

УДК 621.391.25
**МЕТОД КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ В СРЕДЕ
 MATHCAD**

Корнейчик М.С. Куцко В.В. Нелипович Е.Г.
 Научный руководитель – Напрасников В.В., к.т.н., доцент

Цель работы – изучить метод квадратных корней для решения СЛАУ, разработать алгоритм, применить его на практике и проанализировать результаты.

Пусть дана линейная система:

$$Ax = b, \quad (1)$$

где $A=[a_{ij}]$ — симметрическая матрица, т. е. $A'=[a_{ij}]=A$. Тогда матрицу A можно представить в виде произведения транспонированных между собой треугольных матриц

$$A = T'T, \quad (2)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad T' = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Производя перемножение матриц T и T' , для определения элементов t_{ij} матрицы T получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} + \dots + t_{ii}t_{ij} &= a_{ij} \quad (i < j), \\ t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \dots + t_{ii}^2 &= a_{ii}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad (j > 1), \\ t_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad (1 < i \leq n), \\ t_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}} \quad (i < j), \\ t_{ij} &= 0 \quad \text{при} \quad i > j. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Система (1) имеет определенное единственное решение, если $t_{ij} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), так как тогда

$$\det A = \det T' \cdot \det T = (\det T)^2 = (t_{11}t_{22} \dots t_{nn})^2 \neq 0.$$

Коэффициенты матрицы T будут действительны, если $t_{ij}^2 > 0$. В дальнейшем мы, вообще говоря, не будем предполагать это последнее условие выполненным.

При наличии соотношения (2) уравнение (1) эквивалентно двум уравнениям:

$$T' y = b \quad \text{и} \quad T x = y,$$

или в раскрытом виде

$$\left. \begin{aligned} t_{11}y_1 &= b_1, \\ t_{12}y_1 + t_{22}y_2 &= b_2, \\ &\dots \dots \dots \\ t_{1n}y_1 + t_{2n}y_2 + \dots + t_{nn}y_n &= b_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и

$$\left. \begin{aligned} t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \dots + t_{1n}x_n &= y_1, \\ &t_{22}x_2 + \dots + t_{2n}x_n = y_2, \\ &\dots \dots \dots \\ &t_{nn}x_n = y_n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Отсюда последовательно находим:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{t_{11}}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_i &= \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{t_{nn}}, \\ &\dots \dots \dots \\ x_i &= \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik}x_k}{t_{ii}} \quad (i < n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Изложенный способ решения линейной системы носит название метода квадратных корней. Так как матрица A - симметрическая, а матрица T - верхняя треугольная, то в вычислительной схеме можно $n/2 * (n + 1)$ записывать только верхних коэффициентов a_{ij} и t_{ij} ($i \geq j$). При вычислениях

применяется обычный контроль с помощью сумм, причем при составлении суммы учитываются все коэффициенты соответствующей строки.

Заметим, что, если для некоторой s -й строки имеем $t_{ss} \wedge 2 < 0$, соответствующие элементы t_{sj} будут мнимыми. Метод формально применим и в этом случае.

При практическом применении метода квадратных корней прямым ходом с помощью формул (3) и (6) последовательно вычисляются коэффициенты t_{ij} и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а затем обратным ходом с помощью формулы (7) находятся неизвестные x_i ($i = n, n - 1, \dots, 1$).

На основе этой теории мы написали программу в среде Mathcad (рисунок 1)

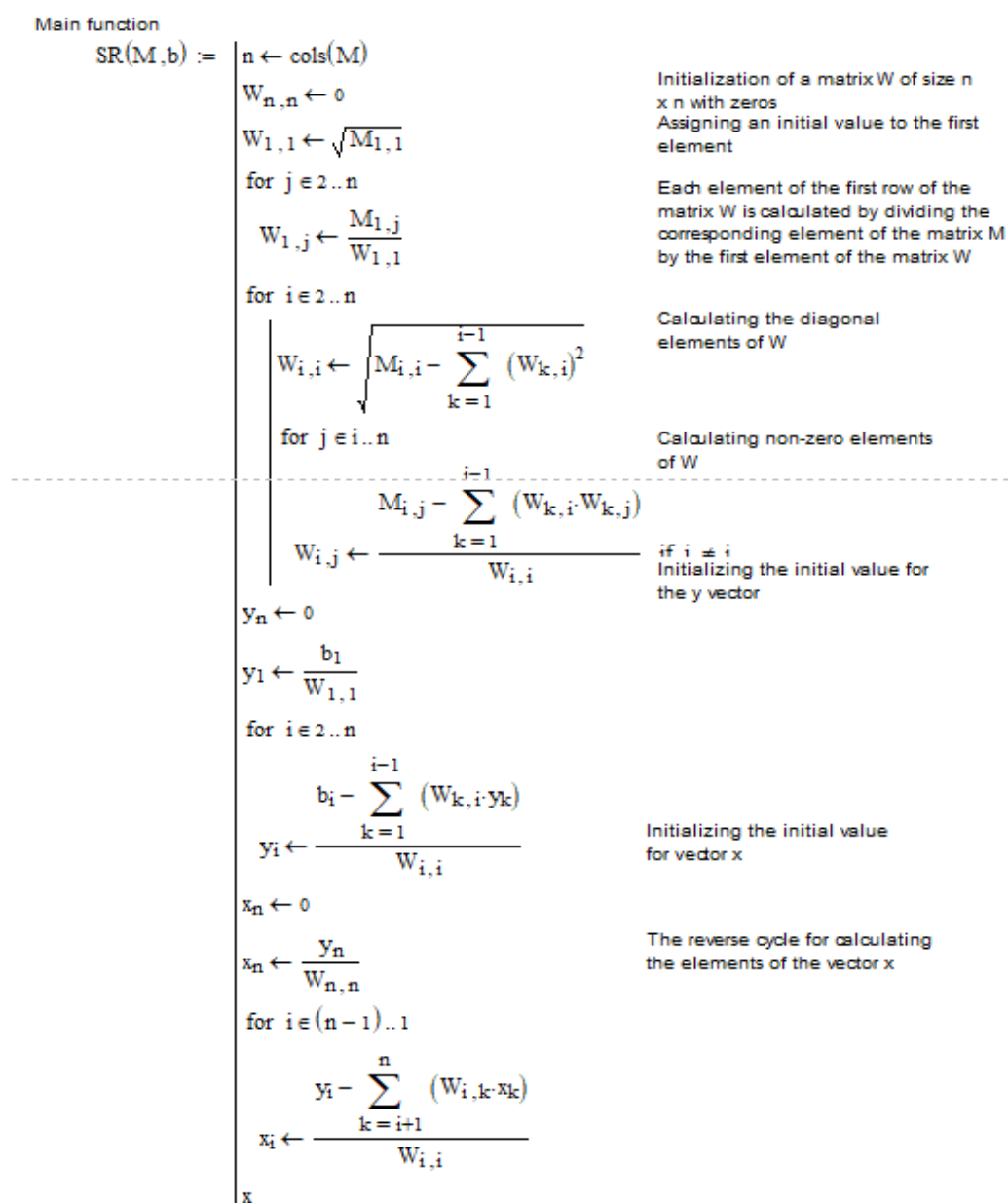


Рис.1. Главная функция.

Программа работает корректно, что подтверждает пример (рисунок 2).

$$\begin{aligned}
 C &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix} & D &:= \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix} & + \\
 SR(C,D) &= \begin{pmatrix} 2.2222222222 \\ 0.5555555556 \\ 1.6666666667 \end{pmatrix} & F &:= \text{lsolve}(C,D) = \begin{pmatrix} 2.2222222222 \\ 0.5555555556 \\ 1.6666666667 \end{pmatrix} \\
 C \cdot F &= \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 150 \end{pmatrix} \\
 \text{Test2 DEMIDOVIC_MARON_Osnovi_vic_matematiki} \\
 K &:= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & L &:= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 5.4 \\ 5.0 \\ 7.5 \\ 3.3 \end{pmatrix} & K^{-1} \rightarrow & \begin{pmatrix} -\frac{52}{25} & \frac{1}{25} & \frac{19}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{18}{25} \\ \frac{1}{25} & -\frac{13}{25} & \frac{3}{25} & \frac{11}{25} & -\frac{16}{25} \\ -\frac{19}{25} & -\frac{3}{25} & \frac{18}{25} & \frac{9}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{3}{25} & \frac{11}{25} & \frac{9}{25} & \frac{17}{25} & \frac{27}{25} \\ -\frac{18}{25} & -\frac{16}{25} & \frac{4}{25} & \frac{27}{25} & -\frac{37}{25} \end{pmatrix} & K^{-1} \cdot L \rightarrow & \begin{pmatrix} -6.1 \\ -2.2 \\ -6.8 \\ -0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix} \\
 \text{DEMIDOVIC_MARON_Osnovi_vic_matematiki} \\
 REZ &:= SR(K,L) & REZ &= \begin{pmatrix} -6.1 \\ -2.2 \\ -6.8 \\ -0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix} & F &:= \text{lsolve}(K,L) & F &= \begin{pmatrix} -6.1 \\ -2.2 \\ -6.8 \\ -0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис.2. Пример работы программы.