

АНАЛИЗ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В MATHCAD

Богушевич В.А., Русакович К.А.

Научный руководитель – Напрасников В.В., к.т.н., доцент

Цель работы – создать программу расчета частот и форм собственных колебаний системы в MATHCAD и протестировать ее на известном примере.

Уравнение динамического равновесия в конечно-элементной формулировке выглядит следующим образом:

$$M\ddot{\vec{U}} + C\dot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{P}(t) \quad (1)$$

$$\vec{U}(t_0) = \vec{U}_0 \quad (2)$$

$$\dot{\vec{U}}(t_0) = \dot{\vec{U}}_0$$

- начальные условия.

Если при этом затухание в системе отсутствует ($C = 0$), то эти колебания продолжаются бесконечно долго. Конечно, в действительности такая ситуация невозможна, однако теоретическое ее рассмотрение позволяет выявить некоторые особенные характеристики конструкции, несущие в себе скрытую информацию об этой конструкции, использование которой позволяет значительно упростить решение многих задач.

$$M\ddot{\vec{U}} + K\vec{U} = \vec{P}(t) \quad (3)$$

Будем искать решение системы в виде:

$$\vec{U} = \hat{\vec{U}} \cdot \sin \omega t$$

где $\hat{\vec{U}}$ - неизменный во времени вектор.

$\ddot{\vec{U}} = \hat{\vec{U}} \cdot (-\omega^2 \cdot \sin \omega t)$ - подставим в (3):

$$(K - \omega^2 M) \cdot \hat{\vec{U}} \cdot \sin \omega t = 0$$

Анализ собственных форм колебаний

После того, как из частотного уравнения

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

Определены соответствующие частоты

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_N \end{pmatrix}$$

Уравнения

$$(K - \omega^2 M) \cdot \hat{\vec{U}} = \vec{0}$$

могут быть записаны в виде

$$\tilde{E}^{(n)} \cdot \hat{\vec{U}}_n = \vec{0}, \text{ где } (4) \\ \tilde{E}^{(n)} = K - \omega_n^2 M$$

Выберем, например, первую компоненту $\hat{\vec{U}}_n$ равной 1.

$$\hat{\vec{U}}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix}$$

N – общее количество степеней свободы;

n – номер собственной частоты, для которой будем определять собственный вектор.

Тогда система (4) переписется в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} e_{11}^{(n)} & e_{12}^{(n)} & e_{13}^{(n)} & \dots & e_{1N}^{(n)} \\ e_{21}^{(n)} & e_{22}^{(n)} & e_{23}^{(n)} & \dots & e_{2N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1}^{(n)} & e_{N2}^{(n)} & e_{N3}^{(n)} & \dots & e_{NN}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Амплитуды перемещений получаются из (5), вместе с единичной первой компонентой образуют собственный вектор, соответствующий n -той собственной частоте.

Для удобства собственные векторы представляются в безразмерной форме. Для этого выбирается обычно максимальная из компонент вектора и на нее делятся все компоненты собственного вектора.

$$\bar{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \dots \\ \varphi_{Nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{u_j} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2n} \\ \hat{U}_{3n} \\ \dots \\ \hat{U}_{Nn} \end{pmatrix} - \text{вектор формы колебаний по } n\text{-ому тону}$$

колебаний,

где $u_j = \max|1, \hat{U}_{2n}, \dots, \hat{U}_{Nn}|$.

Этот вектор $\bar{\varphi}_n$ называется вектором формы колебаний по n -ому тону колебаний.

Математическая модель, представленная на рисунке 1, создана в среде MathCad.

```

ORIGIN := 1

Начальные данные
Матрица массы:
m :=  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  x 1 килофунт * с2/дюйм [или 0.178 тс*с2/см]

Матрица жесткости:
k :=  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  x 600 килофунт/дюйм [или 107 тс/см]

n := ORIGIN..length(m)

N := length(m)
B :=  $\omega^2 / 600$ 

k - B*m →  $\begin{pmatrix} 1-B & -1 & 0 \\ -1 & -1.5-B+3 & -2 \\ 0 & -2 & 5-2-B \end{pmatrix}$  x 600 килофунт/дюйм [или 107 тс/см]

B := |k - B*m| = 0 solve, B →  $\begin{pmatrix} 0.351 \\ 1.607 \\ 3.542 \end{pmatrix}$  x 600 килофунт/дюйм [или 107 тс/см]

 $\omega := \sqrt{600 \cdot B}$ 

Матрица частот собственных колебаний:
 $\omega = \begin{pmatrix} 14.522 \\ 31.048 \\ 46.099 \end{pmatrix}$  x рад/с

Компоненты матрицы:
 $\ddot{E}_{\_00(n)} := \text{submatrix}(\ddot{E}_n, 2, N, 2, N)$   $\ddot{E}_{\_00-(n)} := [\ddot{E}_{\_00(n)}]^{-1}$ 

 $\ddot{E}_{\_00} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 2.473 & -2 \\ -2 & 4.297 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.59 & -2 \\ -2 & 1.787 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2.313 & -2 \\ -2 & -2.084 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 

 $\ddot{E}_{\_00-} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.649 & 0.302 \\ 0.302 & 0.373 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.607 & -0.679 \\ -0.679 & -0.2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2.542 & 2.44 \\ 2.44 & -2.821 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 

Матрица форм колебаний:
 $\Phi := \text{for } i \in n$ 
 $\begin{cases} \text{for } j \in 1..N-1 \\ \text{sub\_M} \leftarrow \ddot{E}_{\_00-i} \\ M_{j+1,i} \leftarrow \text{sub\_M}_{1,j} \\ M_{1,i} \leftarrow 1 \end{cases}$ 
M

 $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.607 & -2.542 \\ 0.302 & -0.679 & 2.44 \end{pmatrix}$ 

```

Рис.1. Реализация в MATHCAD.

Данный анализ может быть использован для понимания того, как система будет вести себя под воздействием внешних нагрузок. Он является актуальным при проектировании зданий, мостов и других конструкций, чтобы обеспечить их безопасность и долговечность.