

РЕАЛИЗАЦИЯ ПАМЯТИ В ЦЕПЯХ МАРКОВА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Петров Л.А.

Научный руководитель – Скуратова Д.А., ассистент

Изначально определение Марковских цепей не предполагает влияние предыдущих состояний на будущее. Это является главным свойством данной последовательности. Однако есть способ реализации памяти в Марковских цепях, при котором не выходим за рамки определения Марковской цепи и фактически не нарушаем Марковское свойство, так как реализуем память посредством расширения цепи.

Математическая модель цепи Маркова с дискретным временем:

$$\{X \leftrightarrow_n\}_{n \geq 0} | \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n). \quad (1)$$

где $X \leftrightarrow_n, n \in \mathbb{N}$, — последовательность дискретных случайных величин, $\mathbb{P}$ — вероятность перехода из состояния в состояние, $i_j, j = \overline{0, n+m}, m, n \in \mathbb{N}$ — последовательные различные состояния цепи.

Для удобства будем использовать визуализацию Марковских цепей при помощи взвешенных ориентированных графов, однако не будем учитывать вес ребер, которые нас не интересуют. Также допустим, что мы рассматриваем лишь фрагмент некоторой цепи.

Рассмотрим создание механизма памяти в одно состояние.

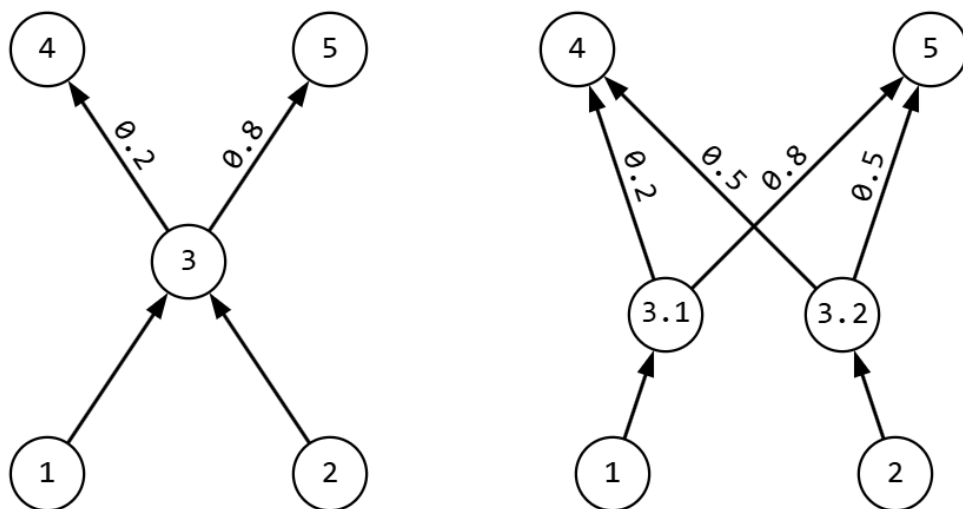


Рис. 1. Реализация памяти в одно состояние.

Пусть нам необходимо, чтобы в состоянии 3 левого графа (рис. 1) учитывалось, какое состояние было до него (1 или 2), тогда нам необходимо создать свою копию состояния 3 со всеми возможными после него состояниями для состояний 1 и 2 (3.1 для состояния 1 и 3.2 для состояния 2 на графе справа). В качестве примера, пусть, если состоянию 3 предшествовало состояние 1, то вероятности дальнейших состояний остаются прежними, в ином случае – изменяются на 0.5 и 0.5.

Для упрощения реализации памяти в 2 и более состояний необходимо «сжать» фрагмент рассматриваемой цепи. Рассмотрим это на реализации памяти в 2 состояния.

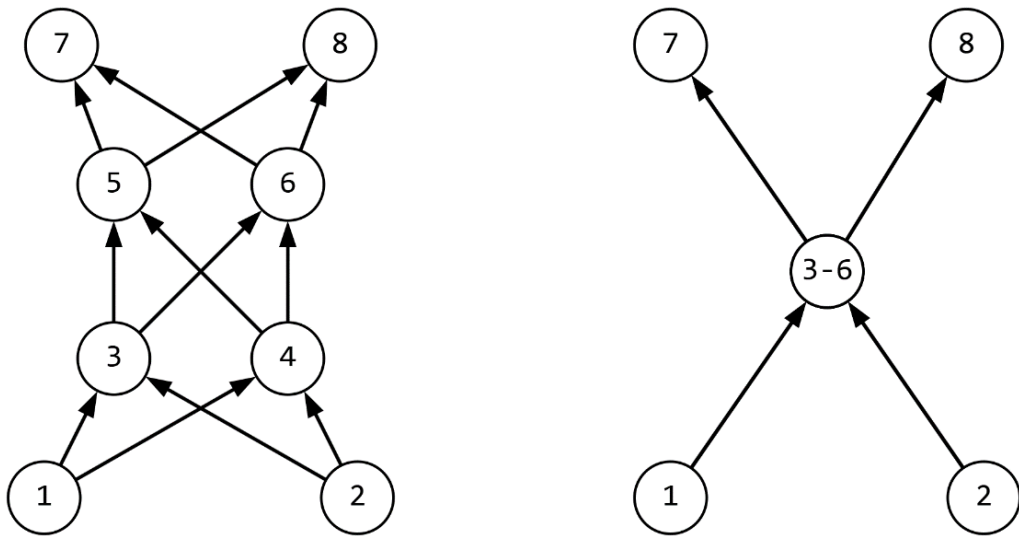


Рис. 2. «Сжатие» цепи.

Далее повторим алгоритм реализации памяти в одно состояние.

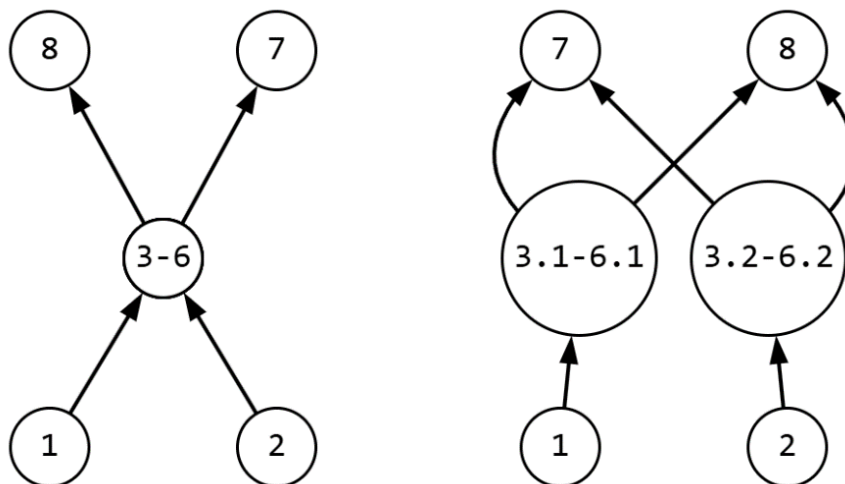


Рис. 3. Реализация памяти у «сжатой» цепи

После «сжатия» и копирования фрагмента цепи можно произвести обратную операцию и получить готовую Марковскую цепь с памятью в 2 состояния.

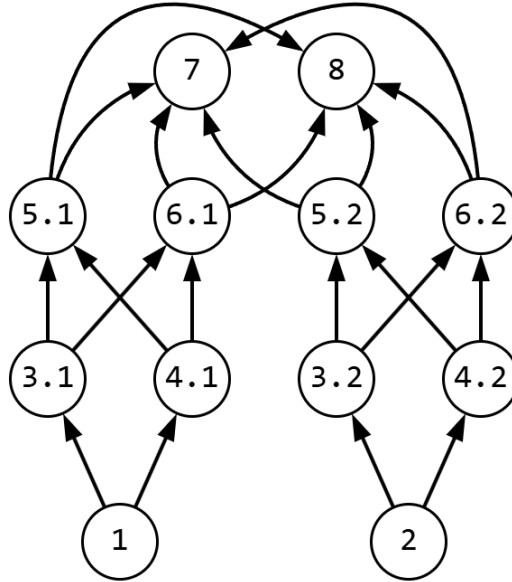


Рис. 4. Конечный вид реализации памяти в 2 состояния.

Вышеописанный алгоритм можно описать в виде следующей математической модели:

$$\begin{aligned}
 & \exists X_i, i \in \overline{0, l}, l \in \mathbb{N} \\
 & \exists X_j^m, m = \overline{0, q}, q \in \mathbb{N}, j \in \overline{0, l}, l \in \mathbb{N} \\
 & \forall X_j \exists \{X_k^m, X_{k+1}^m, \dots\}, k \in \overline{j+1, i-1}: \\
 & \exists \{\mathbb{P}n(X_{j+n}^m, X_{k+n}^m) \neq 0, \mathbb{P}n(X_{i-j-1}^m, X_i) \neq 0\}, n = \overline{0, i-j-2}: \\
 & \{\mathbb{P}(X_{i-1}^m, X_i) = \mathbb{P}(X_{i-1}^{m+1}, X_i), \mathbb{P}(X_{i-1}^m, X_i) \neq \mathbb{P}(X_{i-1}^{m+1}, X_i)\}
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $X_i, i \in \overline{0, l}, l \in \mathbb{N}$ — состояние, в которое мы хотим передать информацию о предыдущих состояниях, $X_j^m, m = \overline{0, q}, q \in \mathbb{N}, j \in \overline{0, l}, l \in \mathbb{N}$ — состояния, память о которых мы хотим передать, $\{X_k^m, X_{k+1}^m, \dots\}, k \in \overline{j+1, i-1}, m \in \overline{0, q}, q \in \mathbb{N}$ — состояния между X_j и X_i , содержащиеся в том участке пути, который необходимо копировать для каждого из m X_j состояний, $\{\mathbb{P}n(X_{j+n}^m, X_{k+n}^m) \neq 0, \mathbb{P}n(X_{i-j-1}^m, X_i) \neq 0\}, n = \overline{0, i-j-2}$ — условие ненулевой вероятности попадания в состояние X_i , попадания в одно из m X_j состояний, $\{\mathbb{P}(X_{i-1}^m, X_i) = \mathbb{P}(X_{i-1}^{m+1}, X_i), \mathbb{P}(X_{i-1}^m, X_i) \neq \mathbb{P}(X_{i-1}^{m+1}, X_i)\}$ — задание новых вероятностей попадания из последнего состояния копируемого участка цепи в состояние X_i .

Литература

1. Романовский И. В. Дискретный анализ: учеб.-метод. пособие – Изд. 4-е, – СПб, 2009, С. 281-290.
2. Хабр – Краткое введение в цепи Маркова [Электронный ресурс] <https://habr.com/ru/articles/455762/>
3. ИТМО – Марковские цепи [Электронный ресурс] <https://rb.gy/0afgds>

УДК 511.333

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. НОВЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Степанов М.А., Лисовский В. Д.

Научный руководитель – Скуратова Д. А., ассистент

Простые числа отличаются от всех остальных. Их, казалось бы, случайное распределение среди всех чисел делает их незаменимыми в современной жизни.

Простые числа не поддаются закономерностям, но при этом являются математически фундаментальными. Их важность выходит далеко за рамки теоретической математики. Можно сказать, что простые числа являются нашими героями цифровой безопасности, молчаливо защищающими онлайн-банкинг, зашифрованные сообщения и конфиденциальные данные. Та же непредсказуемость, которая очаровывала таких математиков, как Евклид и Риман, теперь защищает нас [1].

Цель работы: рассмотреть новый метод анализа распределения простых чисел.

Гипотеза о распределении нулей натурального ряда состоит в предположении справедливости следующей формулы:

$$\gamma(x) = \frac{a}{x} \cdot \sin\left(\frac{a}{x} \pi\right) \quad (1)$$

где a – заданное число, множители которого мы ищем, $a \in N, a \geq 1$, x – числа, проверяемые на то, являются ли они целыми делителями числа a , $x \in [1, 2, \dots, a]$, $\gamma(x)$ – некоторое число, которое, если оно натуральное, свидетельствует о том, что x – множитель числа a .