высокий ранг присваивается фактору, реализуемому при наименьших затратах.

Методика анализа каждой из анкет идентична. Оценки, полученные в результате опроса экспертов, число которых равно m , сводятся в матрицу рангов (таблица 10.2).

При наличии в оценках эксперта совпавших рангов его оценка преобразуется так, чтобы сумма рангов была равна $n \cdot (n+1)/2$, где n – число рангов. При этом должно сохраняться число повторов рангов по каждому

эксперту и не должна искажаться их точка зрения. Полученные данные записываются в виде преобразованной матрицы рангов, где по каждому фактору рассчитывается их сумма. Наиболее влиятельным будет фактор с наименьшей суммой рангов.

Таблица 10.2 – Экспертная оценка влияния факторов на результирующий показатель

№ эксперта	Факторы						
	1	2	3	4	5	6	7
Исходная матрица							
1	1	3	6	4	7	2	5
2	3	2	5	3	7	1	6
3	1	2	5	6	7	2	4
4	6	1	2	7	4	5	3
5	5	3	6	1	4	2	7
Преобразованная матрица рангов							
1	1	3	6	4	7	2	5
2	3,5	2	5	3,5	7	1	6
3	1	2,5	5	6	7	2,5	4
4	6	1	2	7	4	5	3
5	5	3	6	1	4	2	7
$\sum_{j=1}^m r_j$	16,5	11,5	24	21,5	29	12,5	25
$(\sum_{j=1}^m r_j - \bar{r})^2$	12,25	72,25	16	2,25	81	56,25	25

После этого определяется влияние факторов на выбранное направление, проводится оценка согласованности мнений экспертов (дисперсионный коэффициент конкордации) и ее значимости.

Для оценки согласованности мнений экспертов рассчитывается коэффициент конкордации W по формуле (10.2):

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j}, \quad (10.2)$$

где S – сумма квадратов отклонений рангов по каждому фактору от средней, определяемая по формуле (10.3):

$$S = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^m r_j - \bar{r})^2, \quad (10.3)$$

где T_j – показатель связанных рангов, определяемый по формуле (10.4):

$$T_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k), \quad (10.4)$$

где H_j – число групп равных рангов в j -й ранжировке;
 h_k – число равных рангов в k -й группе при ранжировке j -м экспертом.

Если совпадающих рангов нет, то $H_j=0$, $h_k=0$ и, следовательно, $T_j=0$.

Коэффициент конкордации W может изменяться от 0 до 1. При $W=0$ согласованность между экспертными оценками отсутствует, при $W=1$ существует полная согласованность экспертов в оценке факторов.

Для оценки значимости W находится критерий согласия Пирсона χ^2 по формуле (10.5):

$$\chi^2 = \frac{12S}{mn(n+1) - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m T_j}, \quad (10.5)$$

После этого определяется $\chi_{табл}^2$ для $v=n-1$ степеней свободы и 5%-м уровнем значимости (таблица 10.3). Если $\chi^2 > \chi_{табл}^2$, то коэффициент конкордации является значимым и с вероятностью более 95% можно утверждать о наличии определенной согласованности в оценке представленных факторов.

Таблица 10.3 – Значения критерия χ^2 при различных степенях свободы v

v	P	v	P
	0,05		0,05
1	3,84	6	12,59
2	5,99	7	14,07
3	7,82	8	15,51
4	9,49	9	16,92
5	11,07	10	18,31

После оценки согласованности экспертов рассчитываются следующие показатели:

1. Коэффициенты значимости факторов R_j (таблица 10.4):

$$R_j = \frac{2r_{cp}^{(1)} - r_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^n r_j^{(1)}} \cdot 100\%, \quad (10.6)$$

где $r_j^{(1)}$ – сумма рангов j -го фактора по результатам анкеты 1;

$r_{cp}^{(1)}$ – средняя оценка факторов, определяемая по формуле:

$$r_{cp}^{(1)} = \frac{\sum_{j=1}^n r_j^{(1)}}{n}, \quad (10.7)$$

Наибольшей значимостью будет обладать тот фактор, у которого рассчитанный коэффициент выше.

2. Затраты средств на реализацию факторов определяются по формуле (10.8):

$$C_j = \frac{r_j^{(2)}}{\sum_{j=1}^n r_j^{(2)}} \cdot 100\%, \quad (10.8)$$

где $r_j^{(2)}$ – сумма рангов j -го фактора по результатам анкеты 2.

Чем выше значение C_j , тем большие затраты необходимы на реализацию фактора.

3. Коэффициент эффективности, определяемый как отношение коэффициента значимости фактора к уровню затрат на его реализацию, определяемый по формуле (10.9):

$$K_j = \frac{R_j}{C_j}, \quad (10.9)$$

где K_j – коэффициент эффективности.

Коэффициент эффективности отражает значимость каждого из фактора на единицу затрат.

Наиболее рациональным направлением повышения конкурентоспособности продукции считается то, у которого данный коэффициент будет максимальным.

Пример использования метода ранговой корреляции.

В рассматриваемом примере (таблица 10.2) из-за совпадения рангов рассчитываются показатели связанных рангов T_j : $T_1=0$, $T_2=(2^3-2)=6$, $T_3=(2^3-2)=6$, $T_4=0$, $T_5=0$.

Для второго случая: $T_1=0$, $T_2=(2^3-2)+(5^3-5)=126$, $T_3=(2^3-2)+(2^3-2)+(2^3-2)=18$, $T_4=0$, $T_5=(2^3-2)+(2^3-2)+(2^3-2)=18$.

Сумма квадратов отклонений рассчитывается следующим образом:

$$S=(20-16,5)^2+(20-11,5)^2+(20-24)^2+(20-21,5)^2+(20-29)^2+(20-12,5)^2+(20-25)^2=265.$$

Коэффициент конкордации W равен:

$$W = \frac{12 \cdot 265}{5^2 \cdot (7^3 - 7) - 5 \cdot (0 + 6 + 6 + 0 + 0)} = \frac{3180}{8340} = 0,38$$

Тогда критерий согласия Пирсона:

$$\chi^2 = \frac{12 \cdot 265}{5 \cdot 7(7+1) - \frac{1}{7-1}(0 + 6 + 6 + 0 + 0)} = \frac{3180}{278} = 11,4.$$

Для числа степеней свободы $\nu=7-1=6$ и 5% уровня значимости $\chi_{табл}^2=12,59$. Так как $12,59 > 11,4$, то с вероятностью более 95 % можно утверждать о существовании определенной согласованности в оценках экспертов. Коэффициент конкордации равен 0,38. Аналогично эти показатели рассчитываются для данных таблицы 10.4, в которой приведена оценка затрат на реализацию факторов. По данным таблиц 10.2 и 10.4 проводится расчет коэффициентов эффективности. Результаты сводятся в таблицу 10.5.

Таким образом, наиболее важным оказался второй фактор ($R_2=19,45\%$), а наименьших затрат требует пятый ($C_5=6,43\%$) и в то же время его реализация даст наибольший эффект на единицу затрат.

Таблица 10.4 – Экспертная оценка затрат на реализацию факторов

№ эксперта	Факторы						
	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
Исходная матрица							
1	2	6	4	3	1	5	7
2	5	5	2	5	2	5	5
3	3	4	2	2	4	5	5
4	5	3	4	2	1	6	7
5	5	2	5	4	1	2	4
Преобразованная матрица рангов							
1	2	6	4	3	1	5	7
2	5	5	1,5	5	1,5	5	5
3	3	4,5	1,5	1,5	4,5	6,5	6,5
4	5	3	4	2	1	6	7
5	6,5	2,5	6,5	4,5	1	2,5	4,5
1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{j=1}^m r_j$	21,5	21	17,5	16	9	25	30
$(\sum_{j=1}^m r_j - \bar{r})^2$	2,25	1	6,25	16	121	25	100

Таблица 10.5 – Расчет коэффициентов эффективности

№ фактора	Коэффициент значимости	Затраты на реализацию фактора	Коэффициент эффективности
1	16,41	15,36	1,07
2	19,45	15	1,30
3	11,85	12,5	0,95
4	13,37	11,43	1,17
5	8,82	6,43	1,37
6	18,85	17,86	1,06
7	11,25	21,42	0,53

10.3 Метод парных сравнений

При исследовании большого числа объектов, использование метода ранговой корреляции затруднительно, т.к. эксперту сложно судить о степени влияния того или иного фактора при их большом количестве. Трудности использования ранжирования можно в определенной степени уменьшить, если предложить экспертам произвести сравнение этих объектов попарно, чтобы установить в каждой паре наиболее важный (значимый) объект.

Экспертам представляется матрица парных сравнений. Выделенные факторы записываются в одной и той же последовательности дважды: по вертикали и горизонтали. Форма матрицы парных сравнений представлена в таблице 10.6.

Каждый эксперт, заполняющий такую матрицу, должен проставить на пересечении строки и столбца для двух сравниваемых факторов оценку x_{ij} . В зависимости от того, является ли фактор i более важным, чем фактор j оценка соответственно может быть равна 1 или 0. Если фактор, находящийся в левом столбце матрицы, предпочтительнее, чем фактор, помещенный в верхней строке, то в клетку, образованную пересечением строки и столбца, ставится 1. Если фактор, находящийся в верхней строке матрицы, предпочтительнее, чем фактор в левом столбце, то в клетку ставится 0.

Таблица 10.6 – Матрица парных сравнений

	Φ_1	Φ_2	...	Φ_j	...	Φ_n
Φ_1	—	x_{12}		x_{1j}		x_{1n}
Φ_2	x_{21}	—		x_{2j}		x_{2n}
...						
Φ_i	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{in}
...						
Φ_n	x_{n1}	x_{n2}		x_{nj}		—

В процедуре парного сравнения участвует несколько экспертов, поэтому сначала каждый из них заполняет матрицу парных сравнений, а затем полученные индивидуальные предпочтения суммируются с учетом мнений всех экспертов. На основе результатов этого суммирования строится вторая матрица, показывающая процентное отношение случаев p_{ij} , когда фактор i оказывался более значимым, чем фактор j в общем объеме полученных оценок (таблица 10.7). Элементы матрицы p_{ij} определяются как отношение суммы оценок x_{ji} для каждой пары сравниваемых факторов, к количеству этих оценок (т.е. количеству экспертов, принимавших участие в исследовании), при этом $p_{ij} + p_{ji} = 1$.

Таблица 10.7 – Доля случаев, когда фактор i предпочтительнее фактора j

Фактор i	Фактор j						Сумма ряда
	Φ_1	Φ_2	...	Φ_j	...	Φ_n	
Φ_1	—	p_{12}		p_{1j}		p_{1n}	p_1
Φ_2	p_{21}	—		p_{2j}		p_{2n}	p_2
...							
Φ_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{in}	p_i
...							
Φ_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nj}		—	p_n

После получения обобщенной матрицы предпочтений, элементы которой p_{ij} представляют относительное число предпочтений, полученных от всех экспертов по каждой паре факторов производится их ранжирование, которое основано на законе сравнительных суждений. Суть этого закона заключается в том, что если парное сравнение факторов производится относительно большим числом экспертов, то полученные разности между их оценками обладают нормальным распределением. Пусть m экспертов приписывают n признакам числа S_j в соответствии со степенью обладания ими каким-то качеством. Тогда числа S_j представляют собой оценки признаков, по которым их можно

проранжировать, а разность между такими оценками двух исследуемых объектов можно выразить с помощью модели шкалы:

$$S_i - S_j = z_{ij}, \quad (10.10)$$

где S_i, S_j – оценки факторов;

z_{ij} – нормированное отклонение, соответствующее p_{ij} , представляющему долю случаев предпочтения фактора i фактору j , т.е.:

$$G(z_{ij}) = p_{ij} = \int_{-\infty}^{z_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (10.11)$$

Взаимоотношение между z_{ij} и p_{ij} иллюстрирует рисунок 10.1, где заштрихованная площадь под кривой показывает относительное число предпочтений фактора i фактору j , когда z_{ij} измеряется в единицах стандартного отклонения. При этом допускается, что площадь под кривой нормированного нормального распределения от -3σ до $+3\sigma$ равна единице.



Рисунок 10.1 – Соотношение между p_{ij} и z_{ij}

В действительности реальные оценки p_{ij} отличаются от ожидаемого ряда z_{ij} . Поэтому задача заключается в нахождении множества оценок, для которых это расхождение будет минимальным.

Таким образом, процедура построения шкальных оценок состоит в том, чтобы обратить наблюдаемые отношения p_{ij} в ожидаемые z_{ij} по уравнению (10.11), используя таблицу нормированного нормального распределения (таблица 10.8). Эти z_{ij} составляют матрицу основного преобразования (таблица 10.9), в которой каждая оценка z_{ij} – это различие между параметром i и параметром j в стандартных

отклонениях, причем сумма этих оценок $z_i = \sum_{j=1}^n z_{ij}$, а среднее значение $\bar{z}_i = \frac{\sum_{j=1}^n z_{ij}}{n}$,

где n – число факторов.

Таблица 10.8 – Квантили нормированного нормального распределения

p	z	p	z	p	z	p	z	p	z
0,5	0	0,6	0,253347	0,7	0,524401	0,8	0,841621	0,9	1,281551
0,51	0,025069	0,61	0,279319	0,71	0,553384	0,81	0,877897	0,91	1,340754
0,52	0,050154	0,62	0,305481	0,72	0,582841	0,82	0,915365	0,92	1,405074
0,53	0,07527	0,63	0,331854	0,73	0,612813	0,83	0,954165	0,93	1,475792
0,54	0,100433	0,64	0,358459	0,74	0,643345	0,84	0,994457	0,94	1,554772
0,55	0,125661	0,65	0,385321	0,75	0,67449	0,85	1,036433	0,95	1,644853
0,56	0,150969	0,66	0,412463	0,76	0,706302	0,86	1,080321	0,96	1,750686
0,57	0,176374	0,67	0,439913	0,77	0,738846	0,87	1,126391	0,97	1,88079
0,58	0,201894	0,68	0,467699	0,78	0,772193	0,88	1,174988	0,98	2,053748
0,59	0,227545	0,69	0,49585	0,79	0,806422	0,89	1,226529	0,99	2,326342

* При нахождении квантилей для значений $p < 0,5$ следует воспользоваться соотношением $z_p = -z_{1-p}$.

Таблица 10.9 – Матрица основного преобразования (различий)

Фактор i	Фактор j						Всего	Среднее значение
	1	2	...	j	...	n		
1	—	z_{12}		z_{1j}		z_{1n}	z_1	$\bar{z}_1$
2	z_{21}	—		z_{2j}		z_{2n}	z_2	$\bar{z}_2$
...								
i	z_{i1}	z_{i2}		z_{ij}		z_{in}	z_i	$\bar{z}_i$
...								
n	z_{n1}	z_{n2}		z_{nj}		—	z_n	$\bar{z}_n$

Если любое z_{ij} оказывается большим, чем +2,0, или же меньшим, чем -2,0, оно отвергается как нестабильное. Если ни одна из оценок z_{ij} не будет отвергнута на основании этого правила, то итоговую оценку фактора i можно определить обратным преобразованием среднего значения нормированного отклонения $\bar{z}_i$ в p_i по таблице 10.11.

Таблица 10.11 – Значение функции нормированного нормального распределения

x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)
0	0,5	0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,88686	1,61	0,946301
0,03	0,511967	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802338	1,25	0,89435	1,65	0,950529
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,903199	1,7	0,955435
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914656	1,77	0,961636

0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843

Окончание таблицы 10.11

x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)	x	G(x)
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971284
0,31	0,621719	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,878999	1,57	0,941792	1,97	0,975581
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705

* При определении $G(x)$ при $x < 0$ используется свойство четности функции, т.е. $G(-x) = G(x)$.

Пример использования метода парных сравнений при анализе влияния факторов на исследуемый показатель.

Экспертам ($m=10$) было предложено ранжировать четыре фактора ($\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$) в порядке их влияния на исследуемый объект. В результате опроса были получены 10 анкет, в которых каждый из экспертов провел попарное сравнение факторов между собой. После обработки полученных анкет была составлена таблица, отражающая количество случаев предпочтения одного фактора перед другим.

1. Число случаев, когда фактор i определялся как более важный, чем фактор j .

Фактор i	Фактор j			
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
Φ_1	-	4	4	8
Φ_2	6	-	7	7
Φ_3	6	3	-	9
Φ_4	2	3	1	-

На основании этих данных составляется таблица, элементы которой представляют собой процентное отношение случаев, когда фактор i оказывался более значимым, чем фактор j и рассчитываются как отношение суммы оценок x_{ji} для каждой пары сравниваемых факторов (см. таблицу выше), к количеству экспертов.

2. Доля случаев, когда фактор i определялся как более важный, чем j .

Фактор i	Фактор j				Сумма
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	
Φ_1	-	0,4	0,4	0,8	1,6
Φ_2	0,6	-	0,7	0,7	2
Φ_3	0,6	0,3	-	0,9	1,8
Φ_4	0,2	0,3	0,1	-	0,6

Далее, определяются значения нормированного стандартного отклонения по рассчитанным p_{ij} (для этого используется таблица 10.8, в которой по

известному значению p_{ij} определяется z_{ij}), а также их сумма и среднее значение по каждой строке.

3. Матрица основного преобразования.

Фактор i	Фактор j				Всего	Средняя
	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4		
Φ_1	0	-0,25334	-0,25334	0,84161	0,33493	0,08373
Φ_2	0,25334	0	0,52441	0,52441	1,30216	0,32554
Φ_3	0,25334	-0,52441	-	1,28155	1,01048	0,25262
Φ_4	-0,84161	-0,52441	0,1	-	-2,64757	-0,66189

По средним значениям $\bar{z}_i$ по таблице 10.11 определяются расчетные значения p_i , которые и определяют итоговую оценку для каждого фактора.

4. Расчет показателей относительной важности.

Параметр i	$\bar{z}_i$	$P(\bar{z}_i)$	Нормированная относительная важность
1	0,08373	0,53336	0,2647
2	0,32554	0,62761	0,3115
3	0,25262	0,59972	0,2977
4	-0,66189	0,25403	0,1261

Наибольшим влиянием на исследуемый показатель оказывает фактор, имеющий наибольшую относительную важность, которая определяется как отношение $P(\bar{z}_i)$ к сумме $\sum_{i=1}^n P(\bar{z}_i)$.

Можно проверить полученные результаты на непротиворечивость: процедуру проверки необходимо начинать с итоговой ценностной шкалы и проводить расчеты в обратном порядке. С этой целью разности, выраженные в форме $(\bar{z}_i - \bar{z}_j)$, преобразовываются в $P(\bar{z}_i - \bar{z}_j)$ с помощью показателей таблиц нормального распределения, т.е. в процентное соотношение числа случаев, в которых параметр i теоретически был определен как более важный, чем параметр j .

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = 0,08373 - 0,32554 = -0,24181; P_{12} = 0,40447;$$

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_3 = 0,08373 - 0,25262 = -0,16889; P_{13} = 0,43295;$$

$$\bar{z}_1 - \bar{z}_4 = 0,08373 - (-0,66189) = 0,74562; P_{14} = 0,77205;$$

$$\bar{z}_2 - \bar{z}_3 = 0,32554 - 0,25262 = 0,07292; P_{23} = 0,52906;$$

$$\bar{z}_2 - \bar{z}_4 = 0,32554 - (-0,66189) = 0,98743; P_{24} = 0,838284;$$

$$\bar{z}_3 - \bar{z}_4 = 0,25262 - (-0,66189) = 0,91451; P_{34} = 0,81977.$$

Различие между расчетным процентным соотношением числа случаев P_{ij} , в которых параметр i определялся как более важный, чем параметр j , и фактическим числом случаев полученных от экспертов обозначается через Δ_{ij} .

Расчет отклонений Δ_{ij} :

$$\Delta_{12} = P_{12} - p_{12} = 0.40447 - 0.4 = 0.00447,$$

$$\Delta_{13} = 0.43295 - 0.4 = 0.03295,$$

$$\Delta_{14} = 0.77205 - 0.8 = -0.02795,$$

$$\Delta_{23} = 0.52906 - 0.7 = -0.17094,$$

$$\Delta_{24} = 0.83828 - 0.7 = 0.13828,$$

$$\Delta_{34} = 0.81977 - 0.9 = -0.08023,$$

$$\sum |\Delta_{ij}| = 0.45482,$$

$$\text{Среднее линейное отклонение } \frac{\sum |\Delta_{ij}|}{N} = \frac{0.45482}{6} = 0.0758.$$

Наибольшее по абсолютной величине расхождение равнялось 0,17094, что меньше, чем три средних отклонения, что свидетельствует о надежности данных. В противном случае, экспертную оценку необходимо проводить заново, пересмотрев формулировку цели исследования или пересмотрев состав группы экспертов [18].

Тема 11. Основные понятия теории игр

11.1 Основные понятия и определения модели теории игр

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

Игроки – стороны, участвующие в подобной ситуации.

Стратегии – возможные действия игроков.

Если один из игроков не является сознательно действующим противником, то его называют «природа», а игры – «игры с природой» (статистические игры).

Классификация игр

1 В зависимости от количества игроков:

- игры с бесконечным числом игроков;
- игры с конечным числом игроков.

2 По количеству стратегий:

– конечные игры – все игроки имеют конечное число возможных стратегий (орел и решка). В таком случае сами стратегии называются чистыми стратегиями.

– бесконечные игры – хотя бы 1 игрок имеет бесконечное количество возможных стратегий. Например, продавец – покупатель, каждый из этих игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого и покупаемого товара.

3 По характеру взаимодействия:

– кооперативные – игроки до начала игры образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях (образование коалиций и групп в парламенте);

– некооперативные – игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции.

4 По свойствам функции выигрыша:

– игры с нулевой суммой (антагонистические игры) – выигрыш 1 игрока = проигрышу другого (карточные игры, орел-решка)

– игры с постоянной разностью – игроки выигрывают и проигрывают одновременно, поэтому им выгодно действовать сообща. Противоположность играм с нулевой суммой.

– игры с ненулевой суммой – имеют место и конфликты и согласованные действия.

5 По виду функций выигрыша:

– матричная игра – конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям). Любая матричная игра имеет решение, и оно может быть найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

– биматричная игра – конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для

соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2).

– непрерывная игра – игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Игры этого класса имеют решения, но не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

– выпуклая игра – функция выигрышей является выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей:

	B_1	B_2	...	B_j
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}
...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}

где A_i – названия стратегий игрока А;

B_j – названия стратегий игрока В;

a_{ij} – значения выигрышей игрока А при выборе им i -й стратегии, а игроком В – j -й стратегии.

Алгоритм решения задачи теории игр состоит из 2 этапов:

Этап 1. Поиск решения в чистых стратегиях.

Этап 2. Поиск решения в смешанных стратегиях.

11.2 Решение матричных игр в чистых стратегиях

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока А необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, т.е. определить $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ – *нижнюю чистую цену игры*. Ей соответствует *максиминная стратегия*, придерживаясь которой игрок А при любых стратегиях противника обеспечит себе гарантированный выигрыш, не меньший α .

Затем находится *верхняя чистая цена игры* $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$, соответствующая *минимаксной стратегии* игрока В, придерживаясь которой игрок В при любых стратегиях противника обеспечит себе проигрыш, не больший β .

Если $\alpha = \beta = v$, то проект устойчив и игра имеет решение в чистых стратегиях, а стратегия, в которых достигается v – *оптимальная чистая стратегия*. v – *чистая цена игры*.

Если $\alpha \neq \beta$, то выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым.

Пример. Завод производит различные детали из чугуна. Спрос на детали в течение месяца может составлять 6, 7, 8 или 9 тыс. деталей. Завод продает партию деталей (1000 шт.) по цене 95 ден.ед. Затраты на производство одной партии деталей равны 45 ден.ед. Если партия не продается в течение месяца, то завод не получает дохода. Определить, сколько партий деталей следует производить в течение месяца. Разработать предложения, опираясь на рекомендации математической теории игр.

В данном случае спрос безразличен к результатам действия производителя. Это типичная статистическая игра. Доход производителя от одной партии: $95 - 45 = 50$ ден.ед.

Необходимо построить матрицу, описывающую всевозможные ситуации, которые могут произойти с доходом производителя:

Спрос, шт. Производство, шт.	6	7	8	9	Min _j
6	300	300	300	300	<u>300</u>
7	255	350	350	350	255
8	210	305	400	400	210
9	165	260	355	450	165
Max _i	<u>300</u>	350	400	450	

В клетках записывается доход производителя по каждому из вариантов. Определяем Min_j и $\text{Max}_i = 300$, $\text{Max}_i = 300$.

То есть $A = B$. Это значит, что игра имеет седловую точку в чистой стратегии. При таком раскладе, согласно теории игр, следует выбрать объем реализации, соответствующий чистой стратегии производителя – 6 партий.

Уменьшение порядка платёжной матрицы в играх.

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий.

Стратегия K называется *доминируемой* стратегией K^* , если при любом варианте поведения противодействующего игрока $A_k < A_{k^*}$, где A_k и A_{k^*} – значения выигрышей при выборе игроком, соответственно, стратегий K и K^* .

Если $A_k = A_{k^*}$, то стратегия K *дублирующая* по отношению к стратегии K^* .

Пример. Дана платёжная матрица вида:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	1	2	3	4	4	7
A_2	7	6	5	4	4	8
A_3	1	8	2	3	3	6
A_4	8	1	3	2	2	5

Стратегия A_1 является доминируемой по отношению к стратегии A_2 .

Стратегия B_6 является доминируемой по отношению к стратегиям B_3 , B_4 и B_5 .

Стратегия B_5 является дублирующей по отношению к стратегии B_4 .

Данные стратегии не будут выбраны игроками, т.к. являются заведомо проигрышными и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется также *множеством Парето* (по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, занимавшегося исследованиями в данной области).

11.3 Смешанные стратегии в матричных играх

Смешанная стратегия игрока – полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий – *игра со смешанным расширением*.

Стратегии, применённые с вероятностью $\neq 0$ – *активные стратегии*.

Для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры: $\alpha \leq v \leq \beta$. При этом условии величина v – *цена игры*.

Если 1 из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры v , независимо от того, каких стратегий придерживается другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий. Поэтому, для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Решение матричной игры со смешанным расширением – это определение оптимальных смешанных стратегий, то есть нахождение таких значений вероятностей выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых они достигают наибольшего выигрыша.

Решение задач теории игр в смешанных стратегиях основано на сведении формулировки задачи к постановке задачи линейного программирования.

Обозначим p_i – вероятность выбора i -ой стратегии игроком А, q_j – вероятность выбора j -ой стратегии игроком В. Тогда оптимальные значения вероятностей p_i игрока А могут быть определены путем решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} F = v &\rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i &\geq v, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^m p_i &= 1 \\ p_i &\geq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{aligned}$$

Обозначим $x_i = \frac{p_i}{v}$ ($i = \overline{1, m}$) и, разделив неравенство $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v$ на v , получим

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{p_i}{v} = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$f = \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m \frac{p_i}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1}{v}.$$

Так как $\max F = \min \frac{1}{F} = \min f$, для игрока А имеем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^m x_i \rightarrow \min \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Для оптимального решения X^* выполняется:

$$v = \frac{1}{f_{\min}}; \quad p_i^* = x_i^* v, \quad i = \overline{1, m}$$

Поиск оптимальных значений вероятностей q_j игрока В сводится к решению следующей задачи.

$$\begin{aligned} f &= v \rightarrow \min; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j &\leq v, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{j=1}^n q_j &= 1; \\ q_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Принимая новые обозначения $y_j = \frac{q_j}{v}$ ($j = \overline{1, n}$) и поступая аналогично описанному выше, для игрока В имеем следующую задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{j=1}^n y_j \rightarrow \max \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m}; \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Для оптимального решения Y^* выполняется:

$$v = \frac{1}{F_{\max}}; \quad q_j^* = y_j^* v, \quad j = \overline{1, n}$$

Пример. Предприятие имеет возможность планировать объем выпуска сезонной продукции А, Б, В. Непроданная в течение сезона часть продукции позднее полностью реализуется по сниженным ценам. Все необходимые данные приведены в таблице. Установить объемы выпуска продукции к предстоящему сезону, обеспечивающие предприятию возможно большую сумму прибыли.

Вид продукции	Себестои- мость единицы продукции	Отпускная цена единицы продукции		Объем реализации (тыс. ед.), если уровень спроса		
		в течении сезона	после уценки	повышенн ый	средний	пониженн ый
А	2	3	1,5	5	3	1
Б	5	6	4,5	7	4	2
В	3	4	2,5	6	5	3

Для составления платежной матрицы, построим платежные матрицы по каждому товару отдельно и сложим в одну общую. Составим матрицу для товара А:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Стратегий у предприятия 3: ориентироваться на повышенный спрос, средний и пониженный. Рассчитаем коэффициенты матрицы:

a_{11} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на повышенный спрос, полностью продав продукцию по цене в течение сезона:
 $a_{11} = 5 * (3 - 2) = 5$ тыс.ден.ед.

a_{12} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на средний спрос, продав часть продукции по цене в течение сезона, а остальную по заниженной:

$$a_{12} = 3 * (3 - 2) + (5 - 3) * (1,5 - 2) = 3 - 1 = 2 \text{ тыс.ден.ед.}$$

a_{13} – предприятие ориентировалось на повышенный спрос и попало на низкий спрос, продав часть продукции по цене в течение сезона, а остальную по заниженной:

$$a_{12} = 1 * (3 - 2) + (5 - 1) * (1,5 - 2) = 1 - 2 = -1 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{21} = 3 * (3 - 2) = 3 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{22} = 3 * (3 - 2) = 3 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{23} = 1 * (3 - 2) + (3 - 1) * (1,5 - 2) = 1 - 1 = 0 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{31} = 1 * (3 - 2) = 1 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{32} = 1 * (3 - 2) = 1 \text{ тыс.ден.ед.}$$

$$a_{33} = 1 * (3 - 2) = 1 \text{ тыс.ден.ед.}$$

Остальные расчеты сведем в таблицу:

	Ориентация на повышенный, а попали на			Ориентация на средний, а попали на			Ориентация на пониженный, а попали на		
	повышенный	средний	пониженный	повышенный	средний	пониженный	повышенный	средний	пониженный
А	5	2	-1,0	3	3	0	1	1	1
Б	7	2,5	-0,5	4	4	1	2	2	2
В	6	4,5	1,5	5	5	2	3	3	3
сумма	18	9	0	12	12	3	6	6	6

Матрицы для товаров А, Б, В:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 2,5 & -0,5 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4,5 & 1,5 \\ 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 18 & 9 & 0 \\ 12 & 12 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

	B ₁	B ₂	B ₃	Min _j
A ₁	18	9	0	0
A ₂	12	12	3	3
A ₃	6	6	6	6
Max _i	18	12	6	

$$\alpha = 6, \beta = 6$$

Есть решение в чистых стратегиях – полностью ориентироваться на низкий спрос.

Решение, как для смешанной стратегии (вероятность должна для $p_3 = 1$).

Общая задача линейного программирования для одного из игроков и ее решение:

$$\begin{aligned} F = v &\rightarrow \max \\ 18p_1 + 12p_2 + 6p_3 &\geq V \\ 9p_1 + 12p_2 + 6p_3 &\geq V \\ 3p_2 + 6p_3 &\geq V \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ p_1, p_2, p_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ответы: $p_1 = 0$; $p_2 = 0$; $p_3 = 1$; $V = 6$.

Задача линейного программирования в симметричной форме записи для одного из предприятий и ее решение:

$$\begin{aligned} F = x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\ 18x_1 + 12x_2 + 6x_3 &\geq 1 \\ 9x_1 + 12x_2 + 6x_3 &\geq 1 \\ 3x_2 + 6x_3 &\geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ответы: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0,17$; $f = 0,17$

Проверка: $v = 1/f = 1/0,17 = 6$

$$p_1 = x_1 \cdot v = 0, \quad p_2 = x_2 \cdot v = 0, \quad p_3 = x_3 \cdot v = 1$$

11.4 Критерии выбора наилучшей стратегии

При выборе наилучших стратегий различают 2 ситуации:

1 Ситуацию, в которой вероятные состояния природы неизвестны, т.е. принятие решения в условиях неопределенности

2 Ситуацию, в которой вероятности состояния природы известны, т.е. речь идет о принятии решения в условиях риска.

Для каждой ситуации существуют свои критерии выбора наилучших решений.

Критерии выбора наилучшей стратегии в условиях неопределенности

1 Критерий Вальда (максиминный критерий, ММ-критерий). Основан на принципе крайнего пессимизма. Принимающий решение считает, что какую бы стратегию он ни выбрал, природа реализует свое наихудшее состояние. В наихудших условиях лицо принимающее решение (ЛПР) находит наилучший выход. Таким образом, ЛПР для каждой стратегии A_i находит наименьший выигрыш $a_i = \min a_{ij}$. Затем среди наименьших выигрышей находит наибольший $a_{i0} = \max_i a_i = \max_i \min_j a_{ij}$

Стратегия A_{i0} , соответствующая a_{i0} , будет наилучшей по Вальду.

Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск, т.е. ЛПР не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать критерий Вальда одним из фундаментальных.

Применение критерия Вальда оправдано, если:

1) о возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно;

2) решение реализуется только один раз;

3) необходимо исключить какой бы то ни было риск.

2 Критерий Сэвиджа. Основан на принципе минимизации максимального риска.

Риск ЛПР r_{ij} – выигрыш, который бы он получил, если бы знал, какое состояние реализует природа, и его реальный выигрыш.

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

Матрица риска R имеет вид

	Π_1	Π_2	...	Π_j
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1j}
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2j}
...	...	...	...	...
A_i	r_{i1}	r_{i2}	...	r_{ij}

ЛПР для каждой стратегии A_i находят максимальный риск r_i : $r_i = \max_j r_{ij}$

Затем из максимальных рисков выбирается минимальный:

$$r_{i0} = \min_i r_i = \min_i \max_j r_{ij}$$

Стратегия A_{i0} , соответствующая минимальному из максимальных рисков r_{i0} , будет наилучшей по Сэвиджу.

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична ситуации критерия Вальда, но наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

3 Критерий Гурвица (критерий оптимизма-пессимизма). Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Данный коэффициент определяется на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта принятия решений в схожих ситуациях.

Наилучшей по Гурвицу является стратегия A_{i0} , соответствующая числу a_{i0} , которое рассчитывается как: $a_{i0} = \max a_i$

$$a_i = \gamma \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \gamma) \cdot \max_j a_{ij}$$

γ – коэффициент пессимизма, $0 \leq \gamma \leq 1$. При $\gamma = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\gamma = 1$ – критерий пессимизма Вальда.

Критерий Гурвица применяется, когда:

- 1) информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна;
- 2) необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды;
- 3) реализуется только малое количество решений;
- 4) допускается некоторый риск.

4 Критерий недостаточного основания Лапласа. Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии ЛПР в платёжной матрице определяется как:

$$W_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n}$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$W = \max W_i.$$

Использование данного критерия оправдано, если:

- 1) ЛПР не имеет информации, либо имеет неполную информацию о вероятностях состояний окружающей среды;
- 2) вероятности состояний окружающей среды близки по своим значениям;
- 3) минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Критерии выбора наилучшей стратегии в условиях риска

В этой ситуации известны вероятности, с которыми реализуются состояния природы p_j , которые рассчитываются на основе статистических данных или определяются экспертным путем. Для принятия решения в условиях риска используется **критерий Байеса** (критерий максимального математического ожидания выигрыша).

Для каждой стратегии A_i рассчитывается ожидаемый выигрыш $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$

Наилучшей по Байесу, будет стратегия A_i , соответствующая наибольшему ожидаемому выигрышу: $\bar{a}_{i_0} = \max \bar{a}_i = \max \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$

Применять критерия Байеса, следует если:

1. ЛПР известны вероятности всех состояний окружающей среды;
2. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Тема 12. Модели теории массового обслуживания

12.1 Основные понятия теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) – это область прикладной математики, занимающаяся анализом проблемы обслуживания массового потока требований случайного характера (случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание). В качестве примеров таких систем выступают: работа телефонных станций, ремонт механизмов, транспортное, медицинское и туристическое обслуживание, обслуживание покупателей, переработка и передачи информации; автоматические линии производства и др.

Предмет ТМО – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы (число каналов, их производительность, характер потока заявок) с показателями эффективности функционирования с целью нахождения наилучших вариантов управления этими системами.

Основная задача ТМО – изучение режима функционирования обслуживающей системы и исследование явлений, возникающих в процессе обслуживания. Так, одной из характеристик обслуживающей системы является время пребывания требования в очереди. Очевидно, что это время можно сократить за счет увеличения количества обслуживающих устройств, однако каждое дополнительное устройство требует определенных материальных затрат, при этом увеличивается время бездействия обслуживающего устройства из-за отсутствия требований на обслуживание, что также является негативным явлением. Следовательно, в ТМО возникают задачи оптимизации: каким образом достичь определенного уровня обслуживания (максимального сокращения очереди или потерь требований) при минимальных затратах, связанных с простоем обслуживающих устройств.

ТМО опирается на теорию вероятностей и (в меньшей степени) на математическую статистику.

Первые задачи ТМО были рассмотрены сотрудником Копенгагенской телефонной компании, ученым Агнером Эрлангом, в период между 1908 и 1922 годами. В своих работах он дал четкую математическую формулировку проблемы очередей, возникающих в сетях связи из-за того, что количество телефонных каналов по причинам экономического характера всегда существенно меньше числа установленных телефонов. Эрланг преследовал практическую цель – предложить методику расчета числа каналов, достаточного для обслуживания всех подключенных к сети телефонных аппаратов с малой вероятностью потери вызова. Направление, которое развивал датчанин, называется сегодня теорией телетрафика. Именно с работ Эрланга началось проникновение в электросвязь широко используемых в настоящее время статистических методов исследования.

ТМО привлекла внимание в начале 30-х годов и А.Я. Хинчина, который развил «метод вложенных цепей Маркова». Этот метод давал возможность нахождения распределения времени ожидания для случая простейшего потока вызовов, поступающих на один прибор, который обслуживает очередь с

произвольным распределением времени обслуживания. Хинчин также предложил термин «ТМО», хотя в зарубежной литературе чаще используется понятие «теория очередей».

Система массового обслуживания (СМО) – это совокупность обслуживающей и обслуживаемой систем. На производстве в качестве обслуживающей и обслуживаемой систем могут находиться отдельные цехи или подразделения одного и того же цеха. Основное производство, непрерывно посылающее запросы на инструменты, перевозку грузов, ремонт оборудования, контроль изделий и другие работы, является обслуживаемой системой, а цеховые службы и вспомогательные хозяйства, удовлетворяющие запросы основного производства, – обслуживающими. Совокупность основного производства и каждого из вспомогательных подразделений можно рассматривать как СМО.

Каждая СМО состоит из одного или нескольких обслуживающих устройств, которые называются *каналами обслуживания* (рабочие точки, кассиры, продавцы, телефонные линии связи). Обслуживание требований происходит за неизвестное, обычно также случайное время и зависит от множества самых разнообразных факторов. После обслуживания заявки канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока требований и времени их обслуживания приводит к неравномерности загрузки СМО, перегрузке с образованием очередей заявок или недогрузке с простаиванием каналов. Таким образом, к *элементам СМО* (рисунок 12.1) относятся:

1. *входящий поток заявок*. Заявка (требование, клиент) – это каждый отдельный запрос на выполнение какой-либо работы. Так, если в цехе остановился станок, возникло требование на ремонт оборудования, закончена обработка детали – требование на ее приемку контролером, необходимо установить крупную деталь на рабочее место – требование на выполнение подъемно-транспортной операции. Зачастую требование и его носителя отождествляют, что обычно не приводит к недоразумениям. Если обслуживаемую систему можно подразделить на отдельные элементы, каждый из которых в любой отдельный момент может дослать только 1 требование, то такой элемент называют *источником требований*. Так, каждый станок в цехе является источником требований для обслуживающей бригады наладчиков. Входящий поток характеризуется *интенсивностью* λ , т.е. средним числом событий, поступающих в СМО в единицу времени.

2. *очередь*,

3. *поток необслуженных (покинувших очередь) заявок*,

4. *каналы обслуживания*,

5. *выходящий поток обслуженных заявок*, который характеризуется интенсивностью обслуживания требований одним каналом при непрерывной его работе (μ) или средней продолжительностью обслуживания ($t_{обсл}$).

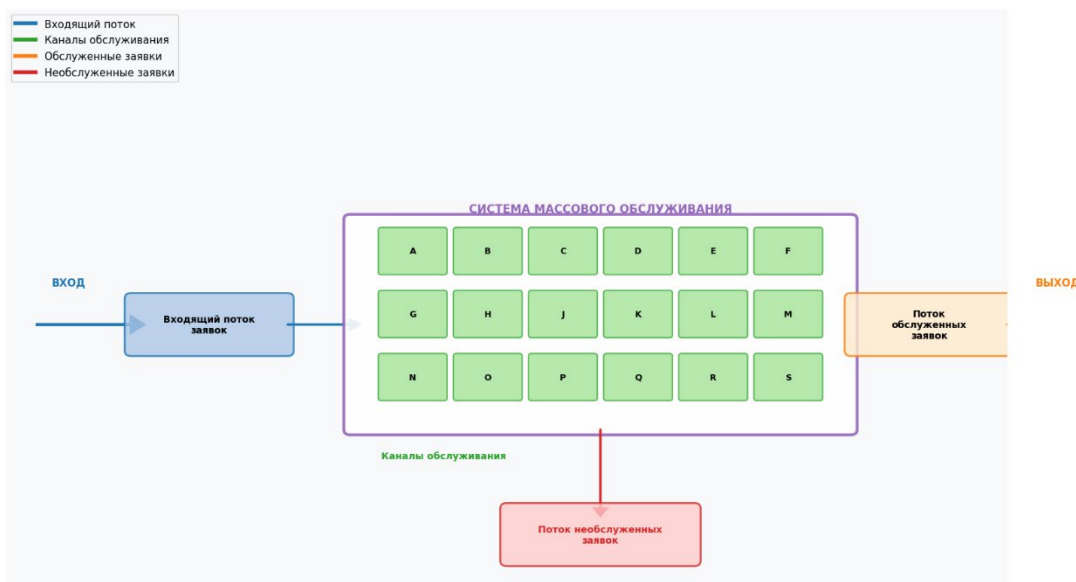


Рисунок 12.1 – Основные элементы СМО

Время обслуживания – период, в течение которого удовлетворяется требование на обслуживание, т.е. период от начала обслуживания и до его завершения.

Время ожидания обслуживания – период от момента поступления требования в систему до начала обслуживания.

Время пребывания требования в системе – время ожидания обслуживания + время обслуживания.

Случайность характера потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО случайный процесс, для изучения которого необходимы построение и анализ его математической модели.

Любое исследование СМО начинается с изучения входящего потока заявок и его характеристик.

Поток заявок – последовательность заявок, наступающих одна за другой в заранее неизвестные, случайные моменты времени (поток вызовов на телефонной станции, поток покупателей). Поведение системы в основном определяется сразу несколькими потоками заявок. Например, обслуживание покупателей в магазине определяется потоком покупателей и потоком обслуживания. В таких потоках случайными являются моменты появления покупателей, время ожидания в очереди и время, затрачиваемое на обслуживание каждого покупателя. Основная характерная черта потоков – это вероятностное распределение времени между соседними заявками.

Существуют различные потоки, отличающиеся своими характеристиками. Рассмотрим СМО, в которых все потоки, переводящие ее из одного состояния в другое, являются простейшими. Такие СМО называются *марковскими*.

Простейший (или пуассоновский) поток – поток, который обладает 3 основными свойствами:

1. Ординарность. Поток требований называется ординарным, если вероятность попадания на очень малый отрезок времени сразу 2 или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания только 1 события. В ординарном потоке события происходят поодиночке, а не 2 или более

одновременно. Примерами ординарных потоков являются поток требований на наладку станков, поток самолетов, приземляющихся на аэродроме, поток вызовов, поступающих на АТС. Неординарные потоки встречаются на практике реже, чем ординарные. Примером неординарного потока событий может быть поток пассажиров, прибывающих в лифте на данный этаж.

2. Стационарность. Стационарный поток требований – поток, вероятностные характеристики которого не изменяются со временем. Интенсивность такого потока – среднее число событий в единицу времени и остается величиной постоянной. На практике потоки могут считаться стационарными только на некотором ограниченном промежутке времени. Обычно поток покупателей, например в магазине, существенно меняется в течение рабочего дня. Однако можно выделить определенные временные интервалы, внутри которых этот поток допустимо рассматривать как стационарный, имеющий постоянную интенсивность.

3. Отсутствие последствий. Поток без последствия – поток, в котором число событий, попадающих на произвольно выбранный промежуток времени, не зависит от числа событий, попавших на другой, также произвольно выбранный промежуток, при условии, что эти промежутки не пересекаются. В потоке без последствия события появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга. Например, поток покупателей магазина можно считать потоком без последствия, потому что причины, обусловившие приход каждого из них, не связаны с аналогичными причинами для других покупателей.

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется закону Пуассона, т.е. вероятность поступления k требований за время t задается формулой (12.1):

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (12.1)$$

Длительность обслуживания заявок также является случайной величиной и подчиняется экспоненциальному (показательному) закону распределения. Вероятность того, что время обслуживания не превосходит некоторой величины t , определяется формулой:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad (12.2)$$

где μ – интенсивность обслуживания одного требования одним обслуживающим устройством, которая определяется из соотношения (12.3):

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}}, \quad (12.3)$$

Пуассоновские потоки позволяют легко описать и построить математическую модель СМО. Данные модели имеют достаточно простые решения. Но на практике условия простейшего потока не всегда строго выполняются. Часто имеет место нестационарность процесса (в различные часы

дня и различные дни месяца поток требований может меняться, он может быть интенсивнее утром или в последние дни месяца). Существует также наличие последствия, когда количество требований на отпуск товаров в конце месяца зависит от их удовлетворения в начале месяца. Наблюдается и явление неоднородности, когда несколько клиентов одновременно пребывают на склад за материалами. Однако в целом пуассоновский закон распределения с достаточно высоким приближением отражает многие процессы массового обслуживания. Почему такое предположение в ряде важных случаев оказывается верным, дает ответ общая теорема А.Я. Хинчина. Эта теорема имеет место в случае, когда входящий поток можно представить в виде суммы большого числа независимых потоков, ни один из которых не является сравнимым по интенсивности со всем суммарным потоком. Приведем «не строгую» формулировку этой теоремы:

Теорема А.Я.Хинчина. Если входящий поток представляет собой сумму большого числа независимых между собой стационарных и ординарных потоков, каждый из которых вносит малый вклад в общую сумму, то при одном дополнительном условии аналитического характера (которое обычно выполняется на практике) поток близок к простейшему.

Применение этой теоремы на практике можно продемонстрировать на следующем примере: поток судов дальнего плавания в данный грузовой порт, связанный со многими портами мира, можно считать близким к простейшему. Это дает право считать поток прибытия судов в порт распределенным согласно процессу Пуассона.

Одной из важнейших характеристик обслуживающих устройств, которая определяет пропускную способность всей системы, является *время обслуживания* одного требования ($t_{обсл}$) – случайная величина, которая может изменяться в большом диапазоне. Она зависит от стабильности работы самих обслуживающих устройств, так и от различных параметров требований, поступающих в систему. Случайная величина $t_{обсл}$ полностью характеризуется законом распределения, который определяется на основе статистических испытаний. На практике чаще всего принимают гипотезу о *показательном законе распределения* времени обслуживания.

Важным параметром СМО является *коэффициент загрузки* ρ , который определяется как отношение интенсивности поступления требований λ к интенсивности обслуживания (формула (12.4)):

$$\mu: \rho = \lambda / \mu, \quad (12.4)$$

Для СМО с ожиданием количество обслуживаемых устройств n должно быть строго больше коэффициента загрузки (требование *установившегося или стационарного режима работы* СМО): $n > \rho$. В противном случае число поступающих требований будет больше суммарной производительности всех обслуживающих устройств, и очередь будет неограниченно расти.

Для СМО с отказами и смешанного типа это условие может быть ослаблено, для эффективной работы этих типов СМО достаточно потребовать,

чтобы минимальное количество обслуживаемых устройств n было не меньше коэффициента загрузки ρ : $n \geq \rho$

12.2 Классификация систем массового обслуживания

Для облегчения процесса моделирования следует пользоваться классификацией СМО по различным признакам. Каждому классу систем соответствуют определенные группы методов и моделей ТМО, упрощающие подбор адекватных математических моделей к решению задач массового обслуживания.

Классификация СМО:

1. По числу каналов обслуживания

1.1. Одноканальные – СМО с одним обслуживающим устройством.

1.2. Многоканальные – СМО с большим числом обслуживающих устройств. Многоканальные системы могут состоять из обслуживающих устройств как одинаковой, так и разной производительности.

2. В зависимости от взаимного расположения каналов (для многоканальных СМО):

2.1. С параллельными каналами. Входной поток заявок на обслуживание является общим, и поэтому заявки в очереди могут обслуживаться любым свободным каналом. Очередь на обслуживание можно рассматривать как общую.

2.2. С последовательными каналами. Каждый канал может выступать в качестве отдельной одноканальной СМО или фазы обслуживания. Выходной поток обслуженных заявок одной СМО является входным потоком для последующей.

3. По характеру случайного процесса:

3.1. Марковские – входящий поток заявок и выходящий поток обслуженных заявок являются пуассоновскими.

3.2. Немарковские.

4. В зависимости от возможности образования очереди:

4.1. С отказами обслуживания – требование, заставшее все приборы обслуживания занятыми, покидает систему необслуженным. Пример – автоматические телефонные.

4.2. С ожиданием обслуживания

4.2.1. СМО с неограниченным временем ожидания. Требование, застав все устройства занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания до тех пор, пока одно из устройств не освободится.

4.2.2. СМО с ограниченным ожиданием или очередью. Пример – магазины, билетные кассы.

5. По месту нахождения источника требований:

5.1. Разомкнутые. Источник требований находится вне системы и генерирует неограниченный поток требований. Примерами подобных систем могут служить магазины, кассы вокзалов, портов и др. Для этих систем поступающий поток требований можно считать неограниченным.

5.2.Замкнутые. Источник требований содержится в самой системе. После некоторой временной задержки обслуженные требования снова поступают на вход СМО, входной поток ограничен и включен в состав СМО. Примером такой системы в коммерческой деятельности является система обслуживания механиками торгового оборудования, которое через некоторое время после ремонта все же опять приходит в неисправное состояние и требует обслуживания. В замкнутой СМО циркулирует одно и то же конечное число потенциальных заявок.

6. По дисциплине очереди (Дисциплина очереди – способ, которым при освобождении канала для обслуживания выбирается требование из очереди или занимается свободный канал при поступлении требования.)

6.1. СМО с приоритетами. Проводится предварительная классификация требований или приборов. Правила установления приоритетов могут быть самыми разнообразными. Так, если в системе ремонта станков некоторые станки выполняют особо срочные заказы, то при возникновении необходимости они, должны ремонтироваться в первую очередь. В общем же случае требования заранее могут быть разбиты на классы в зависимости от длительности обслуживания или от величины потерь из-за задержки обслуживания, допускаемого времени пребывания в системе и т. д. Если все требования разбиты на классы приоритетов, то при освобождении прибора для обслуживания выбирается требование с наиболее высоким приоритетом из числа находящихся в очереди.

6.2. СМО без приоритетов. Никакой априорной классификаций требований не приводится.

6.2.1. первый пришедший обслуживается первым. В некоторых случаях применяется обратный порядок отбора требований.

6.2.2. последний пришедший обслуживается первым. Например, когда детали передаются от операции к операции партиями, причем последнее изделие помещается так, что становится доступным.

7. По количеству этапов обслуживания:

7.1. Однородные. Каналы обслуживания выполняют одну и ту же операцию обслуживания.

7.2. Неоднородные. Каналы обслуживания выполняют различные операции обслуживания, которое осуществляется с помощью последовательно расположенных каналов.

8. По количеству источников требований:

8.1. Однофазные. Обслуживание заявки в системе происходит один раз. Данная система состоит из очереди или буфера и одного обслуживающего прибора.

8.2. Многофазные. Обслуживание заявки в системе происходит не один раз. Многофазные СМО можно создавать, соединяя однофазные СМО.

12.3 Расчет основных показателей функционирования СМО

Условные обозначения:

n – количество каналов;

λ – интенсивность входящего потока требований;

μ – интенсивность обслуживания требований: $\mu = 1/T$

$t_{обсл}$ – среднее время обслуживания 1 заявки;

$\rho = \lambda/\mu$ – интенсивность нагрузки на систему, т.е. среднее число заявок,

приходящее за среднее время обслуживания одной заявки;

q – относительная пропускная способность системы (вероятность обслуживания требования, доля обслуженных заявок);

A – абсолютная пропускная способность системы (среднее число обслуживаемых заявок в единицу времени);

P_o – вероятность отсутствия требований в системе;

P_k – вероятность нахождения в системе k требований;

$P_{отк}$ – вероятность отказа;

$\overline{N_z}$ – среднее число занятых каналов;

$\overline{L_{ож}}$ – средняя длина очереди;

$\overline{L_{сист}}$ – среднее число требований, находящихся в системе;

$\overline{t_{ож}}$ – среднее время пребывания в очереди;

$\overline{t_{сист}}$ – среднее время пребывания требования в системе;

$\overline{N_{пр}}$ – среднее число простаивающих каналов;

k_z – коэффициент загрузки каналов;

k_n – коэффициент простоя каналов.

Многоканальная СМО с отказами (без очереди)

В n -канальную СМО поступает простейший поток требований с интенсивностью λ . Время обслуживания требований (для 1 канала) экспоненциальное. Если требование поступает в систему в момент, когда все n каналов заняты, то оно получает отказ (покидает систему необслуженным). Если же в момент поступления требования имеется хотя бы 1 свободный канал, то требование принимается к обслуживанию и обслуживается до конца.

При расчетах должны выполняться равенства: $N_z + N_{пр} = n$, $k_z + k_{пр} = 1$

Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.

В n -канальную СМО поступает простейший поток требований с интенсивностью λ ; число мест в очереди ограничено и равно m . Время обслуживания требований (для 1 канала) экспоненциальное со средним значением $t_{обсл}$.

Многоканальная СМО с ожиданием без ограничений на длину очереди

- вероятность того, что все каналы заняты: $\pi = \frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)} P_0$
- вероятность наличия очередей: $P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0$
- среднее число свободных каналов: $N_{св} = P_0 \sum_{k=1}^n k \frac{\rho^k}{(n-k)!}$

Характеристики многоканальных СМО приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Характеристики многоканальных СМО

Показатель	СМО с отказами	СМО с ограничением на длину очереди	СМО без ограничений на длину очереди
P_o	$P_o = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}$	$P_o = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right]^{-1}$	$P_o = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right]^{-1}$
P_k	$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k = \overline{1, n}$	$P_{0 \leq k \leq n} = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad P_{n < k \leq m+n} = \frac{\rho^k}{n^{k-n} n!} P_0$	$P_{1 \leq k < n} = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \quad P_{k \geq n} = \frac{\rho^k}{n^{k-n} n!} P_0$
$P_{отк}$	$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$	$P_{отк} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!} P_0,$	$P_{отк} = 0$
q	$q = 1 - P_{отк}$	$q = 1 - P_{отк}$	$q = 1$
A	$A = \lambda q$	$A = \lambda q$	$A = \lambda$
$\overline{N}_3$	$\overline{N}_3 = \frac{A}{\mu} = \rho q = \sum_{k=1}^n k P_k$	$\overline{N}_3 = \frac{A}{\mu} = \rho \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} P_0 \right)$	$\overline{N}_3 = \rho$
$\overline{L}_{ож}$	0	$\overline{L}_{ож} = P_0 \frac{\rho^{n+1}}{nn!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m+1 - m \frac{\rho}{n})}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n) P_k$	$\overline{L}_{ож} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0$
$\overline{L}_{сум}$	-	$\overline{L}_{сум} = \overline{N}_3 + \overline{L}_{ож} = \sum_{k=1}^{n+m} k P_k$	$\overline{L}_{сум} = \overline{N}_3 + \overline{L}_{ож} = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k$
$\overline{t}_{ож}$	-	$\overline{t}_{ож} = P_0 \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m (m+1 - m \frac{\rho}{n}) \rho^n}{nn! \mu \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2} = \frac{\overline{L}_{ож}}{\lambda}$	$\overline{t}_{ож} = \frac{\overline{L}_{ож}}{\lambda} = \frac{\rho^n}{\mu(n-1)!(n-\rho)^2} P_0$
$\overline{t}_{сум}$	-	$\overline{t}_{сум} = \overline{t}_{ож} + q \overline{t}_{обсл}$	$\overline{t}_{сум} = \overline{t}_{ож} + \overline{t}_{обсл} = \frac{\overline{L}_{сум}}{A}$
$\overline{N}_{np}$	$\overline{N}_{np} = \sum_{k=0}^n (n-k) P_k$		
k_3	$k_3 = \frac{\overline{N}_3}{n}$		
k_n	$k_n = \frac{\overline{N}_n}{n}$		

12.4 Определение оптимальных параметров СМО

Оптимальные параметры СМО (системы массового обслуживания) определяются путем балансировки затрат на обслуживание и эффективности системы, например, минимизации времени ожидания клиентов или уменьшения количества отказов. Основными параметрами, влияющими на оптимизацию, являются интенсивность входящего потока заявок (λ) и интенсивность потока обслуживания (μ). Для поиска оптимальных значений используются аналитические модели (уравнения) или методы моделирования (например, имитационное моделирование).

В качестве экономического критерия для решения задач массового обслуживания, как правило, применяется минимум потерь от ожидания требования и простоев каналов. Математическое выражение критерия при этом принимает следующий вид:

$$C = (C_1 M_1 + C_2 N_n) T_{пл}, \quad (12.5)$$

где C – суммарные потери;

C_1 – потери от простоев требования в единицу времени;

C_2 – потери от простоев канала в единицу времени;

$T_{пл}$ – планируемый период (в работе – 1 год).

Экономический критерий отношения C_2/C_1 приводится к следующему виду:

$$C = (M_1 + C_2/C_1 \cdot N_n) T_{пл}, \quad (12.6)$$

Для систем с отказами представленные выше формулы критерия оптимальности примут вид:

$$C = (C_y p_{отк} \lambda + C_2 N_n) T_{пл}; \quad (12.7)$$

$$C = (p_{отк} \lambda + C_2/C_y \cdot N_n) T_{пл}, \quad (12.8)$$

где C_y – величина потерь, связанных с уходом из системы одного требования.

Пример решения задачи многоканальной СМО с ожиданием и ограниченной очередью.

Междугородный переговорный пункт имеет четыре телефонных аппарата. В среднем за сутки поступает 320 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров составляет 5 мин. Длина очереди не должна превышать 6 абонентов. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме (вероятность простоя каналов, вероятность отказа, вероятность обслуживания, среднее число занятых каналов, среднее число заявок в очереди, среднее число заявок в

системе, абсолютную пропускную способность, относительную пропускную способность, среднее время заявки в очереди, среднее время заявки в системе, среднее время заявки под обслуживанием).

Решение.

Имеем систему массового обслуживания (СМО) с четырьмя каналами (четыре аппарата), с ожиданием и ограниченной очередью (6 мест). Получаем параметры $n = 4$ (число каналов), $m = 6$ (число мест в очереди), $\lambda = \frac{320}{60 \cdot 24} = \frac{2}{9}$ (интенсивность входящего потока, заявок в минуту), $\mu = 1/5$ (интенсивность потока обслуживания, одна заявка за 5 минут). Определим характеристики работы данной СМО в предельном режиме.

Вводим параметр $\psi = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} = \frac{2/9}{4 \cdot 1/5} = \frac{5}{18}$ – показатель нагрузки на один канал.

Тогда предельные вероятности определяются по следующим формулам:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n \psi^{n+1} (1 - \psi^m)}{n! (1 - \psi)} \right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{4^0}{0!} (5/18)^0 + \frac{4^1}{1!} (5/18)^1 + \frac{4^2}{2!} (5/18)^2 + \frac{4^3}{3!} (5/18)^3 + \frac{4^4}{4!} (5/18)^4 \frac{4^4 \left(\frac{5}{18}\right)^5 \left(1 - \left(\frac{5}{18}\right)^6\right)}{4! (1 - 5/18)} \right)^{-1} \approx 0,328$$

Остальные вероятности:

$$P_k = \frac{n^k}{k!} \psi^k P_0, k=1,2,3,4 \text{ и } P_k = \frac{n^n}{n!} \psi^k P_0, k=5,6,7,8,9,10.$$

Вероятность простоя каналов: $P_0 \approx 0,328$.

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = P_{10} = \frac{4^4}{4!} (5/18)^{10} \cdot 0,328 \approx 0,000009$$

Относительная пропускная способность (вероятность обслуживания):

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - 0,000009 = 0,99999$$

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda q = 0,99999 \cdot \frac{2}{9} = 0,22222$

Среднее число занятых каналов: $N_3 = \frac{A}{\mu} = 0,22222 \cdot 5 = 1,1111$

Среднее число заявок в очереди:

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \frac{n^n}{n!} \psi^{n+1} \frac{1 - \psi^m(m + 1 - m\psi)}{(1 - \psi)^2} P_0 \\ &= \frac{4^4}{4!} \left(\frac{5}{18}\right)^5 \frac{1 - \left(\frac{5}{18}\right)^6 (6 + 1 - 6\left(\frac{5}{18}\right))}{(1 - (\frac{5}{18}))^2} \cdot 0,328 \approx 0,018\end{aligned}$$

Среднее число заявок в системе: $N = N_3 + \bar{N} = 1,111 + 0,018 = 1,129$

Среднее время заявки под обслуживанием: $\bar{T}_3 = \frac{N_3}{\lambda} = \frac{1,1111}{2/9} = 4,99995$
мин.

Среднее время заявки в очереди: $\bar{T}_{\text{обсл}} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{0,018}{2/9} = 0,081$ мин.

Среднее время заявки в системе:

$$T = \bar{T}_3 + \bar{T}_{\text{обсл}} = 4,99995 + 0,081 \approx 5,08 \text{ мин.}$$

Тема 13. Имитационное моделирование

13.1 Определение имитационного моделирования и его значение

Имитационное моделирование – это метод, направленный на исследование сложных объектов и процессов при помощи их моделей, эквивалентов и симуляции. В современном мире под имитационным моделированием понимаются компьютерные технологии, использующие алгоритмы и уравнения для создания цифровых моделей физических объектов.

Над моделью производятся эксперименты, позволяющие получить как можно больше данных о том, что будет происходить с объектом в тех или иных условиях, с учетом многочисленных факторов и взаимозависимостей. Полученные результаты применимы в отношении настоящего объекта, имитацией которой является изучаемая модель.

Имитационная модель помогает выявить риски, предотвратить ущерб, принимать верные решения, оптимизировать строение объекта.

Имитация позволяет проанализировать результаты внесения изменений, протестировать разные варианты и гипотезы, наглядно оценить их эффективность. Можно выстраивать имитационные модели самых разнообразных объектов, систем и процессов – от строительства до реинжиниринга деятельности компании.

Имитационное моделирование основано на математическом моделировании и является его частным случаем. От других видов компьютерного анализа имитационное моделирование отличается тем, что вместо описания взаимосвязей между элементами исследуемого объекта выстраивается алгоритм, демонстрирующий последовательность развития процессов внутри него. Затем с помощью цифровых технологий имитируется поведение объекта в динамике за определенное время, выбранное входе моделирования. Аналитические методы ограничены возможностью реализации достаточно стандартных, простых алгоритмов, без многоуровневых взаимосвязей и зависимостей. Моделирование позволяет решать задачи повышенной сложности и учитывать нелинейные характеристики, дискретные и непрерывные элементы, случайные воздействия и другие многоаспектные факторы.

Имитационная модель представляет собой совокупность правил, определяющих процессы функционирования объекта и его переходов из одного временного состояния в другое. Модель может быть представлена в виде блок-схем, диаграмм, дифференциальных уравнений и любыми другими способами, понятными для обработки программными технологиями. Описание модели нет необходимости формализовывать, рекомендуется, чтобы оно было максимально приближено к реальным терминам и условиям.

Ключевые принципы, которые нужно учитывать при создании и использовании имитационных моделей:

1. Абстракция и упрощение. Виртуальная модель должна быть по возможности простой, без деталей и взаимосвязей, которые не являются критическими и не влияют непосредственно на поведение объекта. Оставляют только важные компоненты и характеристики системы.

2. Дискретизация времени. Время разделяется на дискретные интервалы, в каждом из которых происходит некоторое действие. Это дает возможность изучать эволюцию и изменения, происходящие в системе с течением времени, и прогнозировать ее будущее поведение.

3. Стохастическое моделирование. Учитываются случайные факторы, которые могут оказать влияние на объект или процесс. Это связано с тем, что реальные объекты подвержены воздействию различных случайностей.

4. Проверка и валидация. В ходе проверки модели анализируют ее структуру и функциональность на предмет правильного отражения свойств реальной системы. Валидация – это сравнение и сопоставление результатов моделирования с реальными данными или другими моделями. Успешное прохождение валидации служит подтверждением точности и надежности модели, неуспешное инициирует внесение необходимых корректировок.

5. Проведение экспериментов. При моделировании можно ставить и проверять различные гипотезы, исследовать стратегии и решения, анализировать их результаты по интересующим параметрам. Это позволяет в конечном счете оптимизировать параметры модели.

6. Итеративный подход. Непрерывный анализ эффективности модели дает возможность пошагово уточнять и улучшать ее отдельные элементы и качество в целом. Это позволяет максимально приблизить свойства модели к характеристикам реального объекта.

Данные правила позволяют разработать надежные модели, отражающие параметры и особенности объектов-прототипов. При имитационном моделировании важно также выбрать подход, соответствующий требуемому уровню абстракции модели и способу ее представления.

13.2 Подходы к имитационному моделированию

Выделяют три ключевых подхода к имитационному моделированию: дискретно-событийное моделирование, системная динамика и агентно-ориентированное моделирование. Они отличаются уровнем абстракции при создании модели, что обуславливает применение того или иного подхода. Каждый из них олицетворяет комплексную систему правил, представлений и приемов, на основании которых строятся модели.

1. Дискретно-событийное моделирование.

Дискретно-событийный подход к имитационному моделированию ориентирован на бизнес-процессы и подразумевает их описание в виде последовательности отдельных событий или операций. Например, в этом

подходе полет самолета из Москвы в Санкт-Петербург содержит два события: отправление и приземление. Сам процесс полета остается за скобками и воспринимается как пауза между событиями.

Дискретно-событийный метод используется для объектов, которые достаточно имитировать на среднем уровне абстракции. В нем не учитываются такие нюансы, как, например, запас топлива или траектория движения. Подход преимущественно используется в логистике, отдельных видах производства, здравоохранении, поиске рыночного равновесия, социально-экономическом развитии городов, экологических процессах.

2. Системная динамика.

Системная динамика применяется, когда нужно оценить явление или объект в целом, без детального анализа взаимодействия отдельных его элементов или единичных событий. В рамках подхода сложные системы или объекты моделируются на высоком уровне абстракции, индивидуальные свойства и другие детали конкретных объектов не принимаются во внимание. Зато можно смоделировать и тем самым систематизировать сложные, глобальные взаимосвязи.

Модели, спроектированные при помощи системного подхода, дают общее представление об объекте и помогают выстроить стратегическое планирование. Модель представляет взаимозависимости в виде циклов обратной связи. Они описываются посредством накопителей, в роли которых выступают такие ресурсы, как материалы, знания, люди, деньги, потоки между накопителями, а также динамические элементы данных, изменяющиеся с течением времени. В рамках подхода можно задавать значения параметров и переменных.

Системная динамика обычно используется для моделирования логистики, систем массового обслуживания и других, где фигурируют потоки движения объектов.

3. Агентно-ориентированное моделирование.

Агентно-ориентированное моделирование используется в ситуациях, когда легче и быстрее описать индивидуальное поведение каждого объекта, чем проектировать общий рабочий процесс. В отличие от двух вышеперечисленных методов, агентное моделирование помещает в центр внимания индивидуальных участников системы, учитывает их уникальные свойства и отношения. Под агентом понимается активный объект, имеющий значение для системы, характеристики которого можно определить. Агентом может быть человек, здание, компания, компьютер, продукт питания или процесс.

Между агентами устанавливаются связи, задаются параметры окружающей среды. Поведение моделируемой системы выстраивается на основе частного поведения каждого из агентов и их взаимодействия. При моделировании используются большие массивы данных, в ход идет накопленная информация, например, о покупательском поведении, сбоях в работе системы, статистике переходов по ссылкам. Агентно-ориентированное моделирование используется чаще всего для построения сложных социальных и бизнес-

процессов, для решения задач, связанных с пешеходным движением, транспортом, компьютерными системами, сложного производства с большим количеством конвейеров, станков, роботов и т.д. для прогнозирования в этих сферах.

Для создания имитационных моделей используется специализированное программное обеспечение – системы имитационного моделирования (SIM, Simulation Modeling Systems).

В обобщенном виде процесс разработки имитационной модели состоит из следующих шагов:

1. Изучение прототипа модели – реального объекта, его внутренней структуры, принципов работы, характеристик, взаимосвязей между элементами.
2. Разработка концептуальной модели, определяющей значимые для моделирования аспекты: состав и структуру объекта, свойства и связи элементов.
3. Формирование информационного пространства для моделирования, определение численных параметров функционирования объекта.
4. Выбор системы моделирования, функционал которой достаточен для реализации модели.
5. Разработка модели.
6. Тестирование и корректировка модели.

При работе с моделью рекомендуем регулярно производить анализ ее эффективности и вносить в нее модификации по мере необходимости. Кстати, для объекта может быть создано неограниченное количество имитационных моделей – это востребовано, если нужно провести много экспериментов или проверить разные гипотезы за ограниченный отрезок времени.

Имитационное моделирование, как правило, применяется для анализа сложных объектов и систем с многочисленными определенными и случайными взаимосвязями, параметрами и факторами влияния. Также этот метод актуален для динамических, быстро меняющихся объектов или систем.

Наиболее распространенные сферы применения имитационного моделирования:

- бизнес-процессы;
- системы поддержки принятия решений;
- ИТ-инфраструктура;
- дорожное движение;
- пассажиропотоки;
- логистика;
- производство;
- социальные процессы;
- маркетинг;
- цепочки поставок;
- управление проектами;
- прогнозирование и оценка финансовых рынков;

– экономика здравоохранения и др.

13.3 Метод Монте-Карло

Монте-Карло – метод анализа, применяемый в случаях, когда параметры известны приблизительно, и есть информация о статистическом распределении этих параметров. Для проведения анализа генерируют большое число случайных значений параметров, для каждого такого значения выполняют расчет и формируют статистическое распределение для результата. Примерами задач, для которых применяют анализ Монте-Карло, могут служить следующие ситуации:

- оценка опционов на акции на основе статистических данных о колебаниях цены акции.
- определение Value-at-Risk в инвестиционных решениях с известными данными о статистическом распределении доходности ценной бумаги.
- оценка инвестиционных проектов, связанных с добычей полезных ископаемых или другой деятельностью, в которой данные о параметрах проекта (дебит нефтяной скважины и т. п.) выражены статистически.

Пример графика распределения значений NPV инвестиционного проекта методом Монте-Карло приведен на рисунке 13.1.

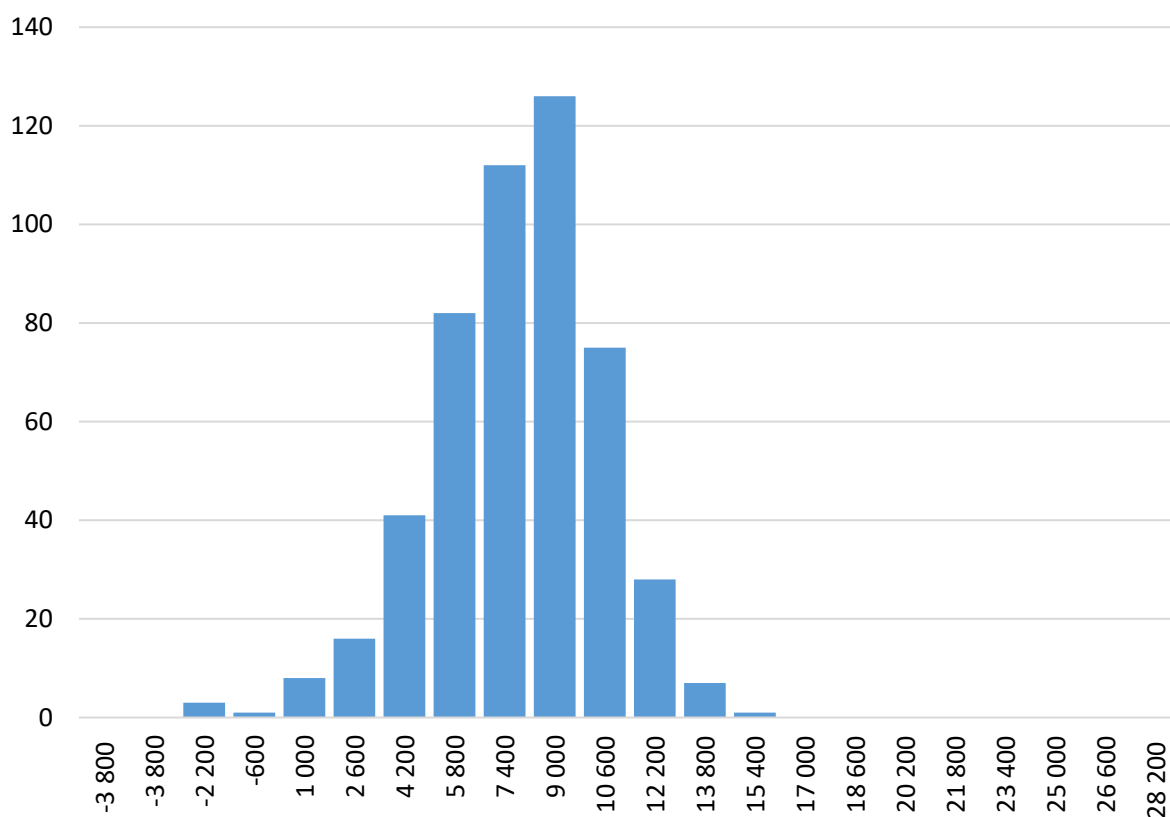


Рисунок 13.1 – График распределения значений NPV инвестиционного проекта методом Монте-Карло

На этом графике по горизонтальной оси показан интервал значений NPV, полученных в расчетах (результаты сгруппированы с шагом 600), а по вертикальной оси – число случаев, когда NPV попадала в этот интервал (из 500 попыток).

Алгоритм метода Монте-Карло

В сфере финансов для анализа методом Монте-Карло необходимо выполнить следующие шаги:

Шаг 1. Параметры

Выбираем результат, который будем анализировать методом Монте-Карло – цена опциона, NPV инвестиционного проекта и т. п.

В качестве параметров для Монте-Карло выбираем один или несколько показателей, влияющих на результат. Предполагается, что значения этих параметров известны не точно, но мы знаем или можем получить характеристики статистического распределения параметров.

Шаг 2. Основная модель

Создаем модель, которая вычисляет результат с учетом выбранных параметров. Скорее всего, кроме статистических параметров, используемых в Монте-Карло, в ней будут и другие данные, которые заданы в традиционном виде с конкретными значениями. В финансовом анализе модель обычно создают в Excel, но, в принципе, метод Монте-Карло можно реализовать и другими инструментами: на языке Python или еще в каком-то приложении.

Шаг 3. Закон распределения

Необходимо решить, как именно выглядит статистическое распределение параметров. Простейший вариант – равномерное распределение. В этом случае параметр с одинаковой вероятностью может принимать любое из значений в заданном интервале. К сожалению, такое распределение случайных величин не очень часто соответствует действительности.

Самый распространенный подход – нормальное распределение, предполагающее, что вероятность выпадения значений постепенно падает с удалением от среднего. Хотя в реальных процессах нормальное распределение часто лучше всего описывает поведение параметров, у него есть неудобства в реализации. Во-первых, оно не ограничивает возможные отклонения от среднего. Пусть и с маленькой вероятностью, но значение параметра может оказаться сколь угодно далеким от ожидаемого. Из-за этого нормальное распределение иногда заменяют треугольным. Во-вторых, нормальное распределение с одинаковой вероятностью допускает отклонения параметра вверх и вниз от ожидаемой величины. Но часто вероятности снижения и роста показателя не одинаковы. Тогда может потребоваться более сложный закон распределения.

Шаг 4. Свойства распределения

Для выбранного закона распределения случайных параметров необходимо получить свойства этого распределения. В наиболее популярном нормальном распределении это среднее значение и стандартное отклонение. Если Монте-Карло будет использовать другое распределение, то и перечень его свойств может меняться.

Самая интересная (и сложная) деталь на этом шаге – корреляция. Если параметров несколько, то может оказаться, что они хотя и являются случайными, но их случайные колебания связаны друг с другом. Например, если при моделировании инвестиционного проекта в качестве случайных параметров выбраны цены готовой продукции и стоимость комплектующих, то жизненный опыт подсказывает, что чаще всего цены на товар и цены на комплектующие к нему меняются похожим образом, то есть эти величины коррелированы. Анализ их случайных колебаний без учета такой связи может заметно исказить картину.

Шаг 5. Многократный расчет

С помощью средств автоматизации расчетов (Excel, Python и т. п.) запускаем цикл из большого числа повторений, на каждом шагу которого получаем случайные значения параметров в соответствии с их законом распределения, вычисляем результат и накапливаем статистику по полученному результату.

Шаг 6. Анализ результатов

В первую очередь результаты моделирования представляют графически, отображая на гистограмме частоту попадания результата в разные интервалы значений. Далее можно рассчитать для результата любые статистические характеристики как для реального случайного процесса: среднее, стандартное отклонение и другие показатели.

Сложности применения метода Монте-Карло

Главная проблема анализа методом Монте-Карло связана с получением данных о статистическом распределении параметров, использованных в анализе. Сложный и насыщенный данными метод моделирования создает у аналитика впечатление о точности и глубине исследования возможных результатов, но в действительности качество сделанных выводов полностью зависит от качества исходных данных. В ряде случаев для параметров доступны обширные данные наблюдений, и их статистику можно объективно рассчитать. Но часто наблюдения для параметров недоступны, и правила их распределения определяют аналитически. В таких ситуациях можно сделать две ошибки.

Ошибка 1. Неверное правило распределения. Закон распределения и его характеристики не стыкуются с тем, как определи базовые значения параметров. Например, продажи уже и так спланированы по наиболее оптимистическому сценарию, а статистическое распределение в равной степени допускает отклонения как вверх, так и вниз.

Ошибка 2. Игнорирование корреляции. Многие параметры, хотя и являются случайными, сильно связаны друг с другом. Если мы анализируем их как независимые, то можем получить сильно искаженный результат.

Тема 14. Марковские процессы принятия решений

Марковские процессы принятия решений (MDP) – это математическая модель, которая описывает процесс принятия последовательных решений в условиях неопределенности, где будущее состояние системы зависит только от текущего состояния и принятого решения, но не от всей предыдущей истории. Эта модель является основой для моделирования задач, где результат зависит от выбора агента и случайных факторов, и широко применяется в таких областях, как робототехника, экономика, искусственный интеллект и обучение с подкреплением.

Основные компоненты марковских процессов принятия решений:

1) *Состояния* (S_{car}, S): Набор всех возможных состояний, в которых может находиться система.

2) *Действия* (A_{car}, A): Набор всех возможных действий, которые агент может предпринять в каждом состоянии.

3) *Вероятности перехода* (P_{car}, P): Вероятность перехода из состояния s в состояние s' при выполнении действия a .

4) *Вознаграждение* (R_{car}, R): Немедленное вознаграждение, которое агент получает за выполнение действия a в состоянии s .

5) *Политика* (π): Стратегия, которая определяет, какое действие следует предпринять в каждом состоянии, чтобы максимизировать ожидаемую будущую награду.

Марковское свойство означает, что будущее состояние системы зависит только от текущего состояния и принятого решения, а не от всех предыдущих состояний. Это упрощает модель, так как агенту не нужно помнить всю историю.

Применение:

- Робототехника и автоматизация: Роботы могут принимать решения для навигации и выполнения задач в неопределенной среде.

- Экономика и финансы: Моделирование финансовых рынков и принятие инвестиционных решений.

- Искусственный интеллект: Разработка стратегий для игр (например, AlphaGo и 2048), обучение агентов и создание умных систем.

- Обучение с подкреплением: MDP является центральным элементом для построения алгоритмов обучения с подкреплением, где агент учится оптимальному поведению через попытки и ошибки.

На рисунке 14.1 приведен пример МППР с 3 состояниями и 2 действиями.

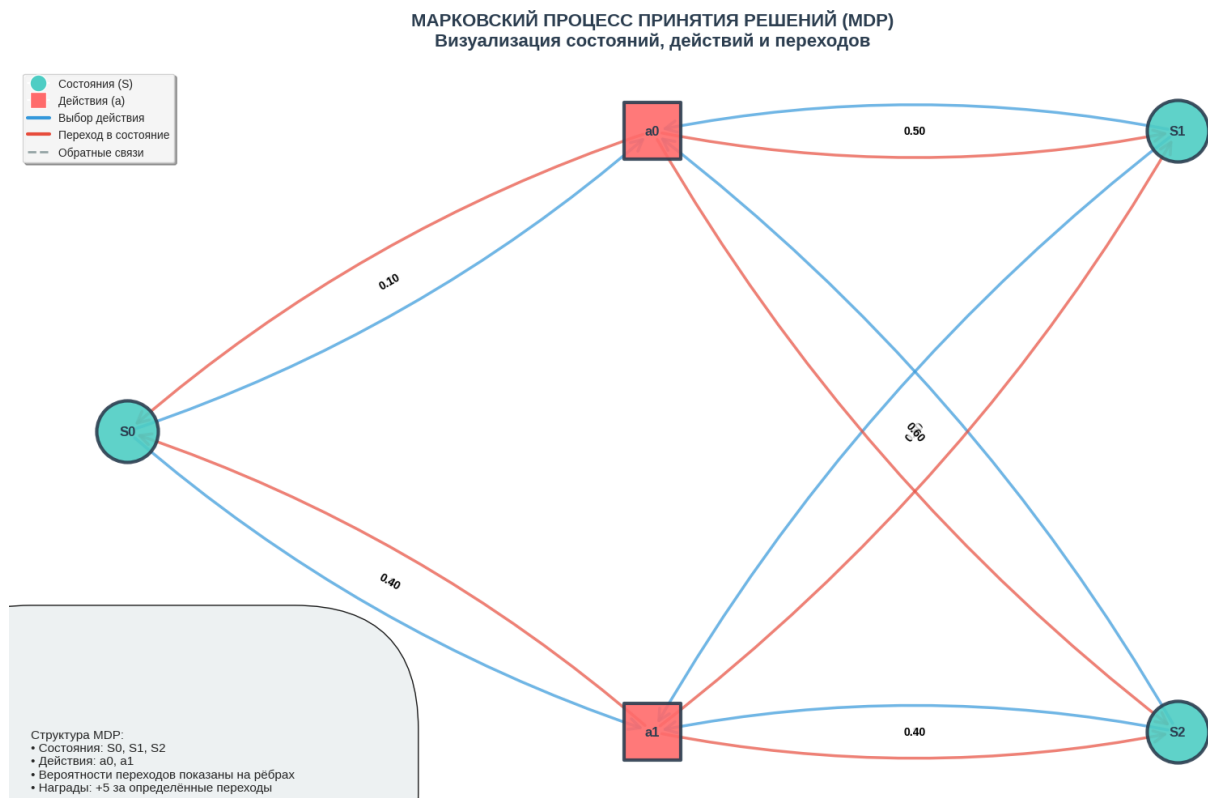


Рисунок 14.1 – Схема марковского процесса принятия решений

Визуализация на рисунке 14.1 представляет классическую модель марковского процесса принятия решений, где агент последовательно выбирает действия на основе текущего состояния, а система переходит в новое состояние согласно вероятностным законам.

На рисунке 14.1 узлами системы являются круги (состояния системы S₀, S₁, S₂) и квадраты (действия агента: a₀, a₁).

Типы переходов:

- 1) Синие стрелки – выбор действия агентом (из состояний в действия)
- 2) Красные стрелки – случайные переходы между состояниями (после выполнения действия)
- 3) Серые пунктирные стрелки – обратные связи и дополнительные переходы

Процесс принятия решений состоит из двух фаз:

1. Фаза принятия решения (синие стрелки):

- Из состояния S₀:
 - а) Выбор действия a₀ с вероятностью 0,70
 - б) Выбор действия a₁ с вероятностью 0,30
- Из состояния S₁: равновероятный выбор между a₀ и a₁ по 0,50)
- Из состояния S₂: предпочтение действию a₀ (0,60) над a₁ (0,40)

2. Фаза стохастического перехода (красные стрелки):

- После выбора a₀:
 - а) Переход в S₀: 0,10

- b) Переход в S_1 : 0,20
- c) Переход в S_2 : 0,70
- После выбора a_1 :
- a) Переход в S_0 : 0,40
- b) Переход в S_1 : 0,30
- c) Переход в S_2 : 0,30

Ключевые особенности системы:

Поведенческие паттерны:

- S_0 демонстрирует сильное предпочтение действию a_0 ;
- S_2 также склоняется к выбору a_0 , но менее выраженно;
- S_1 показывает нейтральное поведение без явных предпочтений.

Динамика состояний:

- действие a_0 ведет к преимущественному переходу в S_2 ;
- действие a_1 распределяет вероятности более равномерно между состояниями;
- наличие обратных связей указывает на циклическую природу процесса.

Интерпретация для принятия решений:

Стратегические выводы:

- 1) Для достижения S_2 – наиболее эффективно действие a_0 из любого состояния.
- 2) Для возврата в S_0 – оптимально действие a_1 (вероятность 0,40).
- 3) Сбалансированное управление – требует смешанной стратегии с учетом текущего состояния.

Вероятностные характеристики:

- 1) Система обладает памятью (зависимость от текущего состояния).
- 2) Переходы носят стохастический характер.
- 3) Возможность циклического поведения между состояниями.

II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа № 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СРЕДЕ MS EXCEL



Цель лабораторной работы:

- изучить виды задач линейного программирования, их модели и методы решения;
- освоить построение математических моделей задачи линейного программирования;
- приобрести практические навыки решения и анализа задач линейной оптимизации с использованием надстройки MS Excel Поиск решения.



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, экономический анализ задачи, математическая модель ЗЛП (с условными обозначениями и пояснениями).
4. Результаты решения ЗЛП средствами надстройки MS Excel Поиск решения (макеты таблиц с расчетными формулами, распечатки диалоговых окон, результаты вычислений).
5. Отчеты надстройки MS Excel Поиск решения.
6. Анализ оптимального решения на чувствительность.
7. Ответы на контрольные вопросы.
8. Выводы.
9. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Задача линейного программирования (ЗЛП). Примеры экономических ЗЛП, их особенности.
2. Математическая модель ЗЛП, краткая характеристика ее элементов (план, целевая функция, ограничения). Формы записи постановки задачи линейного программирования (стандартная, каноническая, матричная).
3. Математическая модель двойственной задачи к ЗЛП. Что такое «объективно обусловленные оценки» и их экономический смысл?
4. Методы решения задач линейного программирования: симплекс-метод и графический метод (возможности и алгоритм применения каждого метода).
5. Назначение надстройки MS Excel Поиск решения, её возможности для решения ЗЛП. Подготовки исходных данных и формул для использования надстройки Поиск решения.
6. Какие отчеты можно сохранить по результатам Поиска решения?
7. Задачи анализа оптимального решения ЗЛП на чувствительность. Что такое «теневая цена»

ресурса и как она рассчитывается?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель лабораторной работы:



- изучить основные понятия многокритериальной оптимизации, особенности формализации задач и методы их решения;
- освоить построение экономико-математических моделей задач многокритериальной оптимизации;
- приобрести практические навыки решения задач многокритериальной оптимизации методами последовательных уступок и свёртки критериев в среде Microsoft Excel.



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.

Содержание отчёта:



1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, экономический анализ задачи, математическая модель задачи МКО (с условными обозначениями и пояснениями).
4. Результаты решения задачи средствами надстройки MS Excel Поиск решения методом последовательных уступок (макеты таблиц с расчетными формулами, распечатки ДО, результаты вычислений).
5. Результаты решения задачи средствами надстройки MS Excel Поиск решения методом свертки критериев (макеты таблиц с расчетными формулами, распечатки диалоговых окон, результаты вычислений).
6. Анализ полученных результатов и их экономическая интерпретация.
7. Ответы на контрольные вопросы.
8. Выводы.
9. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Понятие многокритериальной оптимизации, ее отличие от скалярной оптимизации. Примеры задач многокритериальной оптимизации.
2. Назовите основные проблемы при решении задач многокритериальной оптимизации. Какое решение является оптимальным (парето-оптимальным) для задачи МКО?
3. Направления решения задач МКО. Классификация методов решения многокритериальных задач.
4. Математическая модель задачи МКО.
5. Опишите метод последовательных уступок для решения задач МКО, укажите его особенности.
6. Опишите метод свёртки критериев для решения задач МКО, укажите его особенности.
7. Какие решения называют оптимальными по Парето? Приведите их формальное определение, а также интерпретации и примеры.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

Цель лабораторной работы:



- изучить сущность транспортной задачи (ТЗ), виды и особенности моделей транспортных задач, методы их решения;
- освоить методику построения математической модели ТЗ;
- приобрести практические навыки применения модели ТЗ для решения распределительных задач с использованием надстройки MS Excel Поиск решения



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.

Содержание отчёта:



1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, экономический анализ задачи, математическая модель ТЗ (с условными обозначениями и пояснениями).
4. Результаты решения ТЗ средствами надстройки MS Excel Поиск решения (макеты таблиц с расчетными формулами, распечатки диалоговых окон, результаты вычислений).
5. Ответы на контрольные вопросы.
6. Выводы.
7. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Сущность транспортной задачи линейного программирования, ее содержательная формулировка и особенности.
2. Виды транспортных задач. Как свести открытую транспортную задачу к закрытой?
3. Математическая модель транспортной задачи, краткая характеристика ее элементов. Порядок построения модели.
4. Методы нахождения опорных планов транспортной задачи (метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля).
5. Назовите области применения моделей транспортных задач для исследования операций. Какие дополнительные ограничения могут учитываться при решении практических задач с помощью модели транспортной задачи? Приведите примеры задач.

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ. ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ ГРАФИКОВ ПО ВРЕМЕНИ И РЕСУРСАМ



Цель лабораторной работы:

- освоить построение сетевых графиков;
- освоить построение линейных диаграмм сетевых графиков;
- приобрести практические навыки расчета параметров сетевых графиков, корректировки сетевых графиков по времени и ресурсам.



Результаты лабораторной работы:

- построенные сетевые графики в любом удобном формате ³ для студента (с соблюдением всех правил построения)⁴;
- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчет о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчете.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи в соответствии с исходными данными по варианту.
4. Построение сетевого графика.
5. Расчёт параметров сетевого графика четырехсекторным методом.
6. Скорректированный сетевой график по ресурсам при помощи линейной диаграммы сетевого графика.
7. Оптимизация сетевого графика по времени при помощи надстройки Поиск решения.
8. Представление всех необходимых рисунков, графиков, таблиц.
9. Ответы на контрольные вопросы.
10. Выводы.
11. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Сетевая модель, ее характеристика и особенности.
2. Области применения и эффективность сетевых моделей.
3. Порядок и правила построения сетевого графика, его основные понятия (работы, события, пути).
4. Временные параметры сетевого графика и порядок их расчета. Как определяется продолжительность критического пути?
5. Что такое полный и частный резервы времени?
6. Как отразить расчет параметров сетевой модели на графике и в таблице?
7. За счет чего возможно оптимизировать сетевую модель по времени? Приведите математическую запись модели оптимизации (с пояснениями).

³ Уточнить у преподавателя формат представления сетевого графика

⁴ Графики должны быть читаемыми и чёткого изображения.

РАЗРАБОТКА СРЕДСТВАМИ MS EXCEL МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ



Цель лабораторной работы:

- изучить виды моделей управления запасами, назначение и особенности применения модели Уилсона;
- изучить методы и алгоритмы применения ABC-анализа и XYZ-анализа для управления запасами;
- приобрести практические навыки построения моделей управления запасами в среде MS Excel.



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, исходные данные.
4. Реализация в MS Excel модели Уилсона.
5. Алгоритмы проведения ABC-анализа и XYZ-анализа.
6. Таблицы с результатами ABC-анализа и XYZ-анализа.
7. Описание формул MS Excel для построенной модели.
8. Ответы на контрольные вопросы.
9. Выводы.
10. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Понятие и виды запасов, необходимость управления запасами.
2. Цели и задачи управления запасами.
3. Виды издержек и уравнение издержек, связанных с запасами.
4. Стратегии управления запасами.
5. Классификация систем управления запасами.
6. Статические детерминированные модели управления запасами (параметры моделей и расчетные формулы).
7. Краткая характеристика модели Уилсона: основные допущения, графическая интерпретация, входные и выходные параметры модели, расчетные формулы.
8. Назначение и особенности ABC-анализа. Аналитический и дифференциальный методы проведения ABC-анализа.
9. Сущность XYZ-анализа, расчетные формулы и алгоритм проведения.

ПРИМЕНЕНИЕ НАДСТРОЙКИ MS EXCEL «ПАКЕТ АНАЛИЗА» ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА



Цель лабораторной работы:

- изучить основные понятия корреляционно-регрессионного анализа данных и этапы построения модели;
- изучить назначение и возможности надстройки MS Excel «Пакет Анализа», порядок применения инструментов «Корреляция» и «Регрессия»;
- приобрести практические навыки построения и оценки моделей корреляционно-регрессионного анализа в среде MS Excel.



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, исходные данные для анализа.
4. Реализация в MS Excel модели корреляционно-регрессионного анализа (макеты таблиц и описание формул MS Excel для построенной модели).
5. Результаты корреляционно-регрессионного анализа по варианту, анализ и выводы.
6. Ответы на контрольные вопросы.
7. Выводы.
8. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Понятие корреляционно-регрессионного анализа. Понятие и виды регрессионных моделей.
 2. Этапы построения регрессионной модели.
 3. Основные требования, предъявляемые к факторам регрессионной модели.
 4. Коэффициент парной корреляции: понятие, формула расчет и оценка значимости. Порядок применения инструмента анализа «Корреляция» надстройки MS Excel «Пакет анализа» для их расчета.
 5. Понятие и признаки мультиколлинеарности регрессионной модели.
 6. Уравнение однофакторной линейной модели. Порядок получения параметров модели средствами инструмента анализа «Регрессия» надстройки MS Excel «Пакет анализа».
 7. Проверка качества регрессионной модели (коэффициент множественной корреляции и его значение, коэффициент детерминации).
- Оценка значимости коэффициентов модели (критерии Стьюдента, Фишера).

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Цель лабораторной работы:



- освоить интеллектуальный инструмент СППР Deductor Studio, предназначенный для решения широкого спектра задач, связанных с обработкой структурированных и представленных в виде таблиц данных;
- научиться применять методы Data Mining для решения задач прогнозирования временных рядов на примере построения модели прогноза продаж

Результаты лабораторной работы:



- файлы формата СППР Deductor Studio с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.

Содержание отчёта:



1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Формулировка заданий и результаты их выполнения (распечатка ДО, макетов таблиц, страниц СППР Deductor Studio, слайдов презентации (при необходимости) и т.д.
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Выводы.
6. Список использованной литературы.

Контрольные вопросы:

1. Изобразите схематически модель взаимодействия аналитика, пользователя и данных.
2. Что представляет собой сценарий в Deductor Studio?
3. Что такое сезонность в прогнозировании?
4. Для чего используется автокорреляционный анализ?
5. Как определить существует ли зависимость между данными или нет?
6. Для чего нужен прогноз временного ряда?
7. Какой инструмент в системе Deductor используется для прогнозирования временных рядов? Опишите его.
8. Каково назначение обработчика «Нейросеть» системы Deductor?
9. Как обработчик «Нейросеть» можно использовать при прогнозировании? Приведите конкретный пример.
10. Что включает в себя понятие «обучение нейросети»?

ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК И ИХ АНАЛИЗ МЕТОДОМ РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ



Цель лабораторной работы:

- изучить виды экспертных методов получения информации и сферы их применения;
- освоить этапы проведения экспертной оценки и обработки ее результатов;
- приобрести практические навыки применения метода ранговой корреляции для анализа влияния факторов на исследуемый объект



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчет о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчете.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи. Анализ задачи, список факторов исследуемого объекта, форма анкеты для экспертов.
4. Список экспертов и заполненные анкеты (анкета 1, анкета 2) для каждого эксперта.
5. Исходная матрица рангов, преобразованная матрица рангов (при наличии совпадающих рангов) для двух видов анкет.
6. Результаты обработки экспертной информации средствами MS Excel (макеты таблиц с расчетными формулами, результаты расчетов коэффициентов: значимости, затрат на реализацию факторов и эффективности).
7. Анализ полученных результатов, выводы по результатам анализа.
8. Ответы на контрольные вопросы.
9. Выводы.
10. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Экспертные методы получения информации и сферы их применения.
2. Классификация методов экспертных оценок, краткая характеристика индивидуальных и коллективных методов.
3. Методы экспертного ранжирования. Метод априорного ранжирования: содержание, этапы, достоинства и недостатки. Пример расчета весовых коэффициентов (для $n=5$).
4. Метод ранговой корреляции, назначение и этапы.
5. Оценка согласованности мнений экспертов для метода ранговой корреляции (формулы для расчета коэффициента конкордации и критерия согласия Пирсона). Реализация модели в MS Excel.
6. Формулы для расчета коэффициента значимости, коэффициента затрат на реализацию и коэффициента эффективности факторов и их реализация в модели MS Excel.

ВЫБОР ТИПИЧНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ-АНАЛОГА МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ



Цель лабораторной работы:

- изучить принципы метода анализа иерархий;
- произвести оценку и выбор предприятия-аналога, используя данный метод



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи. Анализ задачи, список критериев хозяйственной деятельности оцениваемого предприятия.
4. Оценка важности критериев.
5. Заполненная матрица попарных сравнений.
6. Результаты обработки всех критериев и итоговые данные оценки поставщиков.
7. Анализ полученных результатов, выводы по результатам анализа.
8. Ответы на контрольные вопросы.
9. Выводы.
10. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные этапы метода анализа иерархий.
2. Опишите процесс попарного сравнения объекта по какому-либо признаку.
3. Опишите шкалу выбора приоритетов.
4. Перечислите основные свойства матрицы попарных сравнений.
5. Как происходит формирование вектора локальных приоритетов?
6. Опишите процесс свертки одной матрицы локальных приоритетов.
7. На основании чего происходит выбор оптимального варианта в методе анализа иерархий?

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



Цель лабораторной работы:

- изучить основные понятия теории массового обслуживания: виды и особенности систем массового обслуживания, их параметры и показатели эффективности;
- приобрести практические навыки построения и оптимизации моделей на основе теории массового обслуживания в среде MS Excel.



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Постановка задачи, исходные данные для моделирования.
4. Реализация в MS Excel модели системы массового обслуживания (макеты таблиц и описание формул MS Excel для построенной модели).
5. Результаты расчета параметров модели по варианту, анализ и выводы.
6. Ответы на контрольные вопросы.
7. Выводы.
8. Список использованных источников.

Контрольные вопросы:

1. Понятие теории массового обслуживания, цель и предмет ТМО, сферы применения.
2. Понятие и виды систем массового обслуживания.
3. Схема СМО и основные элементы.
4. Простейшие потоки СМО и их свойства.
5. Входные параметры СМО и расчет основных показателей функционирования СМО.
6. Многоканальная СМО без очереди и расчет ее параметров.
7. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.
8. Многоканальная СМО с ожиданием без ограничения на длину очереди.
9. Критерий оптимальности СМО и его математическое выражение.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО В MS EXCEL



Цель лабораторной работы:

- средствами электронных таблиц MS Excel получить решение сложной задачи;
- моделировать процессы с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло)



Результаты лабораторной работы:

- файлы формата MS Excel с выполненным заданием;
- отчёт о выполнении лабораторной работы;
- защита лабораторной работы в виде теста с отметкой результата преподавателем на отчёте.



Содержание отчёта:

1. Название и цель работы.
2. Список контрольных вопросов.
3. Формулировка заданий и результаты их выполнения (распечатка ДО, макетов таблиц, страниц книги Excel, слайдов презентации (при необходимости) и т.д.).
4. Ответы на контрольные вопросы.
5. Выводы.
6. Список использованной литературы.

Контрольные вопросы:

1. Что такое имитационное моделирование?
2. Назовите современные средства имитационного моделирования (с описанием в виде таблицы, не менее 10).
3. Что представляет собой метод Монте-Карло?
4. Опишите последовательность действий при реализации метода Монте-Карло.
5. Поясните основные отличительные особенности метода Монте-Карло от других методов оценки устойчивости финансовых проектов.
6. Каковы преимущества метода Монте-Карло по сравнению с анализом чувствительности?
7. В чем заключается специфика информации, которая может быть получена на основе имитационных методов?
8. Какие статистические функции MS Excel могут применяться при вычислении вероятностей?
9. Что представляет собой инструмент «Генерация случайных чисел»? Для чего он необходим?
10. Опишите (в виде таблицы) функции MS Excel, применяемые при оценке чувствительности инвестиционных проектов.

III. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

Проверка знаний по теме 1: Основы методологии исследования операций

1. Что является основным методом исследования операций крупного масштаба?

- a) Проведение натурных экспериментов
- b) Построение и изучение математических моделей
- c) Опрос экспертов
- d) Статистический анализ данных

2. Что понимается под «операцией» в исследовании операций?

- a) Математическое уравнение
- b) Управляемое мероприятие, направленное на достижение цели
- c) Случайный процесс
- d) Отдельное действие исполнителя

3. Какой из перечисленных элементов НЕ является обязательным для возникновения задачи принятия решений (ЗПР)?

- a) Наличие цели
- b) Наличие альтернативных линий поведения
- c) Наличие ограничивающих факторов
- d) Наличие полной информации о исходе каждой стратегии

4. Установите соответствие между понятием и его определением:

1. Критерий оптимальности	А. Стратегия, удовлетворяющая наложенным ограничениям
2. Допустимая стратегия	В. Активные средства, используемые для достижения цели (сырье, рабочая сила, деньги)
3. Оптимальная стратегия	С. Математическое выражение цели операции, позволяющее количественно оценить степень ее достижения
4. Ресурсы операции	Д. Стратегия, наилучшая в смысле выбранного критерия оптимальности
5. Детерминированная модель	Е. Учет случайных факторов, для которых известны вероятностные характеристики
6. Стохастическая модель	Г. Воспроизведение процесса в машинном времени для анализа результатов случайных воздействий
7. Имитационная модель	Н. Неучет неизвестных или случайных факторов, все параметры считаются фиксированными

Проверка знаний по теме 2: Задачи линейного программирования

1. *Что такое линейное программирование?*
 - a) Метод решения дифференциальных уравнений
 - b) Наука о методах исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции при линейных ограничениях
 - c) Метод статистического анализа данных
 - d) Инструмент для работы с базами данных

2. *Как называется задача, двойственная к задаче оптимального производственного планирования?*
 - a) Транспортная задача
 - b) Задача о назначениях
 - c) Задача минимизации затрат ресурсов
 - d) Задача нелинейной оптимизации

3. *Что показывает теневая цена (объективно обусловленная оценка) ресурса в двойственной задаче?*
 - a) Рыночную стоимость ресурса
 - b) На сколько единиц увеличится ЦФ при увеличении запаса этого ресурса на единицу
 - c) Себестоимость продукции
 - d) Величину штрафа за неиспользование ресурса

4. *Анализ чувствительности в ЗЛП НЕ отвечает на вопрос:*
 - a) Как изменятся объемы выпуска при изменении спроса?
 - b) Насколько можно увеличить запас дефицитного ресурса для улучшения ЦФ?
 - c) Каков диапазон изменения коэффициента ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?
 - d) Какой ресурс является наиболее выгодным для инвестирования?

5. *Какое условие необходимо выполнить, чтобы введение в оптимальный план нового вида продукции было выгодным?*
 - a) Его себестоимость должна быть ниже средней.
 - b) Его цена реализации должна превышать сумму затрачиваемых ресурсов, оцененных по теневым ценам.
 - c) Его производство не должно требовать дефицитных ресурсов.
 - d) Его удельная прибыль должна быть положительной.

6. *Если при решении ЗЛП на максимум прибыли некоторое ограничение-неравенство (например, по ресурсу) выполняется как строгое равенство в оптимальном решении, то этот ресурс является:*
 - a) Недефицитным, и его объективно обусловленная оценка равна нулю.
 - b) Дефицитным, и его объективно обусловленная оценка положительна.
 - c) Избыточным, и его можно уменьшить без ущерба для прибыли.
 - d) Фиктивным, и его следует исключить из модели.

7. Установите соответствие между типом ЗЛП и его описанием:

1. Транспортная задача	А. Определение максимального выпуска при ограниченных ресурсах
2. Задача о смеси	В. Оптимальное распределение перевозок однородного груза
3. Задача динамики производства	С. Создание смеси, отвечающей требованиям, при минимальной стоимости
4. Задача производственного планирования	Д. Оптимальное распределение выпуска и запасов во времени

8. Продолжите фразу: «Если в оптимальном плане некоторый ресурс израсходован не полностью, то его объективно обусловленная оценка равна _____».

9. Начните фразу: «_____ – это такая задача ЛП, в которой суммарный объем предложения равен суммарному объему спроса».

Проверка знаний по теме 3: Методы решения задач линейного программирования

1. Какой метод является универсальным итерационным алгоритмом для решения ЗЛП в общем виде?

- a) Графический метод
- b) Метод Ньютона
- c) Симплекс-метод
- d) Метод Монте-Карло

2. Что из перечисленного НЕ является этапом подготовки ЗЛП к решению симплекс-методом?

- a) Приведение к канонической форме
- b) Введение дополнительных переменных для неравенств типа
- c) Построение области допустимых решений на плоскости
- d) Замена переменной произвольного знака на разность двух неотрицательных

3. Надстройка MS Excel, используемая для решения ЗЛП, называется:

- a) Анализ данных
- b) Поиск решения (Solver)
- c) Подбор параметра
- d) Проверка орфографии

4. Что из перечисленного является целью симплекс-метода?

- a) Нахождение начального допустимого решения.
- b) Последовательный перебор всех вершин многогранника решений.
- c) Целенаправленный переход от одной вершины многогранника решений к другой с улучшением значения целевой функции на каждом шаге.
- d) Сведение задачи ЛП к системе дифференциальных уравнений.

5. Установите соответствие между методом и его ключевой характеристикой:

1. Графический метод	А. Перемещение по границам многогранника решений
2. Симплекс-метод	В. Движение к оптимальной внутри области допустимых решений
3. Методы внутренней точки	С. Используется только для задач с двумя переменными

6. Продолжите фразу: «Если в задаче требуется найти минимум функции f , то для применения симплекс-метода ее заменяют на функцию _____».

7. Начните фразу: «_____ – это переменные, которые вводятся в ограничения-неравенства для преобразования их в уравнения».

Проверка знаний по теме 4: Задачи многокритериальной оптимизации

1. В чем состоит основная проблема многокритериальной оптимизации (МКО)?

- a) Отсутствие математических методов решения
- b) Неоднозначность выбора «оптимального решения»
- c) Слишком долгое время вычислений
- d) Невозможность формализовать задачу

2. Как называется решение, которое нельзя улучшить по одному критерию, не ухудшив по другому?

- a) Доминирующее решение
- b) Эффективное решение (по Парето)
- c) Решение по Нэшу
- d) Компромиссное решение

3. Какой метод МКО предполагает нумерацию критериев в порядке убывания важности и назначение уступок?

- a) Метод главного критерия
- b) Метод свертки критериев
- c) Метод последовательных уступок
- d) Метод анализа иерархий

4. Принцип Парето, применительно к анализу ассортимента, гласит, что:

- a) 100% ассортимента дают 100% результата
- b) 50% ассортимента дают 50% результата
- c) 20% ассортимента дают 80% результата
- d) 80% ассортимента дают 20% результата

5. Установите соответствие между МКО и его сутью:

1. Метод последовательных уступок	А. Оптимизируется один ключевой критерий, остальные выступают в роли ограничений
2. Метод аддитивной свертки	В. Критерии нумеруются по важности, и для каждого назначается «уступка»
3. Метод главного критерия	С. Строится новая целевая функция как взвешенная сумма частных критериев

6. Продолжите фразу: «В методе аддитивной свертки для построения скалярного критерия частные критерии должны быть _____».

7. Начните фразу: «_____ – это ситуация, когда не существует решения, улучшающего сразу все целевые функции».

Проверка знаний по теме 5: Транспортные модели

1. Транспортная задача (ТЗ) называется закрытой, если:

- a) Все тарифы равны нулю
- b) Суммарный запас поставщиков равен суммарному спросу потребителей
- c) Число поставщиков равно числу потребителей
- d) Запрещены перевозки по некоторым маршрутам

2. Что делают для сведения открытой ТЗ к закрытой в случае дефицита?

- a) Вводят фиктивного потребителя
- b) Вводят фиктивного поставщика
- c) Увеличивают тарифы
- d) Исключают потребителей с наименьшим спросом

3. Какой из методов НЕ используется для решения транспортной задачи?

- a) Метод потенциалов
- b) Венгерский метод
- c) Симплекс-метод
- d) Метод Ньютона-Рафсона

4. Как правило элемент x_{ij} транспортной матрицы означает:

- a) Расстояние между i -м поставщиком и j -м потребителем
- b) Тариф перевозки от i -го поставщика j -му потребителю
- c) Объем перевозок от i -го поставщика j -му потребителю
- d) Прибыль от перевозки между i и j

5. Установите соответствие между методом решения транспортной задачи и его характеристикой:

1. Метод потенциалов 2. Венгерский метод 3. Симплекс-метод 4. Метод северо-западного угла	А. Модификация симплекс-метода, учитывающая специфическую структуру транспортной таблицы В. Универсальный алгоритм, который можно применить к транспортной задаче, записанной в канонической форме С. Специализированный алгоритм для решения задачи о назначениях (частного случая транспортной) D. Эвристический метод для нахождения начального опорного решения
--	--

6. Продолжите фразу: «Если в транспортной задаче требуется исключить поставку по определенному маршруту, то в соответствующей клетке матрицы тарифов устанавливают _____»

7. Начните фразу: «_____ – это частный случай транспортной задачи, в котором объемы спроса и предложения в каждом пункте равны 1».

8. Установите соответствие между ситуацией в транспортной задаче и предпринимаемым действием для ее разрешения:

1. Суммарные запасы превышают суммарный спрос	А. Ввод фиктивного потребителя с объемом спроса, равным дефициту
2. Суммарный спрос превышает суммарные запасы	В. Ввод фиктивного поставщика с объемом запаса, равным излишку
3. Требуется запретить перевозку по определенному маршруту	С. Установление в соответствующей клетке запретительно высокого тарифа
4. Необходимо обеспечить обязательную поставку по конкретному маршруту	Д. Фиксация объема перевозки и корректировка запасов и спроса

Проверка знаний по теме 6: Двойственность и анализ чувствительности

1. Целевая функция в двойственной задаче минимизируется, если в прямой задаче:
 - a) Целевая функция минимизируется
 - b) Целевая функция максимизируется
 - c) Система ограничений содержит только уравнения
 - d) Все переменные неотрицательны

2. Объективно обусловленные оценки (теневая цена) ресурсов находятся из решения:
 - a) Прямой задачи ЛП
 - b) Двойственной задачи ЛП
 - c) Транспортной задачи
 - d) Задачи нелинейного программирования

3. Если ресурс в оптимальном решении прямой задачи используется не полностью, то в двойственной задаче:
 - a) Соответствующая переменная равна нулю
 - b) Соответствующее ограничение выполняется как строгое неравенство
 - c) Целевая функция не определена
 - d) Соответствующая переменная будет положительной

4. Анализ чувствительности позволяет определить:
 - a) Только оптимальное решение
 - b) Устойчивость оптимального решения к изменениям параметров модели
 - c) Стоимость всех ресурсов на рынке
 - d) Время решения задачи на компьютере

5. Установите соответствие между элементом прямой задачи и двойственной:

1. Коэффициенты целевой функции (c_j) в прямой задаче 2. Правые части ограничений (b_i) в прямой задаче 3. Ограничение-неравенство ($\leq$) в прямой задаче на максимум	А. Становятся правыми частями в двойственной В. Становятся коэффициентами ЦФ в двойственной С. Соответствует условию неотрицательности ($y_i \geq 0$) в двойственной
---	--

6. Продолжите фразу: «Если в прямой задаче переменная может принимать любые значения (произвольного знака), то в двойственной задаче соответствующее ограничение будет _____»

7. Начните фразу: «_____ – это разность между правой и левой частью ограничения двойственной задачи, которая показывает, насколько стоимость ресурсов превышает стоимость продукции».

Проверка знаний по теме 7: Сетевые модели

1. Что такое критический путь в сетевом графике?

- a) Самый короткий путь от исходного до завершающего события
- b) Путь, состоящий только из фиктивных работ
- c) Наиболее протяженный по времени полный путь
- d) Путь с минимальной стоимостью

2. Ранний срок свершения события – это:

- a) Предельно допустимый срок свершения события
- b) Самый поздний момент начала всех работ, выходящих из события
- c) Самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие событию
- d) Резерв времени события

3. Работа, не требующая затрат времени и ресурсов, а показывающая только логическую связь, называется:

- a) Действительная работа
- b) Ожидание
- c) Фиктивная работа
- d) Критическая работа

4. Полный резерв времени работы показывает:

- a) Насколько можно увеличить продолжительность работы, не влияя на сроки последующих работ
- b) Максимальное время, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, не нарушая критический срок
- c) Время простоя ресурсов
- d) Разницу между ранним и поздним сроком свершения события

5. Установите соответствие между понятием сетевого графика и его описанием:

1. Критический путь	А. Работа, не требующая затрат времени и ресурсов, но показывающая логическую зависимость между работами
2. Фиктивная работа	В. Промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события без нарушения сроков завершения проекта
3. Резерв времени события	С. Процесс, не требующий трудовых ресурсов, но имеющий продолжительность во времени
4. Ожидание	Д. Наиболее протяженный по времени путь от исходного до завершающего события, определяющий минимальный срок выполнения проекта

6. Продолжите фразу: «Если у события ранний и поздний сроки совпадают, то это событие является _____»

7. Начните фразу: «_____ – это графическое представление календарного плана, на котором каждая работа изображается горизонтальным отрезком, длина которого соответствует ее продолжительности».

8. Продолжите фразу: «Если полный резерв времени работы равен нулю, то эта работа является _____»

9. Начните фразу: «_____ – это разность между поздним и ранним сроками свершения события, показывающая максимальное время, на которое можно задержать наступление этого события без срыва общего срока выполнения проекта.»

Проверка знаний по теме 8:

Детерминированные модели динамического программирования

1. Основной принцип, лежащий в основе динамического программирования, называется:

- a) Принцип равновесия Нэша
- b) Принцип Парето
- c) Принцип оптимальности Беллмана
- d) Принцип неопределенности

2. Динамическое программирование эффективно применяется для решения задач:

- a) С большим количеством переменных и многоэтапных
- b) Линейных с двумя переменными
- c) Нелинейных с одной переменной
- d) Статических с неограниченными ресурсами

3. Как называется процедура в динамическом программировании, когда решение ищется от конечного состояния к начальному?

- a) Прямой ход
- b) Обратный ход
- c) Итеративное приближение
- d) Стохастическая аппроксимация

4. Какой из перечисленных примеров является типичной задачей динамического программирования?

- a) Решение системы линейных уравнений
- b) Задача замены оборудования
- c) Расчет параметров сетевого графика
- d) Нахождение коэффициента корреляции

5. Что такое «принцип оптимальности Беллмана» в динамическом программировании?

- a) Оптимальная стратегия должна обеспечивать максимальный выигрыш на текущем шаге
- b) Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным
- c) Оптимальное решение находится путем полного перебора всех возможных вариантов
- d) Управление на каждом шаге должно выбираться случайным образом

6. Какой из перечисленных примеров НЕ является типичной задачей динамического программирования?

- a) Определение оптимального плана замены оборудования
- b) Распределение инвестиций между проектами
- c) Решение системы линейных уравнений методом Гаусса
- d) Задача о загрузке рюкзака

7. Установите соответствие между задачей и ее принадлежностью к динамическому программированию:

1. Задача о загрузке (о рюкзаке) 2. Задача замены оборудования 3. Задача инвестирования	А. Определение оптимального времени замены старого оборудования на новое В. Распределение ограниченного ресурса между несколькими проектами для максимизации дохода С. Определение набора предметов с максимальной суммарной ценностью, не превышающей весового ограничения
---	---

8. Продолжите фразу: «В динамическом программировании сложная многошаговая задача разбивается на последовательность _____».

9. Начните фразу: «_____ – это функция, которая определяет оптимальное значение выигрыша на оставшихся шагах при любом состоянии системы на текущем шаге».

Проверка знаний по теме 9: Модели управления запасами

1. Какие издержки в модели Уилсона учитываются при определении оптимального размера заказа?

- a) Только затраты на хранение
- b) Только организационные издержки на заказ
- c) Организационные издержки и затраты на хранение
- d) Только стоимость товара

2. В ABC-анализе к группе А обычно относят:

- a) Наименее важные позиции, составляющие 50% номенклатуры
- b) Позиции, занимающие среднее положение
- c) Наиболее важные позиции, дающие 70-80% эффекта при 20% номенклатуры
- d) Позиции с нерегулярным спросом

3. XYZ-анализ классифицирует товары на основе:

- a) Их стоимости
- b) Стабильности и предсказуемости спроса (коэффициента вариации)
- c) Веса или объема
- d) Сроков годности

4. Установите соответствие между методом анализа запасов и его основной целью:

ABC-анализ	А. Классификация по стабильности потребления
XYZ-анализ	В. Определение оптимального размера заказа для минимизации совокупных издержек
Модель Уилсона (EOQ)	С. Ранжирование по степени важности (вкладу в общий результат)

5. Продолжите фразу: «Точка заказа – это такой уровень запаса, при достижении которого _____»

6. Начните фразу: «_____ – это метод управления запасами, основанный на принципе Парето, при котором номенклатура делится на три группы по степени важности».

Проверка знаний по теме 10: Модели прогнозирования

1. Метод Дельфи характеризуется:
 - a) Очным открытым обсуждением
 - b) Заочным анонимным опросом экспертов в несколько туров
 - c) Голосованием поднятием рук
 - d) Мозговым штурмом без критики
2. Коэффициент конкордации используется для:
 - a) Оценки точности прогноза
 - b) Проверки согласованности мнений экспертов
 - c) Определения регрессионной зависимости
 - d) Расчета дисперсии случайной величины
3. Какой из методов НЕ является методом экспертных оценок?
 - a) Мозговой штурм
 - b) Метод наименьших квадратов
 - c) Метод Дельфи
 - d) Метод комиссий
4. Какой метод экспертных оценок предполагает многотуровый анонимный опрос с обратной связью и статистической обработкой результатов?
 - a) Мозговой штурм
 - b) Метод Дельфи
 - c) Метод парных сравнений
 - d) Анкетирование
5. Что оценивает коэффициент конкордации (W) в экспертных исследованиях?
 - a) Компетентность каждого отдельного эксперта
 - b) Стоимость проведения экспертизы
 - c) Степень согласованности мнений экспертов
 - d) Точность прогноза
6. Установите соответствие между методом экспертных оценок и его ключевой особенностью:

Мозговой штурм	А. Заочный, анонимный, многотуровый опрос
Метод Дельфи	В. Генерация идей без критики на первом этапе
Метод парных сравнений	С. Попарное сравнение всех факторов для построения шкалы предпочтений

7. Продолжите фразу: «Если коэффициент конкордации W близок к 1, это означает, что мнения экспертов _____»

Проверка знаний по теме 11: Основы понятия теории игр

1. *Антагонистическая игра – это игра:*
 - a) С нулевой суммой
 - b) С ненулевой суммой
 - c) Кооперативная
 - d) С бесконечным числом стратегий
2. *Критерий Вальда (максиминный) основан на принципе:*
 - a) Крайнего оптимизма
 - b) Минимального риска
 - c) Крайнего пессимизма
 - d) Равновероятности состояний природы
3. *Что такое «седловая точка» в матричной игре?*
 - a) Точка, в которой игроки могут договориться о кооперации
 - b) Пара стратегий, где выигрыш первого игрока одновременно минимален в своем столбце и максимален в своей строке
 - c) Пара стратегий, где выигрыш первого игрока одновременно максимален в своем столбце и минимален в своей строке
 - d) Точка переговоров между игроками
4. *Какой критерий выбора стратегии в условиях неопределенности основан на принципе «минимального сожаления»?*
 - a) Критерий Вальда
 - b) Критерий Сэвиджа
 - c) Критерий Гурвица
 - d) Критерий Лапласа
5. *Что означает ситуация, когда цена игры в смешанных стратегиях находится между нижней и верхней ценой игры?*
 - a) Игра имеет решение в чистых стратегиях
 - b) Игра не имеет решения
 - c) Игроки должны использовать смешанные стратегии для достижения оптимального результата
 - d) Игра является кооперативной
6. *Продолжите фразу: «Стратегия, при которой игрок случайным образом выбирает чистую стратегию в соответствии с некоторым распределением вероятностей, называется ...»*
7. *Начните фразу: «_____ – это цена игры, которая достигается при использовании оптимальных смешанных стратегий».*

Проверка знаний по теме 12: Модели теории массового обслуживания

1. Система массового обслуживания (СМО) включает в себя:
 - a) Только каналы обслуживания
 - b) Только входящий поток заявок
 - c) Входящий поток, очередь и каналы обслуживания
 - d) Только выходящий поток обслуженных заявок

2. Простейший (пуассоновский) поток заявок характеризуется:
 - a) Детерминированными интервалами между заявками
 - b) Отсутствием последствия, стационарностью и ординарностью
 - c) Групповым поступлением заявок
 - d) Бесконечной длиной очереди

3. Интенсивность обслуживания μ – это:
 - a) Среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени
 - b) Среднее число заявок, обслуживаемых одним каналом за единицу времени
 - c) Вероятность отказа в обслуживании
 - d) Среднее время пребывания заявки в системе

4. Если интенсивность входного потока λ превышает суммарную интенсивность обслуживания ($\lambda > n\mu$), то система:
 - a) Работает стабильно
 - b) Не справляется с нагрузкой, очередь неограниченно растет
 - c) Имеет нулевую вероятность отказа
 - d) Все каналы простаивают

5. Продолжите фразу: «СМО называется одноканальной, если _____»

6. Начните фразу: «_____ – это состояние СМО, при котором поступившая заявка не может быть принята к обслуживанию (например, из-за занятости всех каналов и ограниченной очереди).»

7. Установите соответствие между характеристикой СМО и ее описанием:

1. Интенсивность входного потока (λ)	А. Среднее число заявок, которое один канал может обслужить в единицу времени
2. Интенсивность обслуживания (μ)	В. Отношение интенсивности входного потока к интенсивности обслуживания
3. Коэффициент загрузки (ρ)	С. Вероятность того, что все каналы системы свободны в произвольный момент времени
4. Вероятность простоя системы (P_0)	Д. Среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени

Проверка знаний по теме 13: Имитационное моделирование

1. *Имитационное моделирование – это:*
 - a) Аналитическое решение системы уравнений
 - b) Проведение натурного эксперимента
 - c) Процесс исследования реальной системы путем экспериментов с ее компьютерной моделью
 - d) Статическое описание системы
2. *Основное преимущество имитационного моделирования перед аналитическими моделями:*
 - a) Высокая скорость получения точного решения
 - b) Возможность исследования сложных систем, не поддающихся аналитическому описанию
 - c) Отсутствие необходимости в данных
 - d) Всегда дает 100% точный прогноз
3. *Метод Монте-Карло в имитационном моделировании используется для:*
 - a) Решения систем линейных уравнений
 - b) Генерации случайных чисел и моделирования стохастических процессов
 - c) Построения диаграмм
 - d) Оптимизации детерминированных функций
4. *Какой этап НЕ является этапом имитационного моделирования?*
 - a) Постановка задачи и сбор данных
 - b) Разработка и верификация модели
 - c) Проведение вычислительных экспериментов на модели
 - d) Гарантированное нахождение глобального оптимума
5. *Что такое «верификация имитационной модели»?*
 - a) Проверка соответствия модели реальной системе
 - b) Проверка правильности программной реализации модели
 - c) Определение оптимальных параметров модели
 - d) Оценка стоимости разработки модели
6. *Какой из перечисленных методов НЕ относится к имитационному моделированию?*
 - a) Метод Монте-Карло
 - b) Дискретно-событийное моделирование
 - c) Система массового обслуживания
 - d) Аналитическое решение дифференциальных уравнений
7. *Продолжите фразу: «Генераторы псевдослучайных чисел используются в имитационном моделировании для _____»*
8. *Начните фразу: «_____ – это численный метод, применяемый для моделирования случайных величин и функций, вероятностные характеристики которых совпадают с решениями аналитических задач».*

9. Установите соответствие между понятием и его описанием в контексте имитационного моделирования:

1. Верификация модели 2. Валидация модели 3. Сценарий моделирования	А. Проверка, правильно ли модель отражает реальную систему (соответствие цели) В. Проверка правильности работы самой модели (отладка программного кода) С. Определенный набор входных данных и условий для проведения эксперимента на модели
---	--

Проверка знаний по теме 14: Основы методологии исследования операций

1. Ключевое свойство марковского процесса:

- a) Зависимость будущего состояния только от текущего, а не от всей предыстории
- b) Зависимость будущего состояния от всех предыдущих состояний
- c) Детерминированность всех переходов
- d) Независимость состояний друг от друга

2. Что такое цепь Маркова?

- a) Графическое изображение сетевого графика
- b) Последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, обладающая свойством марковости
- c) Система дифференциальных уравнений
- d) Метод линейного программирования

3. В марковском процессе принятия решений решение, выбираемое в каждом состоянии, влияет на:

- a) Только на немедленное вознаграждение
- b) Только на вероятности переходов
- c) Как на немедленное вознаграждение, так и на вероятности переходов между состояниями
- d) Ни на что не влияет

4. Для нахождения оптимальной стратегии в марковском процессе с дискретным временем часто используется:

- a) Метод Симпсона
- b) Алгоритм динамического программирования (итерация по значениям или стратегиям)
- c) Формула Байеса
- d) Критерий Вальда

5. Установите соответствие между понятием марковского процесса и его определением:

1. Состояние системы	А. Вероятность перехода из состояния i в состояние j за один шаг
2. Вероятность перехода	В. Описание ситуации, в которой может находиться система в данный момент времени
3. Стационарное распределение	С. Распределение вероятностей по состояниям, которое не меняется с течением времени при заданных вероятностях переходов

6. Продолжите фразу: «Если вероятности переходов в марковской цепи не зависят от номера шага, то такая цепь называется _____»

**IV. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Белорусский национальный технический университет

УТВЕРЖДАЮ

Ректор

Белорусского национального
технического университета

С.В. Харитончик

30.12.2024

Регистрационный № УД-МСФ28-15 /уч.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

**Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности
6-05-0718-01 «Инженерная экономика»,
профилизация «Бизнес-процессы промышленных предприятий»**

2024 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 6-05-0718-01-2023 и учебных планов специальности 6-05-0718-01 «Инженерная экономика» профилизация «Бизнес-процессы промышленных предприятий» (рег. № МСФ28д-20/уч утв. 30.04.2024, рег. № МСФзи-1/уч утв. 03.04.2023)

СОСТАВИТЕЛИ:

Л.В. Бутор, старший преподаватель кафедры «Инженерная экономика» Белорусского национального технического университета, магистр экономических наук

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.М. Авсиевич, декан факультета информационных технологий и робототехники, кандидат технических наук;

Н.Д. Попова, директор ООО «Лерой»

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой «Инженерная экономика» Белорусского национального технического университета
(протокол № 2 от 08.10.2024)

Заведующий кафедрой _____ Т.А. Сахнович

Методической комиссией машиностроительного факультета Белорусского национального технического университета (протокол № 9 от 30.10.2024 г.)

Председатель методической
комиссии _____ И.В. Швец

Научной библиотекой БНТУ _____ Т.И. Бирюкова

Научно-методическим советом Белорусского национального технического университета (протокол № 7 секции № 1 от 30.12.2024 г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Исследование операций» разработана для специальности 6-05-0718-01 «Инженерная экономика» профилизация «Бизнес-процессы промышленных предприятий».

«Исследование операций» – это прикладная математическая учебная дисциплина, которая занимается вопросами количественного обоснования решений по управлению целенаправленными процессами в сложных системах.

Целью изучения дисциплины «Исследование операций» является ознакомление обучающихся с основными понятиями и методами исследования операций, выработка системного экономического мышления, формирование навыков построения математических моделей, проведения экономических расчетов и использования их для обоснования экономических решений.

Основной задачей применения методов исследования операций в практике управления экономическими системами является повышение их эффективности за счет максимального использования информации о ситуации, в которой осуществляется принятие управленческих решений.

Кроме того, задачами дисциплины являются:

- изучение постановок и содержания задач исследования операций;
- изучение методики построения моделей исследования операций;
- приобретение навыков теоретического исследования моделей и оптимизационных задач;
- изучение подходов к решению задач;
- приобретение навыков в использовании результатов математического моделирования для выработки и обоснования управленческих решений.

Учебная дисциплина базируется на знаниях, полученных при изучении таких дисциплин как: «Высшая математика», «Информационные технологии в экономике», «Экономика организации», «Статистика». В основе дисциплины лежат фундаментальные положения математики и экономики. Знания и умения, полученные обучающимися при изучении данной дисциплины, необходимы для освоения последующих специальных дисциплин и дисциплин специализации, связанных с планированием и прогнозированием, оценкой и управлением, таких как «Логистика», «Управление проектами».

В результате изучения учебной дисциплины «Исследование операций» студент должен

знать:

- типы задач исследования операций, их особенности и свойства;
- методологию формализации и решения задач исследования операций;
- основные принципы принятия оптимальных решений;
- модели и методы решения задач исследования операций;

уметь:

- строить математические модели, представлять их возможности и ограничения;
- использовать формальные методы при решении задач исследования операций;

– решать практические задачи принятия решений с использованием методов исследования операций;

иметь навык:

- решения задач организационного управления;
- математического решения задач исследования операций, информационными средствами и приложениями для построения математических моделей;
- анализа и решения задач по управлению целенаправленными процессами.

Освоение данной учебной дисциплины обеспечивает формирование следующей компетенции: принимать научно-обоснованные решения, владеть математическими количественными методами решения оптимизационных задач в экономике.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины отведено:

- для очной (дневной) формы получения высшего образования, всего 100 ч., из них аудиторных – 68 часов;
- для заочной формы получения высшего образования, интегрированного со средним специальным образованием (профилизация «Бизнес-процессы промышленных предприятий») всего 100 ч., из них аудиторных – 8 часов.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Очная (дневная) форма получения высшего образования						
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации	Форма промежуточной аттестации
2	4	34	34	-	Лабораторная работа	Зачёт

Таблица 2

Заочная форма получения высшего образования, интегрированного со средним специальным образованием						
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма текущей аттестации	Форма промежуточной аттестации
2	4	4	4	-	Лабораторная работа	Зачёт

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

РАЗДЕЛ I ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Тема 1.1 Основы методологии исследования операций

Основные понятия исследования операций: операции, решение; показатель эффективности. История развития исследования операций. Разновидности задач ИСО: детерминированные и стохастические. Природа неизвестных факторов. Методы и модели обоснования решений. Типовые модели исследования операций. Проблема выбора решения в условиях неопределенности. Многокритериальные задачи.

РАЗДЕЛ II ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Тема 2.1 Задачи линейного программирования

Постановка задачи линейного программирования. Формы представления задачи линейного программирования.

Линейные модели экономических и производственных процессов: задача планирования производства; использование мощностей оборудования; моделирование процессов перевозок и назначения; модели задач развития и размещения; модели распределительных процессов; задача о раскрое или о минимизации обрезков.

Тема 2.2 Методы решения задач линейного программирования

Графический метод решения задачи линейного программирования. Анализ решения (модели) на чувствительность: изменение коэффициентов целевой функции; изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений.

Аналитический метод решения задачи линейного программирования (симплекс-метод).

Двойственность в линейном программировании: симметричная пара двойственных задач; экономический смысл двойственной задачи.

Тема 2.3 Задачи многокритериальной оптимизации

Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Проблемы многокритериальной оптимизации. Классификация методов решения задач многокритериальной оптимизации: методы свертывания критериев, методы ограничения на критерии, методы последовательного применения критериев, методы целевого программирования. Понятие эффективной точки (точки Парето).

Тема 2.4 Транспортные модели

Определение транспортной модели. Нетрадиционные транспортные модели. Транспортная модель с промежуточными пунктами.

Постановка транспортной задачи. Методы составления первоначального плана перевозок: метод северо-западного угла; метод наименьшей стоимости.

Алгоритм метода потенциалов: вычисление потенциалов; проверка оптимальности плана; перераспределение поставок. Распределительный метод решения транспортной задачи.

Тема 2.5 Двойственность и анализ чувствительности

Определение двойственной задачи. Соотношения между оптимальными решениями прямой и двойственной задачи. Экономическая интерпретация двойственности. Двойственный симплекс-метод. Анализ чувствительности оптимального решения.

Тема 2.6 Сетевые модели

Методы сетевого планирования. Описание объектов экономики в форме графа. Понятие задачи сетевого планирования и управления и ее применение. Критический путь и критический срок. Расчет временных параметров сетевого графика. Резервы времени работ. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ. Линейный график. Понятие оптимизации сетевых графиков. Оптимизация по ресурсам. Зависимость стоимости выполнения работы от ее продолжительности. Оптимизация сетевого графика по времени при фиксированном времени выполнения комплекса работ и при ограниченных затратах ускорение выполнения комплекса работ. Оптимизация по стоимости при фиксированном и произвольном времени выполнения работ. Оптимальный безрезервный план.

Тема 2.7 Детерминированные модели динамического программирования

Рекуррентная природа вычислений в динамическом программировании. Некоторые положения динамического программирования. Задача о загрузке. Задача о планировании рабочей силы. Задача замены оборудования. Задача инвестирования.

Тема 2.8 Модели управления запасами

Особенности стратегий управления запасами. Особенности моделей управления запасами. Основные типы моделей управления запасами.

Классическая задача экономичного размера запаса. Модель производственных поставок. Модель поставок со скидкой. Представление модели управления запасами случайным процессом.

РАЗДЕЛ III ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Тема 3.1 Модели прогнозирования

Прогнозирование с использованием скользящего среднего. Экспоненциальное сглаживание. Регрессионный анализ. Метод экспертных оценок. Балансовый метод. Программно-целевой метод.

Тема 3.2 Основные понятия теории игр

Игровые методы обоснования решений. Матричная игра и моделирование ситуации риска в экономике. Понятие об игровых моделях. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры. Решение игр в смешанных стратегиях. Геометрическая интерпретация игры. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования. Метод дерева решений.

Тема 3.3 Модели теории массового обслуживания

Понятие о системе массового обслуживания (СМО). Примеры СМО в экономике. Элементы СМО. Структура СМО. Предмет теории массового обслуживания. Определение потока случайных событий. Поток случайных событий: стационарный, ординарный, без последствия. Понятие простертого потока. Частота поступления требований и длительность обслуживания в простейшем потоке. Графическая модель СМО. Классификация моделей СМО. Одноканальная и многоканальная СМО с отказами. Состояния СМО, граф состояний, интенсивность нагрузки, перечень показателей эффективности, примеры. Одноканальная и многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. Состояния СМО, граф состояний, перечень показателей эффективности, примеры. Одноканальная и многоканальная СМО с ожиданием без ограничения на длину очереди. Состояния СМО, граф состояний, уровень загрузки системы (нагрузка на один канал), перечень показателей эффективности, примеры. Определение оптимальных параметров СМО.

Тема 3.4 Имитационное моделирование

Типы имитационных моделей. Метод Монте-Карло. Идея, назначение и область применимости метода. Элементы дискретного моделирования: общее определение событий, генерирование выборочных значений. Генерирование случайных чисел. Методы сбора статистических данных.

Тема 3.5 Марковские процессы принятия решений

Марковские случайные процессы. Понятие о марковском процессе. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Финальные вероятности состояний.

РАЗДЕЛ IX НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Тема 4.1 Классическая теория оптимизации

Экстремальные задачи без ограничений. Необходимы и достаточные условия существования экстремума. Задачи на экстремум при наличии ограничений.

Алгоритмы решения задач без ограничений. Методы прямого поиска. Градиентный метод. Алгоритмы решения задач с ограничениями.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Иное		
	4 семестр						
1	ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ						
1.1.	Основы методологии исследования операций	2					
2	ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ						
2.1.	Задачи линейного программирования	2					
2.2.	Методы решения задач линейного программирования	2					
	Лабораторное занятие № 1. Решение задач линейного программирования в среде MS Excel			4			защита отчета о лабораторной работе
2.3.	Задачи многокритериальной оптимизации	2					
	Лабораторное занятие № 2. Решение задач многокритериальной оптимизации			2			защита отчета о лабораторной работе
2.4.	Транспортные модели	2					
	Лабораторное занятие № 3. Построение моделей транспортных задач в среде MS Excel			4			защита отчета о лабораторной работе
2.5.	Двойственность и анализ чувствительности	2					
2.6.	Сетевые модели	4					
	Лабораторное занятие № 4. Сетевое планирование. Оптимизация сетевых графиков по времени и ресурсам			4			защита отчета о лабораторной работе
2.7.	Детерминированные модели динамического программирования	2					
2.8.	Модели управления запасами	2					
	Лабораторное занятие № 5. Разработка средствами MS Excel моделей управления запасами			4			защита отчета о лабораторной работе

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСП	Форма контроля
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Иное		
3	ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ						
3.1.	Моделирование прогнозирования	2					
	Лабораторное занятие № 6. Применение надстройки MS Excel «Пакет анализа» для корреляционно-регрессионного анализа			2			защита отчета о лабораторной работе
	Лабораторное Занятие № 7. Прогнозирование с помощью нейронной сети в СППР Deductor Studio			4			защита отчета о лабораторной работе
3.2.	Основные понятия теории игр	4					
	Лабораторное занятие № 8. Применение экспертных оценок и их анализ методом ранговой корреляции			2			защита отчета о лабораторной работе
	Лабораторное занятие № 9. Выбор типичного предприятия-аналога методом анализа иерархий			2			защита отчета о лабораторной работе
3.3.	Модели теории массового обслуживания	2					
	Лабораторное занятие № 10. Оптимизация процессов на основе теории массового обслуживания			4			защита отчета о лабораторной работе
3.4.	Имитационное моделирование	2					
	Лабораторное занятие № 11. Реализация метода Монте-Карло в MS Excel			2			защита отчета о лабораторной работе
3.5.	Марковские процессы принятия решений	2					
4	НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ						
4.1.	Классическая теория оптимизации	2					Выполнение расчетно-графической работы
	Итого за семестр	34	-	34			Зачёт
	Всего аудиторных часов:	68					

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения образования, интегрированного со средним специальным образованием⁵

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Иное		
	4 семестр						
1	ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ						
1.1.	Основы методологии исследования операций *						
2	ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ						
2.1.	Задачи линейного программирования *						
2.2.	Методы решения задач линейного программирования	2					
2.3.	Задачи многокритериальной оптимизации *						
2.4.	Транспортные модели *						
2.5.	Двойственность и анализ чувствительности *						
2.6.	Сетевые модели	2					
2.7.	Детерминированные модели динамического программирования *						
2.8.	Модели управления запасами *						
3	ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ						
3.1.	Моделирование прогнозирования *						
	Лабораторное Занятие № 1. Прогнозирование с помощью нейронной сети в СПИР Deductor Studio			2			защита отчета о лабораторной работе
3.2.	Основные понятия теории игр *						
3.3.	Модели теории массового обслуживания *						
3.4.	Имитационное моделирование *						

⁵ Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студента.

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Иное		
	Лабораторное занятие № 2. Реализация метода Монте-Карло в MS Excel			2			защита отчета о лабораторной работе
3.5.	Марковские процессы принятия решений *						
4	НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ						
4.1.	Классическая теория оптимизации *						Выполнение расчетно-графической работы
	Итого за семестр	4	-	4			Зачёт
	Всего аудиторных часов:	8					

* - тема пройдена на уровне среднего специального образования

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учебное пособие / Е.С. Вентцель. – М.: Юстиция, 2002 – 192 с.
2. Гурко, А.И. Экономико-математические методы и модели: пособие для студентов и магистрантов, обучающихся по специальности направления образования «Экономика и организация производства» / А.И. Гурко. – Минск: БНТУ, 2020. – 236 с.
3. Пинчук, Т.Г. Исследование операций в экономике: учебно-методическое пособие для направлений специальности 1-40 05 01-02 "Информационные системы и технологии (в экономике)", 1-40 05 01-08 "Информационные системы и технологии (в логистике)" / Т. Г. Пинчук, С. А. Поттосина; Министерство образования Республики Беларусь, Учреждение образования "Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники", Инженерно-экономический факультет, Кафедра экономической информатики. – Минск: БГУИР, 2017. – 114 с.: ил.

Дополнительная литература

4. Афанасьев, М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учеб. пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М.: ИНФРАМ, 2003. – 256 с.
5. Болотский А.В. Исследование операций и методы оптимизации / А.В. Болотский, О.А. Кочеткова - Москва : Лань, 2020. – 116 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учебное пособие / Е.С. Вентцель. – М.: Юстиция, 2019 – 192 с.
7. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под ред. В. В. Федосеева. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 328 с
8. Диксит, А. Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни : пер. с англ. Н. Яцюк / А. Диксит, Б. Нэлбафф - 2-е изд. - Москва : Манн, Иванов и Фербер, 2016. – 457 с.
9. Зубарев, Ю.М. Математические методы коллективного принятия решений: Учебное пособие / Ю.М. Зубарев. – СПб.: Лань, 2015. – 256 с.
10. Колбин, В.В. Математические методы коллективного принятия решений: Учебное пособие / В.В. Колбин. – СПб.: Лань, 2015. – 256 с.
11. Красс, М.С. Математика в экономике: математические методы и модели: Учебник для бакалавров / М.С. Красс. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 541 с.
12. Леньков, И. И. Моделирование управленческих решений : практикум для студентов учреждений высшего образования, осваивающих образовательную программу I степени высшего образования по специальности 1-26 01 03 Государственное управление и экономика / И. И. Леньков ; Академия упр. при Президенте Респ. Беларусь. - Минск : Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2020. - 108, [1] с. : ил
13. Минюк Е. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. Математические методы и модели в экономике. Учебное пособие - Минск: ТетраСистемс, 2012. – 432с .
14. Надеждин, Е. Н., Смирнова, Е. Е., Варзаков, В. С. Математические методы и модели в экономике: учебное пособие для студентов экономических специальностей. – Тула : Автономная некоммерческая организация ВПО «Институт экономики и управления», 2011. – 249 с.
15. Новиков, А. И. Исследование операций в экономике : учебник / А. И. Новиков. - 3-е изд. - Москва : Дашков и К°, 2022. – 352 с. : ил., табл., граф.
16. Писарук, Н. Н. Введение в теорию игр / Н. Н. Писарук. – Минск : БГУ, 2013. – 233 с.
17. Попов, В.Ю. Инвестиции: математические методы: Учебное пособие / В.Ю. Попов, А.Б. Шаповал. – М.: Форум, 2011. – 144 с.

18. Похабов, В.И. Экономико-математические методы и модели. Практикум: пособие для студентов экономических специальностей: в 2 ч. /В.И.Похабов, Н.Д.Попова. – Минск: БНТУ, 2009. – Ч. 2. – 95 с.
19. Просветов, Г. И. Математические методы и модели в экономике. Учебно – практическое пособие. – М.: Альфа-Пресс , 2014. – 344 с.
20. Смагин, Б.И. Экономико-математические методы / Б.И. Смагин. – М.: КолосС, 2012. – 271 с.
21. Таха Х. Введение в исследование операций. – 7-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
22. Таха Хемди А. Исследование операций. М.: Диалектика, 2018. – 1056 с.
23. Тихомиров, Н. П. Эконометрика / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина. – М.: Экзамен, 2017. – 512 с.
24. Якупова, Г. И. Двойственность и анализ чувствительности / Г. И. Якупова // Аллея науки. – 2017. – Т. 1, № 16. – С. 428-430.

Нормативные правовые акты

25. Гражданский кодекс Республики Беларусь от 28.10.1998 г. (с изменениями и дополнениями от 29.12.06 г. № 193-З) – М., Амалфея, 2007.
26. Конституция Республики Беларусь: принята на республиканском референдуме 24 ноября 1996 г. // Национальный реестр правовых актов Республики Беларусь. 1999, № 1.
27. Трудовой кодекс Республики Беларусь: принят 26.06.1999 г. // Ведомости Национального собрания Республики Беларусь, 1999, № 26-27.

Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента используется следующий диагностический инструментариий:

- устный и письменный опрос во время лабораторных занятий;
- защита выполненных на лабораторных занятиях работ;
- защита выполненных в рамках управляемой самостоятельной работы индивидуальных заданий;
- выполнение расчетно-графической работы;
- сдача зачёта.

Примерная тематика расчетно-графических работ

1. Решение простых и двойственных задач линейного программирования.
2. Решение задач многокритериальной оптимизации.
3. Сетевые методы планирования и управления.
4. Модели управления запасами.
5. Корреляционно-регрессионный анализ.
6. Модели прогнозирования.
7. Экспертная оценка управленческих решений (метод парных сравнений).
8. Метод анализа иерархий.
9. Теория массового обслуживания.
10. Имитационное моделирование.

Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся при проведении промежуточной аттестации в форме зачёта

№ п/п	Отметка	Критерии
1	Зачтено	достаточные знания в объеме учебной программы УВО по учебной дисциплине; использование научной терминологии, грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы и обобщения; владение инструментарием учебной дисциплины, модуля (методами комплексного анализа, техникой информационных технологий), умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач; способность самостоятельно применять типовые решения в рамках, учебной программы УВО по учебной дисциплине; усвоение основной литературы, рекомендованной учебной программой УВО по учебной дисциплине; умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой учебной дисциплине и давать им сравнительную оценку; активная самостоятельная работа на практических, лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий
2	Не зачтено	недостаточно полный объем знаний в объеме учебной программы УВО по учебной дисциплине;

№ п/п	Отметка	Критерии
		знание части основной литературы, рекомендованной учебной программой УВО по учебной дисциплине; использование научной терминологии, изложение ответа на вопросы с существенными, логическими ошибками; слабое владение инструментарием учебной дисциплины, некомпетентность в решении стандартных (типовых) задач; неумение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях изучаемой учебной дисциплины; пассивность на лабораторных занятиях, низкий уровень культуры исполнения заданий

Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся при проведении текущей аттестации в форме отчета о выполнении лабораторных работ

№ п/п	Отметка	Критерии
1	Зачтено	Самостоятельное воспроизведение по образцу операций и приемов при проведении лабораторных работ. Самостоятельное и/или с помощью преподавателя выполнение и оформление по заданному алгоритму отчета по лабораторной работе с выводами.
2	Не зачтено	Воспроизведение под руководством преподавателя отдельных операций и приемов при проведении лабораторных работ. Отсутствие оформленного отчета по лабораторной работе. Неявка на лабораторное занятие.

Критерии оценки результатов учебной деятельности обучающихся при проведении текущей аттестации в форме расчетно-графической работы

№ п/п	Отметка	Критерии
1	Зачтено	Выполнение и оформление без ошибок расчетно-графической работы или с несущественными ошибками, которые исправляются с помощью преподавателя.
2	Не зачтено	Воспроизведение по образцу (не в полном объеме и/или с помощью преподавателя) приемов при выполнении расчетно-графической работы. Отсутствие выполненной расчетно-графической работы. Расчетно-графическая работа выполнена не самостоятельно.

Программное обеспечение образовательного процесса

Для выполнения работ необходимо программное обеспечение:

1. Deductor Studio. 2. Business studio.

Требования к выполнению презентации, сопровождающую РГР

Презентация является краткой самостоятельной работой студента. Презентация должна соответствовать следующим требованиям:

- количество слайдов должно примерно соответствовать длине доклада в минутах;
- каждый слайд должен иметь заголовок;
- необходимо избегать дословного воспроизведения текста на слайде;

- в тексте использовать короткие предложения и фразы;
- необходимо избегать сплошного текста;
- не помещать в презентацию слайды, требующие длинных пояснений;
- не заполнять один слайд слишком большим объемом информации;
- завершать свою презентацию обобщением уже сказанных основных тезисов в более короткой и понятной форме.

Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы

1. Основные понятия исследования операций: операции, решение; показатель эффективности.
2. Разновидности задач ИСО: детерминированные и стохастические.
3. Методы и модели обоснования решений. Типовые модели исследования операций.
4. Проблема выбора решения в условиях неопределенности. Многокритериальные задачи.
5. Постановка задачи линейного программирования. Формы представления задачи линейного программирования.
6. Линейные модели экономических и производственных процессов: задача планирования производства.
7. Линейные модели экономических и производственных процессов: использование мощностей оборудования;.
8. Линейные модели экономических и производственных процессов: моделирование процессов перевозок и назначения.
9. Линейные модели экономических и производственных процессов: модели задач развития и размещения.
10. Линейные модели экономических и производственных процессов: модели распределительных процессов; задача о раскрое или о минимизации обрезков.
11. Графический метод решения задачи линейного программирования.
12. Анализ решения (модели) на чувствительность: изменение коэффициентов целевой функции; изменение значений констант в правой части неравенств-ограничений.
13. Аналитический метод решения задачи линейного программирования (симплекс-метод).
14. Двойственность в линейном программировании: симметричная пара двойственных задач; экономический смысл двойственной задачи.
15. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Проблемы многокритериальной оптимизации.
16. Классификация методов решения задач многокритериальной оптимизации: методы свертывания критериев, методы ограничения на критерии, методы последовательного применения критериев, методы целевого программирования.
17. Понятие эффективной точки (точки Парето).
18. Определение транспортной модели. Нетрадиционные транспортные модели. Транспортная модель с промежуточными пунктами.
19. Постановка транспортной задачи.
20. Методы составления первоначального плана перевозок: метод северо-западного угла; метод наименьшей стоимости.
21. Алгоритм метода потенциалов: вычисление потенциалов; проверка оптимальности плана; перераспределение поставок.
22. Распределительный метод решения транспортной задачи.
23. Определение двойственной задачи. Соотношения между оптимальными решениями прямой и двойственной задачи. Экономическая интерпретация двойственности. Двойственный симплекс-метод.
24. Анализ чувствительности оптимального решения.
25. Методы сетевого планирования.

26. Описание объектов экономики в форме графа.
27. Понятие задачи сетевого планирования и управления и ее применение. Критический путь и критический срок.
28. Расчет временных параметров сетевого графика. Резервы времени работ. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ.
29. Понятие оптимизации сетевых графиков. Оптимизация по ресурсам. Зависимость стоимости выполнения работы от ее продолжительности.
30. Оптимизация сетевого графика по времени при фиксированном времени выполнения комплекса работ и при ограниченных затратах ускорение выполнения комплекса работ.
31. Оптимизация по стоимости при фиксированном и произвольном времени выполнения работ. Оптимальный безрезервный план.
32. Рекуррентная природа вычислений в динамическом программировании.
33. Задача о загрузке. Задача о планировании рабочей силы. Задача замены оборудования. Задача инвестирования.
34. Особенности стратегий управления запасами.
35. Особенности моделей управления запасами. Основные типы моделей управления запасами.
36. Классическая задача экономичного размера запаса.
37. Модель производственных поставок. Модель поставок со скидкой.
38. Представление модели управления запасами случайным процессом.
39. Прогнозирование с использованием скользящего среднего.
40. Экспоненциальное сглаживание.
41. Регрессионный анализ.
42. Метод экспертных оценок.
43. Балансовый метод.
44. Программно-целевой метод.
45. Игровые методы обоснования решений.
46. Матричная игра и моделирование ситуации риска в экономике.
47. Понятие об игровых моделях. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры.
48. Решение игр в смешанных стратегиях. Геометрическая интерпретация игры.
49. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования.
50. Метод дерева решений.
51. Понятие о системе массового обслуживания (СМО). Примеры СМО в экономике. Элементы СМО. Структура СМО.
52. Предмет теории массового обслуживания. Потоки случайных событий: стационарный, ординарный, без последствия.
53. Частота поступления требований и длительность обслуживания в простейшем потоке.
54. Графическая модель СМО. Классификация моделей СМО.
55. Одноканальная и многоканальная СМО с отказами.
56. Состояния СМО, граф состояний, интенсивность нагрузки, перечень показателей эффективности, примеры.
57. Одноканальная и многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.
58. Состояния СМО, граф состояний, перечень показателей эффективности, примеры.
59. Одноканальная и многоканальная СМО с ожиданием без ограничения на длину очереди.
60. Состояния СМО, граф состояний, уровень загрузки системы (нагрузка на один канал), перечень показателей эффективности, примеры.
61. Определение оптимальных параметров СМО.
62. Типы имитационных моделей.
63. Метод Монте-Карло. Идея, назначение и область применения.

64. Элементы дискретного моделирования: общее определение событий, генерирование выборочных значений.
65. Генерирование случайных чисел.
66. Методы сбора статистических данных.
67. Марковские случайные процессы. Понятие о марковском процессе.
68. Потоки событий. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
69. Финальные вероятности состояний.
70. Экстремальные задачи без ограничений. Необходимы и достаточные условия существования экстремума. Задачи на экстремум при наличии ограничений.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- решение индивидуальных задач;
- выполнение расчетно-графических работ;
- проработка тем, вынесенных на самостоятельное изучение.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название дисциплины с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Логистика	Инженерная экономика	нет	Согласовано (протокол № 2 от 08.10.2024)
Управление проектами	Инженерная экономика	нет	Согласовано (протокол № 2 от 08.10.2024)