

**ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ЦЕНТРАЛЬНЫХ
РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ПРЯМОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Прелов Е. С.

Научный руководитель – Напрасников В.В., к.т.н., доцент

Целью данной работы является программная реализация метода центральных разностей для прямого интегрирования уравнений равновесия в динамических. В качестве среды для программной реализации методов выбран Mathcad 15.

Уравнение равновесия системы конечных элементов, находящейся в состоянии движения, имеет вид:

$$F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = R(t),$$

где $F_I(t)$ — вектор сил инерции, $F_I(t) = M\ddot{U}$; $F_D(t)$ вектор сил демпфирования, $F_D(t) = C\dot{U}$; $F_E(t)$ — вектор сил упругости, $F_E(t) = KU$, M , C и K соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости; R — вектор внешней узловой нагрузки, U , $\dot{U}$ и $\ddot{U}$ — векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений ансамбля конечных элементов, все векторы зависят от времени.

Таким образом, в динамических задачах рассматривается статическое равновесие системы в момент времени t с учетом инерционных сил, зависящих от ускорения, и сил демпфирования, зависящих от скоростей движения. На практике такие задачи решаются с помощью методов прямого интегрирования.

Прямое численное интегрирование основано на двух идеях.

Во-первых, удовлетворение условий равновесия требуется не в любой момент времени t , а только на отдельных коротких отрезках времени Δt . Это означает, что равновесие с учетом сил инерции и демпфирования рассматривается в дискретных точках временного интервала.

Во-вторых, учитывается изменение перемещений, скоростей и ускорений внутри каждого временного интервала Δt .

Из рассмотрения как системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует, что аппроксимировать скорости и ускорения можно любыми конечно-разностными выражениями в перемещениях. Одной из эффективных процедур при решении подобных задач является метод центральных разностей, в котором принимается:

$$\ddot{U}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (U_{t-\Delta t} - 2U_t + U_{t+\Delta t}).$$

Ошибка вычислений по данной формуле имеет порядок Δt^2 , и для вычисления скоростей с ошибками того же порядка можно использовать выражение:

$$\dot{U}_t = \frac{1}{2\Delta t} (U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}).$$

Перемещения для момента времени $t + \Delta t$ вычисляются по формуле:

$$M\ddot{U}_t + C\dot{U}_t + KU_t = R_t.$$

Объединив формулы, получаем уравнение:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right)U_{t+\Delta t} == R_t - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2}M\right)U_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}M - \frac{1}{2\Delta t}C\right)U_{t-\Delta t}$$

Из которого можно определить $U_{t+\Delta t}$.

Вычисление перемещений $U_{t+\Delta t}$ основано на выполнении условий равновесия для момента времени $t + \Delta t$. По этой причине подобные методы называют методами явного интегрирования. Интегрирование в этом случае не требует разложения матриц жесткости на множители для шаговых решений.

Второй особенностью метода центральных разностей является вычисление $U_{t+\Delta t}$ через U_t и $U_{t-\Delta t}$. Поэтому для вычисления перемещений в начальный момент требуется использовать специальную начальную процедуру (рисунок 1,2).

Программная реализация метода центральных разностей:

```
Central_Difference(k,M,ce,ΔT,R_t,U_t,U_t_dt,U_t_ddot) :=
  a0 ← 1 / (ΔT^2), a1 ← 1 / (2·ΔT), a2 ← 2·a0, a3 ← 1 / a2
  M_hat ← a0·M + a1·ce  Формирование эффективной матрицы масс
  U_ddot ← Isolve[(R_t - M·U_t),k]  Вычисление ускорения
  T ← ("ΔT" "U1" "U2")
  for i ∈ 0..N
    R_eff ← R_t - (k - a2·M)·U_t - a0·M·U_t_dt  Вычисление эффективной нагрузки
    U_new ← Isolve(M_hat,R_eff)
    U_t_dt ← U_t
    U_t ← U_new
    T ← stack[T,(i·ΔT U_new_0 U_new_1)]  Построение таблицы
  T
```

Рис. 1. Код функции реализующий расчет методом центральных разностей.

Контрольный пример:

$$k := \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица жесткости}$$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Матрица масс}$$

$$ce := 0 \quad \text{Матрица демпфирования}$$

$$U_t := \begin{pmatrix} 0.0307 \\ 1.45 \end{pmatrix} \quad U_{t_dt} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.392 \end{pmatrix} \quad R_t := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \quad U_dot := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta T := 0.28 \quad \text{Временной шаг} \quad N := 12 \quad \text{Количество итераций}$$

$$T := \text{Central_Difference}(k, M, ce, dt, R_tdt, U_t, U_dt, U_2dt)$$

	0	1	2
0	"Δt"	"U1"	"U2"
1	0	0.168	2.842
2	0.28	0.488	4.153
3	0.56	1.02	5.022
4	0.84	1.705	5.261
5	1.12	2.401	4.9
6	1.4	2.917	4.164
7	1.68	3.074	3.363
8	1.96	2.771	2.774
9	2.24	2.033	2.533
10	2.52	1.017	2.601
11	2.8	-0.036	2.796
12	3.08	-0.86	2.893
13	3.36	-1.256	2.732

Рис.2. Контрольный пример вычисления методом центральных разностей.

Литература

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов /Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова. — М.: Стройиздат, 1982.