

УДК 624.21

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ И МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

Карпук М.А., Дульский П.М.

Научный руководитель – Лебедева Г. И., к.т.н., доцент

Современные нейронные сети являются одним из наиболее перспективных направлений в области искусственного интеллекта и машинного обучения. Они демонстрируют выдающиеся результаты в решении широкого спектра задач, включая обработку изображений, анализ текстов, прогнозирование временных рядов и многое другое. Однако для достижения высокой производительности и понимания их поведения требуется глубокий теоретический фундамент. Математический анализ играет ключевую роль в исследовании архитектур нейронных сетей и моделей машинного обучения, оптимизационных алгоритмов и их сходимости. Методы математического анализа позволяют не только объяснить механизмы работы нейронных сетей, но и способствуют разработке новых подходов к их обучению, улучшению устойчивости моделей и повышению их интерпретируемости.

В данной работе рассматриваются основные аспекты применения математического анализа в машинном обучении, в частности в линейной регрессии, которая лежит в основе нейронных сетей. Целью исследования является развитие более глубокого понимания теоретических основ, лежащих в основе машинного обучения и нейронных сетей, и практическое применение этих знаний для решения актуальных задач.

Прежде чем углубляться в применение математического анализа в нейронных сетях, необходимо определить, что собой представляет модель машинного обучения. Модель машинного обучения или нейронная сеть – это алгоритмическая система, которая принимает на вход исходные данные (признаки) и генерирует на выходе результат (предсказание), основанное на обучении на исходных данных.

Одним из типичных примеров применения подобных моделей является задача кредитного скоринга – оценка заемщиков, обращающихся за кредитом в банк. В данной задаче исходными данными являются ключевые характеристики заемщика, такие как размер его зарплаты, наличие задолженностей по прошлым кредитам, возраст, семейное положение и другие параметры. Модель анализирует эти признаки и генерирует результат в виде процентной ставки, под которую банк может предложить кредит. Такой подход позволяет банку автоматизировать процесс оценки заемщиков и минимизировать риски, основываясь на точных расчетах, выполненных машинным алгоритмом.

Линейная регрессия, являющаяся одной из первых моделей машинного обучения, основана на предположении, что задачу можно представить в виде линейного уравнения, где количество неизвестных X_n соответствует числу признаков, а целевая переменная Y – выходному значению. Уравнение модели можно записать следующим образом: $k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \dots + k_n \cdot x_n + b = y$, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – это веса модели, а b – свободный член. Для получения решения достаточно иметь n примеров задачи, где известны значения признаков и целевой переменной. Решение может быть найдено с использованием матричного уравнения вида: $W_k \cdot X_x = W_y$, где W_k – вектор весов, X_x – матрица признаков, а W_y – вектор целевых значений.

Однако данный метод обладает рядом существенных недостатков. В частности, он сильно подвержен влиянию отдельных примеров в выборке. Такие примеры могут оказаться нерепрезентативными и существенно исказить направление вектора весов модели. В результате, несмотря на теоретическую возможность использования матричных уравнений, на практике этот подход редко применяется для обучения линейной регрессии.

Вторая идея решения задачи линейной регрессии связана с минимизацией количества неверных предсказаний модели. Для достижения этой цели была разработана функция потерь, которая позволяет количественно оценить ошибку предсказания и использовать эту оценку для последующей оптимизации модели.

В случае логистической регрессии, применяемой для задач классификации, функция потерь принимает следующий вид: $\text{Loss}(y, p) = -\sum_i 1 \ell(y_i \cdot \log(p_i) + (1 - y_i) \cdot \log(1 - p_i))$ где: y – истинное значение для i -го наблюдения (0 или 1), p – вероятность, предсказанная моделью для i -го класса, 1 – общее количество наблюдений в выборке. Эта функция потерь измеряет степень уверенности модели в предсказаниях: чем ближе предсказанная вероятность p к истинному значению y тем меньше значение функции потерь. Логарифмические компоненты здесь играют ключевую роль, поскольку они усиливают штраф за неверные или неуверенные предсказания. Использование логарифма обеспечивает интерпретируемость: он отражает степень уверенности модели в предсказаниях. Таким образом, функция потерь помогает направлять процесс обучения модели, минимизируя расхождение между предсказанными значениями и истинными метками.

Метод градиентного спуска широко используется для решения задач минимизации в машинном обучении. Его суть заключается в следующем: на начальном этапе выбираются случайные начальные значения весов модели. Затем эти веса корректируются на основе производной функции потерь, вычисленной для данных тренировочного набора. Последовательно перебирая данные, на каждом этапе веса изменяются таким образом, чтобы приблизиться к минимуму функции потерь. Итеративный процесс

продолжается до достижения точки минимального значения функции потерь, что соответствует оптимальным весам модели (см. рис. 1).

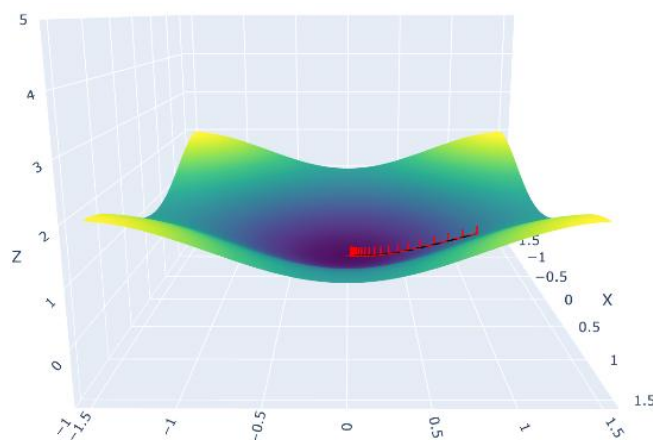


Рис.1. Пример градиентного спуска.

На рисунке 1 представлен график функции потерь, на котором красными отметками отображено изменение ошибки на тренировочных данных. Как видно из графика, в ходе итеративного процесса изменения весов модели удалось достичь точки минимума функции потерь.

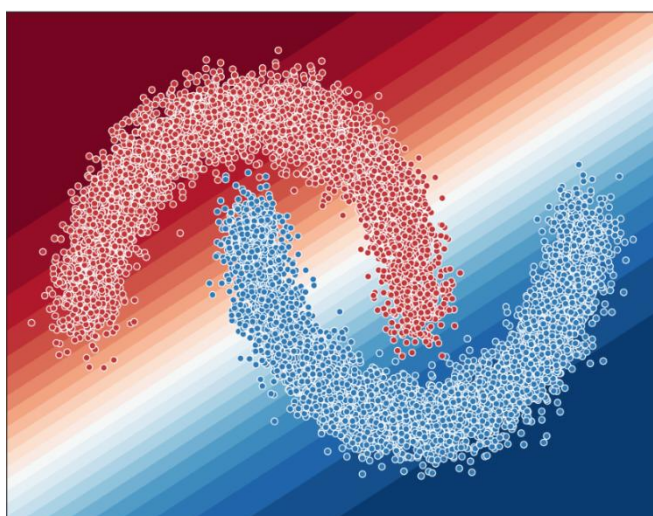


Рис.2. Линейная регрессия для dataset of Moons.

На рисунке 2 представлено применение модели линейной регрессии к стандартному синтетически сгенерированному набору данных Moons. Цветовая палитра яркости оттенков отображает меру вероятности принадлежности к одному из классов. Белая линия обозначает разделяющую поверхность, определённую линейной регрессией.

В данной работе рассмотрено применение математического анализа в модели машинного обучения линейной регрессии. Были исследованы

ключевые аспекты алгоритма, включая минимизацию функции потерь методом градиентного спуска, а также построение разделяющих поверхностей и вероятностных интерпретаций. Результаты продемонстрировали эффективность линейной регрессии в анализе синтетически сгенерированных данных, таких как набор Moons. Использование математических методов позволяет глубже понять природу процессов, происходящих в модели, и повышает качество решений, принимаемых на основе анализа данных.

Литература

1. Курс “Deep Learning” [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://stepik.org/course/230362/info>– Дата доступа: 01.04.2025.

УДК 519.6

ПОСТРОЕНИЕ ДОРОЖНОГО ГРАФА ДЛЯ МАРШРУТИЗАЦИИ МОБИЛЬНОГО РОБОТА В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ КОРИДОРОВ

Ирванцова В.С., Лазута В.С.

Научный руководитель –Лебедева Г. И., к.т.н., доцент

Граф – это математическая структура, которая используется для моделирования связей между различными объектами. Граф состоит из вершин и рёбер, которые их соединяют. Роботы, которые требуют предварительного программирования маршрута, обычно относятся к следующим категориям: промышленные роботы, автономные мобильные роботы (AMR), роботы для доставки, роботы-уборщики, садовые роботы, исследовательские роботы.

Программирование робота может служить множеству целей, в зависимости от его назначения и области применения. Вот несколько основных направлений: автоматизация процессов, исследования и разработки, обслуживание и помощь, образование и обучение, развлечение, безопасность и охрана, сельское хозяйство, строительство.

Каждое из этих направлений требует специфического подхода к программированию и проектированию роботов, в зависимости от их функций и условий эксплуатации.

Например:

Построение дорожного графа для маршрутизации робота-пылесоса – это важный этап в разработке его навигационной системы. Ниже описаны основные шаги этого процесса.

Первым шагом в построении дорожного графа является сканирование окружающей среды, в которой будет работать робот. Робот перемещается