



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный
технический университет**

Кафедра «Информационные системы и технологии»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие

**Минск
БНТУ
2025**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Информационные системы и технологии»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие

для обучающихся по программе общего высшего образования
по специальности 6-05-0612-01 «Программная инженерия»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области информатики и радиоэлектроники*

Минск
БНТУ
2025

УДК 512.64(075.4) + 514.12(075.4)
ББК 22.143я73-1 + 22.151.5я73-1
Л59

С о с т а в и т е л и:
*О. А. Бояршинова, В. А. Казакевич,
Л. А. Раевская, В. И. Юринок*

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра Теоретической и прикладной механики
ММФ Белорусского государственного университета
(зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор *М. А. Журавков*);
доцент кафедры высшей математики БГТУ, кандидат физ.-мат. наук,
доцент *И. Ф. Соловьева*

Л59 **Линейная** алгебра и аналитическая геометрия : пособие для обучающихся по программе общего высшего образования по специальности 6-05-0612-01 «Программная инженерия» / сост. : О. А. Бояршинова, В. А. Казакевич, Л. А. Раевская [и др.]. – Минск : БНТУ, 2025. – 95 с.
ISBN 978-985-31-0117-1.

Настоящее пособие предназначено для студентов первого курса заочной (дистанционной) формы обучения специальности 6-05-0612-01 «Программная инженерия».

Пособие содержит основные понятия и теоремы из программы по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, а также типовые примеры решения задач и задания для контрольной работы (30 вариантов).

УДК 512.64(075.4) + 514.12(075.4)
ББК 22.143я73-1 + 22.151.5я73-1

ISBN 978-985-31-0117-1

© Белорусский национальный
технический университет, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»	6
2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	9
2.1. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами	9
2.2. Определители. Миноры и алгебраические дополнения	12
2.3. Обратная матрица	17
2.4. Ранг матрицы	20
2.5. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Решение невырожденных линейных систем. Матричный метод. Формулы Крамера	24
2.6. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса	27
2.7. Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение векторов. Координаты вектора	32
2.8. Скалярное произведение векторов	40
2.9. Векторное произведение векторов	42
2.10. Смешанное произведение векторов	45
2.11. Полярная система координат. Уравнение линии на плоскости	47
2.11.1. Полярная система координат	47
2.11.2. Уравнение линии на плоскости	49
2.12. Прямая на плоскости	50
2.12.1. Различные виды уравнений прямой	50
2.12.2. Угол между прямыми на плоскости	53
2.13. Плоскость в пространстве	55
2.13.1. Различные виды уравнения плоскости	55
2.13.2. Угол между плоскостями	57
2.13.3. Расстояние от точки до плоскости	58
2.14. Прямая в пространстве	59
2.14.1. Различные уравнения прямой в пространстве	59
2.14.2. Угол между прямыми в пространстве	62
2.15. Прямая и плоскость в пространстве	63
2.16. Кривые второго порядка	65
2.16.1. Окружность	66
2.16.2. Эллипс	66

2.16.3. Гипербола	69
2.16.4. Парабола	72
2.16.5. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду	75
2.17. Поверхности второго порядка.....	77
2.17.1. Цилиндры и конусы.....	77
2.17.2. Канонические уравнения поверхностей второго порядка	78
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА	86
ЛИТЕРАТУРА	95

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание является методическим руководством для изучения дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» студентами заочной (дистанционной) формы обучения специальностей 6-05-0612-01 «Программная инженерия».

В пособии представлена программа дисциплины, соответствующая учебному плану; изложены основные понятия, определения, свойства, теоремы и т. д.; приведены образцы решения типовых задач и контрольная работа.

Контрольная работа содержит 5 заданий, в каждом из которых студенту нужно выполнить номер, соответствующий его варианту. Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если оно больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. Например, если шифр содержит две последние цифры 62, то номер варианта будет равен 2. Следовательно, задачами 2-го варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2.

1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Тема 1. Матрицы и операции над ними. Элементарные преобразования.

Матрицы и линейные операции над ними. Произведение матриц. Транспонирование матриц.

Тема 2. Определители порядка n , их свойства и вычисление.

Определители второго и третьего порядка и их свойства. Алгебраические дополнения и миноры. Определители n -го порядка и их свойства. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка.

Тема 3. Обратная матрица.

Обратная матрица и ее построение.

Теорема существования и единственности обратной матрицы.

Тема 4. Крамеровские системы алгебраических уравнений.

Системы линейных алгебраических уравнений, общие понятия. Матричный способ решения невырожденных линейных систем, формулы Крамера. Метод Гаусса.

Тема 5. Векторы, линейные операции над векторами. Системы координат.

Векторы в пространстве и линейные операции над ними. Проекция вектора на ось и на вектор. Линейная зависимость векторов. Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису. Декартова прямоугольная система координат. Радиус-вектор и координаты точки. Деление отрезка в данном отношении. Полярная система координат.

Тема 6. Векторная алгебра.

Скалярное произведение векторов, его свойства и механический смысл. Условие ортогональности двух векторов. Скалярное произведение в координатной форме. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический и физический смысл. Векторное произведение в координатной форме. Условие коллинеарности векторов. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.

Тема 7. Прямая на плоскости.

Прямая на плоскости и способы ее задания. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Тема 8. Плоскость и прямая в пространстве.

Прямая в пространстве, ее канонические и параметрические уравнения. Общие уравнения прямой в пространстве. Угол между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между скрещивающимися и параллельными прямыми. Различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве, угол между плоскостями.

Тема 9. Кривые второго порядка на плоскости.

Понятие кривой второго порядка. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и канонические уравнения.

Тема 10. Поверхности второго порядка.

Поверхности второго порядка. Эллипсоиды, параболоиды, гиперболоиды, конусы, цилиндры. Поверхности вращения. Цилиндрические и конические поверхности. Исследование формы методом сечений.

Тема 11. Ранг матрицы.

Ранг матрицы и его вычисление. Условие равенства нулю определителя. Теорема о базисном миноре.

Тема 12. Теория систем линейных алгебраических уравнений.

Произвольные системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных уравнений. Структура общего решения. Фундаментальная система решений. Неоднородные системы линейных уравнений, структура общего решения.

Тема 13. Линейные пространства.

Линейные пространства. Подпространство. Линейная зависимость и линейная независимость векторов, базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора.

Тема 14. Линейные операторы.

Понятие линейного оператора. Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора в заданном базисе. Действия над линейными операторами.

Тема 15. Собственные значения и собственные векторы.

Собственные векторы и собственные значения матриц. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы. Собственные векторы и собственные значения симметрических матриц.

Тема 16. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Квадратичные формы.

Преобразование координат вектора и матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобные матрицы. Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Применение квадратичных форм к исследованию кривых и поверхностей второго порядка.

2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами

О п р е д е л е н и е. *Матрицей размера $m \times n$* называется прямоугольная таблица из чисел $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов. Элементы матрицы A нумеруются двумя индексами. Для обозначения матриц применяются также и квадратные скобки. Так, элемент a_{32} означает принадлежность третьей строке и второму столбцу. Сокращенно будем писать $A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Если $m = n$, то матрица называется **квадратной порядка n** . Матрица может содержать только одну строку ($i = 1$) или один столбец ($j = 1$). Для квадратной матрицы $A_{n \times n}$ элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют **главную диагональ**. **Нулевой** называется матрица, все элементы которой равны нулю; ее обозначают буквой O . Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется **единичной**. Единичная матрица обозначается буквой E . Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется **транспонированной**.

Ее обозначают A^T . Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & \pi \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}$,

причем $A = A_{2 \times 3}, A^T = A_{3 \times 2}^T$.

Основными операциями над матрицами являются: сложение (вычитание) матриц; умножение матриц на число; умножение матриц. Операции сложения (вычитания) вводятся только для матриц одинаковых размеров.

О п р е д е л е н и е. *Суммой* $A+B$ *матриц* $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Аналогично вводится понятие разности двух матриц $C = A - B$.

О п р е д е л е н и е. *Произведением матрицы* $A_{m \times n}$ *и числа* α называется матрица $B_{m \times n}$ такая, что $B = \alpha \cdot A = A \cdot \alpha$ и

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

П р и м е р 2.1. Найти матрицу X , удовлетворяющую условию $X = 3A - 4E$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. В данном случае $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} X &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 6 & -3 \\ -12 & 0 & 18 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -12 & -4 & 18 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Произведение матрицы A и матрицы B вводится только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , т. е. если A – матрица размера $m \times n$, то B должна иметь размер $n \times k$.

О п р е д е л е н и е. *Произведением AB матрицы $A_{m \times n}$ и матрицы $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$, элементы которой c_{ij} находятся по формуле*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (2.3)$$

или $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$

Если существует произведение $A \cdot B$, то произведение $B \cdot A$ может и не существовать. Может быть, что при существовании $B \cdot A$ $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются **перестановочными** (или **коммутирующими**).

П р и м е р 2.2. Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & -2 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-6) \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}.$

Заметим, что и произведение $B \cdot A$ существует:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 26 & 0 \\ -3 & -14 & 22 \end{pmatrix}, \text{ причем } A \cdot B \neq B \cdot A.$$

2.2. Определители.

Миноры и алгебраические дополнения

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\det A$ ($|A|$ или Δ), которое называется ее **определителем**. Рассмотрим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков.

1. Пусть $n = 1$, $A = (a_{11})$. Определитель $\det A = a_{11}$.

2. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель второго порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (2.4)$$

Вычисление определителя 2-го порядка изображается схемой (рис. 2.1):

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}}_{\text{произведение элементов главной диагонали}} - \underbrace{\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}}_{\text{произведение элементов побочной диагонали}}$$

Рис. 2.1.

3. Пусть $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Определитель третьего порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$
(2.5)

Определители третьего порядка обычно вычисляются с использованием **правила треугольников** (или правила **Саррюса**). Суть его в том, что определитель в формуле (2.5) состоит из трех слагаемых, взятых со знаком «+» по схеме на рис. 2.2, *a* и трех слагаемых, взятых со знаком «-» по схеме на рис. 2.2, *б*.

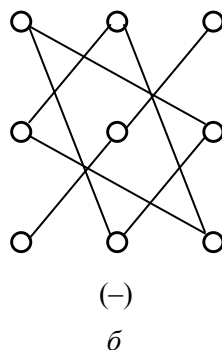
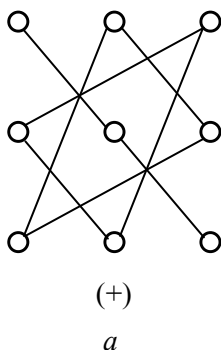


Рис. 2.2

Пример 2.3. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. По формуле (2.4) имеем: $\det A = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 21 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 84 + 6 = 90.$$

Пример 2.4. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По формуле (2.5) имеем: $\det A = (-2) \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 7 \cdot 1 \cdot 6 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -133$.

Пусть дана квадратная матрица 4-го порядка $n=4$. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1 \leq s \leq n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s . Определитель этой матрицы называется **минором порядка s** и обозначается **M** . Оставшиеся элементы матрицы образуют определитель, который называется **дополнительным** к минору M и обозначается через M' .

Так, например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ при $s=2$

выберем вторую и третью строки, первый и четвертый столбец.

Тогда минором второго порядка будет определитель $M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$,

а дополнительным минором будет определитель $M' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$.

Каждый элемент матрицы 4-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем 3-го порядка, обозначаемый M_{ij} , соответствующий элементу a_{ij} .

О п р е д е л е н и е. **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется дополнительный минор M_{ij} , умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е.:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (2.6)$$

Тогда определитель матрицы четвертого порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4}, i = \overline{1,4}. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) называется **разложением определителя четвертого порядка** по элементам i -й строки. Можно показать, что:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}, j = \overline{1,4} \quad (2.8)$$

(**разложение определителя по элементам j -го столбца**). Аналогично можно ввести понятие определителя n -го порядка.

Назовем строки и столбцы матрицы ее **рядами**.

Теорема (о разложении определителя по элементам ряда). *Определитель квадратной матрицы порядка n ($n > 1$) равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения, т. е. справедлива формула:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} \left(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n} \right). \quad (2.9)$$

Для $n = 3$ и $i = 1$ формула (2.9) примет вид:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (2.10)$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приведем некоторые свойства определителей:

1. Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы, т. е. $\det A = \det A^T$.
2. Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.
3. Определитель, имеющий нулевой ряд, равен нулю.
4. Определитель, имеющий два одинаковых параллельных ряда, равен нулю.
5. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.
6. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.
7. Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого параллельного ряда, умноженные на число $\lambda \in R$, то величина определителя не изменится.

Пример 2.5. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

разложив его по элементам первой строки.

Решение. Воспользуемся формулой (2.10):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -7.$$

$$\det A = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot (-7) = -2 - 8 = -10.$$

Заметим, что A_{13} можно было и не вычислять, т. к. $a_{13} = 0$.

2.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е. Квадратная матрица A называется **невыврожденной**, если ее определитель не равен нулю, т. е. $\Delta = \det A \neq 0$. Если $\Delta = \det A = 0$, то матрица A называется **вырожденной**.

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A , если выполняется равенство:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \quad (2.11)$$

где E – единичная матрица.

Теорема. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1} .

В случае квадратной матрицы n -го порядка обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A . Для квадратной матрицы третьего порядка формула (2.12) имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Пример 2.6. Найти матрицу A^{-1} , обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $\Delta = \det A = -10 \neq 0$ (см. пример 2.5), то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 - 8) = -2; \quad A_{11} = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4 - 4) = 8; \quad A_{12} = 8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 - 3) = -7; \quad A_{13} = -7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 - 0) = 2; \quad A_{21} = 2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 - 0) = 2; \quad A_{22} = 2;$$

$$A_{23} = -3; \quad A_{31} = -4; \quad A_{32} = -4; \quad A_{33} = 1.$$

Подставляя все данные в формулу (2.13), получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ -7 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 & 0,4 \\ -0,8 & -0,2 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.7. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение.

Обозначим $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение запишется в виде $X \cdot A = B$. Умножим обе части последнего уравнения на A^{-1} справа: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то $X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле (2.12) при $n = 2$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$. Матрица невырожденная, находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |3| = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |2| = -2; \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = -1.$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Находим матрицу } X = B \cdot A^{-1}; \quad X = \begin{pmatrix} 50 & -20 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 50 \cdot 3 + (-20) \cdot (-1) & 50 \cdot (-2) + (-20) \cdot (-1) \\ 40 \cdot 3 + 10 \cdot (-1) & 40 \cdot (-2) + 10 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 170 & -80 \\ 110 & -90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{170}{5} & \frac{-80}{-5} \\ -\frac{110}{5} & \frac{-90}{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 & 16 \\ -22 & 18 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -34 & 16 \\ -22 & 18 \end{pmatrix}.$

2.4. Ранг матрицы

О п р е д е л е н и е. *Рангом матрицы* называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

Обозначения: $\text{rang } A; r_A, r$.

О п р е д е л е н и е. *Базисным минором* матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор, вообще говоря, не единственный.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_A = 1$, т. к. существует минор 1-го порядка, отличный от нуля (например, $|2| = 2 \neq 0$), а все миноры 2-го порядка равны нулю (в силу пропорциональности строк). Базисным минором является каждый минор 1-го порядка.

Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_B = 2$, т. к. $\det B = -2 \neq 0$. Единственный базисный минор матрицы B совпадает с ее определителем $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$

О п р е д е л е н и е. *Минором, окаймляющим минор M* порядка k матрицы A , называется минор порядка $(k+1)$ этой матрицы, содержащий минор M .

О п р е д е л е н и е. *Элементарными преобразованиями матрицы* назовем следующие операции:

- 1) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;
- 3) перестановку местами двух строк (столбцов) матрицы.

Известно, что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

Ранг матрицы можно найти следующими способами.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы состоит в том, что любую ненулевую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапециевидной, т. е. к матрице вида

$$B = \left(\begin{array}{cccc|ccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{b_{rr}} & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Вычеркнем нулевые строки в B . Ранг полученной матрицы равен r – числу ненулевых строк. Следовательно, $r_B = r$, а значит, и $r_A = r$. Базисным минором в матрице B

является выделенный минор
$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

Метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы основан на следующем утверждении.

Теорема. *Если в матрице A имеется минор M порядка r , отличный от нуля, а все миноры, окаймляющие минор M (если они существуют), равны нулю, то $r_A = r$.*

Для нахождения ранга матрицы A необходимо:

1. Найти какой-нибудь минор M_1 1-го порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r_A = 0$.

2. Вычислять миноры 2-го порядка, окаймляющие минор M_1 до тех пор, пока не найдется минор M_2 , отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r_A = 1$; если есть, то $r_A \geq 2$; и т. д.

Процесс нужно продолжать до тех пор, пока либо все окаймляющие миноры будут равны нулю, либо миноры $(k+1)$ порядка у данной матрицы не существуют. В этом случае $r_A = k$.

Заметим, что при нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой окаймляющий минор k -го порядка для $M_{k-1} \neq 0$.

Пример 2.8. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Приведем матрицу к трапецевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{[1]} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 6 & -21 & -33 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \end{pmatrix}^{[2]} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ \underline{0} & \underline{-2} & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r_A = 2,$$

где r_A – число ненулевых строк.

Здесь цифрами [1], [2] обозначены следующие операции:

1) [1] – ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (-2) ;

2) к 4-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (-7) ;

3) к 5-й строке прибавим 1-ю.

4) $[2]$ – из 3-й и 5-й строки вычли 2-ю строку;

5) к 4-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 3.

Ответ: $r_A = 2$.

Пр и м е р 2.9. Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 1 & -4 & 5 \\ \underline{3} & \underline{4} & 0 & -1 & 0 \\ \underline{4} & \underline{6} & \underline{1} & -5 & 5 \\ 5 & 8 & 2 & -9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r_A \geq 1$. За основу выберем $M_1 = |1| = 1$, стоящий в левом верхнем углу. Перейдем к вычислению миноров 2-го порядка, окаймляющих выбранный M_1 . Выберем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, стоящий в левом верхнем углу.

Так как $M_2 \neq 0$, переходим к вычислению миноров 3-го порядка, то:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т. к. третья строка у всех этих миноров равна сумме первых двух.

Аналогично,

$$M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

т. к. 3-я строка равна сумме 2-й и 1-й, умноженной на 2.

Так как все миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2 \neq 0$, равны нулю, то $r_A = 2$. Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2.5. Системы линейных уравнений. Основные понятия.

Решение невырожденных линейных систем.

Матричный метод. Формулы Крамера

О п р е д е л е н и е. Система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется *линейной*, если она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (2.15)$$

где числа a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) называются *коэффициентами системы*, а числа b_i ($i = \overline{1, m}$) – *свободными членами*.

О п р е д е л е н и е. *Решением системы* (2.15) называется упорядоченное множество чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Решить систему уравнений означает выяснить, совместна она или нет, и если совместна, то найти все ее решения.

Две системы уравнений называются *эквивалентными* или *равносильными*, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

Эквивалентные системы уравнений получаются в результате следующих преобразований:

- 1) *умножения уравнения системы на число, отличное от нуля;*
- 2) *прибавления к одному уравнению другого, умноженного на любое число;*
- 3) *перестановки местами двух уравнений системы.*

Система уравнений, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$), называется *однородной*.

Однородная система всегда совместна, т. к. она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, хотя оно не обязательно единственно.

Систему (2.15) можно записать в матричной форме $AX = B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица системы};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец (или вектор-столбец) неизвестных},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов}.$$

$$\text{Матрица } \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \text{ называется } \textit{расширенной}$$

матрицей системы.

Рассмотрим случай системы n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (2.16)$$

или в матричной форме: $AX = B$.

Система (2.16) называется **невыврожденной**, если $\det A = \Delta \neq 0$.

Невырожденная система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено:

1) матричным методом по формуле $X = A^{-1}B$; (2.17)

2) по формулам Крамера: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n},$ (2.18)

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i -го столбца столбцом свободных членов B .

Пр и м е р 2.10. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

по формулам Крамера и матричным способом.

Р е ш е н и е . Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ее определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, следовательно, система

является невырожденной и имеет единственное решение.

1) используем формулы Крамера (2.18), найдя предварительно $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 35; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{7} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{35}{7} = 5; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3.$$

Ответ: (4; 5; -3);

$$2) \text{ найдем } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (2.17):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 28 \\ 35 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (4; 5; -3).

2.6. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса

Рассмотрим систему (2.15).

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (2.15) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $r_A = r_{\tilde{A}}$.

Исследовать систему линейных уравнений означает выяснить, совместна она или нет, а для совместной системы определить, имеет ли она единственное решение или бесконечное множество решений.

При этом возможны три случая:

1) $r_A < r_{\tilde{A}}$ – система несовместна (т. е. решений нет);

2) $r_A = r_{\tilde{A}} = n$ (n – число неизвестных) – система совместна и имеет единственное решение;

3) $r_A = r_{\tilde{A}} < n$ – система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Для исследования систем линейных уравнений можно использовать, например, **метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)**. С помощью элементарных преобразований над строками система m линейных уравнений с n неизвестными может быть приведена к виду:

$$\left. \begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1n}x_n &= d_1; \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2r}x_r + \dots + c_{2n}x_n &= d_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots &= \dots \\ c_{rr}x_r + \dots + c_{rn}x_n &= d_r; \\ 0 &= d_{r+1}; \\ \dots &= \dots \\ 0 &= d_m, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где $c_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $r \leq n$.

Система (2.19) эквивалентна исходной системе (2.15). Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_m$ отлично от нуля, то система (2.19), а, следовательно, и исходная система (2.15) несовместны (случай $r_A = r < r_{\tilde{A}}$).

Если же $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$, то $r_A = r_{\tilde{A}}$ и система (2.19) совместна. В случае $r_A = r = r_{\tilde{A}} < n$ неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ считаются **базисными**, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – **свободными**.

Базисные неизвестные оставляют в левой части уравнений, а свободные переносят в правую. Из уравнений (2.19) выражают последовательно базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ через свободные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, которым придают произвольные значения, получая общее решение системы (2.19), а значит (2.15) (решений у системы будет бесконечное множество).

Если $r_A = r = r_{\tilde{A}} = n$, то система (2.19) будет иметь единственное решение, которое находят, выражая $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$ последовательно через $d_n, d_{n-1}, \dots, d_2, d_1$.

Пр и м е р 2.11. Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{array} \right)^{[3]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array} \right), \end{aligned}$$

где цифрами [1], [2], [3] обозначены следующие операции: [1] – 1-ю и 2-ю строки поменяли местами; [2] – ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на (-2) ; к 3-й прибавили 1-ю, умноженную на (-3) ; [3] – к 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на (-1) .

Этой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 11x_2 - x_3 = 56; \\ -10x_3 = 10. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{10}{-10} = -1; & 11x_2 &= 56 + x_3; & x_2 &= \frac{56-1}{11} = 5; \\ x_1 &= -22 + 4x_2 - 3x_3; & x_1 &= 1. \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$.

Пр и м е р 2.12. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right)$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $\tilde{A}$ к трапециевидной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{1} & \overline{1} & -1 & -4 \\ \overline{0} & \overline{1} & -2 & 4 \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array} \right),$$

где цифрами [1], [2] обозначены следующие операции:

[1] – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, к 3-й строке прибавляем 1-ю, умноженную на 2;

[2] – к 3-й строке добавляем 2-ю, умноженную на (-2) .

Получим, что $r_A = r_{\tilde{A}} = 2 < n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений. x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная переменная. Количество базисных неизвестных равно $r_A = 2$; число свободных неизвестных равно $n - r_A = 1$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

В левой части уравнений оставим только базисные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 + x_3; \\ x_2 = 4 + 2x_3. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в 1-е уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$.

Полагая $x_3 = C, C \in R$, решение системы будет иметь следующий вид:

$$x_1 = -C - 8; \quad x_2 = 4 - 2C; \quad x_3 = C.$$

Ответ: $(-C - 8; 4 - 2C; C), \quad C \in R$.

Пр и м е р 2.13. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Приведем к трапецевидной форме расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array} \right)^{[2]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array} \right),$$

- 1) [1] – из 2-й строки вычитаем 1-ю;
- 2) к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2;
- 3) [2] – к 3-й строке прибавим 2-ю, умноженную на (-2) .
- 4) так как $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, то система несовместна.

Ответ: система несовместна.

2.7. Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение векторов. Координаты вектора

О п р е д е л е н и е. *Направленным отрезком* (или *связанным вектором*) называется отрезок, на котором задано направление (т. е. для которого известно, какая из двух ограничивающих его точек является началом и какая концом). Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2.3):

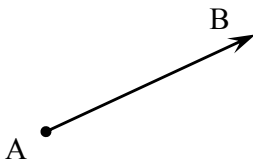


Рис. 2.3

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB . Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными* (или *сонаправленными*), если лучи AB и CD одинаково направлены, и *противоположно направленными*, если лучи AB и CD противоположно направлены (рис. 2.4).

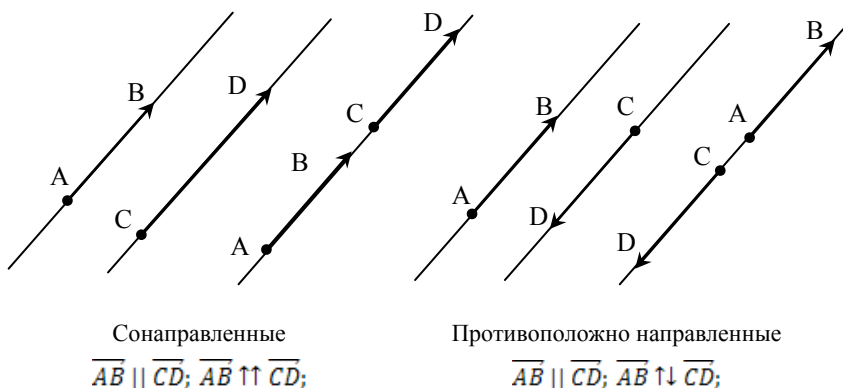


Рис. 2.4

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **эквивалентными**, если они одинаково направлены и имеют одну и ту же длину. Множество всех направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

О п р е д е л е н и е. *Свободным вектором* или просто **вектором** называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Для задания вектора достаточно указать какой-либо один направленный отрезок из этого класса. Обозначать векторы будем малыми латинскими буквами со стрелкой сверху: $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ или $\vec{a} = \{\overrightarrow{AB}\}$, указывая при этом один из направленных отрезков, принадлежащих классу вектора $\vec{a}$. Иногда будем писать $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называть просто вектором.

О п р е д е л е н и е. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если они совпадают как классы эквивалентных направленных отрезков: $\vec{a} = \vec{b}$.

Если заданы вектор $\vec{a}$ и точка A , то существует единственная точка B , такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Операцию построения такой точки B будем называть **откладыванием вектора** $\vec{a}$ от точки A .

Это означает, что вектор $\vec{a}$ может быть отложен из любой точки пространства.

Длиной или модулем вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется длина любого его представителя. Обозначается $|\vec{a}|$; $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором**.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол φ , не превышающий π , между представителями этих векторов, отложенными от одной точки (рис. 2.5).

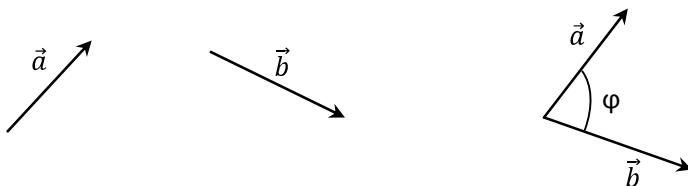


Рис. 2.5

О п р е д е л е н и е. Векторы называются **коллинеарными**, если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой.

О п р е д е л е н и е. Векторы называются **компланарными**, если направленные отрезки, которые их определяют, параллельны некоторой плоскости.

О п р е д е л е н и е. Векторы называются **ортогональными**, если угол между ними прямой ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

О п р е д е л е н и е. **Линейными операциями** над векторами называют сложение, вычитание и умножение вектора на число.

О п р е д е л е н и е. Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем какую-либо точку O и отложим от нее вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Далее от точки A отложим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «замыкающей» (его еще называют «правилом треугольника») и «параллелограмма», проиллюстрированные на рис. 2.6, а и 2.6, б соответственно.

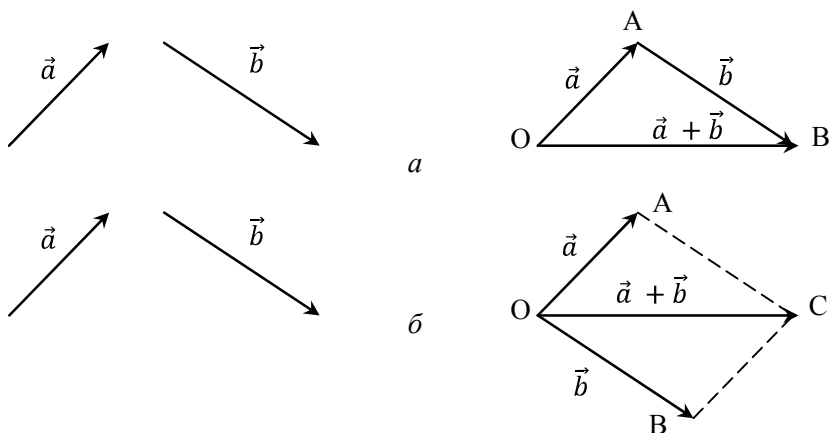


Рис. 2.6

О п р е д е л е н и е. *Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α* называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

б) векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ сонаправлены при $\alpha > 0$ ($\vec{a} \uparrow \uparrow \alpha\vec{a}$) и противоположно направлены при $\alpha < 0$ ($\vec{a} \uparrow \downarrow \alpha\vec{a}$).

Теорема 1 (критерий коллинеарности). *Для того, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить как произведение другого на число, т. е. чтобы существовало действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, или существовало бы число β такое, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$.*

Теорема 2 (критерий компланарности). *Для того, чтобы три вектора были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других, причем если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, то всякий третий компланарный им вектор $\vec{c}$ может быть единственным способом представлен в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

О п р е д е л е н и е. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор на этой прямой, *базисом на плоскости* – упоря-

доченная пара $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ двух неколлинеарных векторов этой плоскости, **базисом в пространстве** – упорядоченная тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ некомпланарных векторов.

О п р е д е л е н и е. **Базис** называется **ортонормированным**, если образующие его векторы единичной длины и попарно ортогональные. Примером является базис, обозначаемый $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $(|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1; \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{i} \perp \vec{k}; \vec{j} \perp \vec{k})$. Совокупность фиксированной точки O пространства и ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется **декартовой прямоугольной системой координат**: $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Точка O называется **началом системы координат**.

О п р е д е л е н и е. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется **правой**, если поворот по кратчайшему пути от первого вектора $\vec{e}_1$ ко второму вектору $\vec{e}_2$ из конца вектора $\vec{e}_3$ виден против часовой стрелки. В противном случае эта тройка называется **левой** (рис. 2.7). Соответствующие **системы координат** называются **правыми** или **левыми**.

В дальнейшем мы будем пользоваться только правыми системами координат.

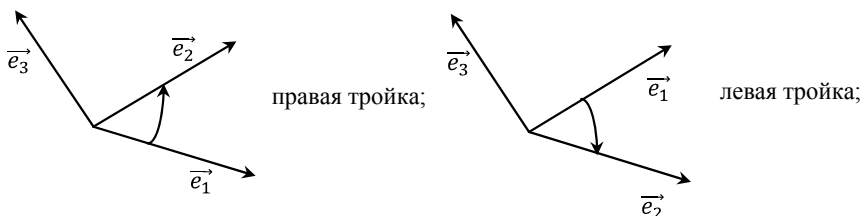


Рис. 2.7

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) координатных осей Ox , Oy , Oz соответственно прямоугольной системы координат $Oxyz$, то для любого вектора $\vec{a}$ существует единственная упорядоченная тройка действительных чисел $(x; y; z)$ такая, что:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.20)$$

Равенство (2.20) называется **разложением вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$** , а коэффициенты разложения – **координатами вектора $\vec{a}$** в этом базисе. При этом пишут $\vec{a} = (x; y; z)$ или $\vec{a}(x; y; z)$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора, причем $\vec{b} \neq 0$. Отложим эти векторы от некоторой точки O ; получим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, пусть точка A_1 – проекция точки A на прямую OB (рис. 2.8).

О п р е д е л е н и е. **Проекцией** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число $np_{\vec{b}}\vec{a}$, которое определяется следующим образом:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_1}|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow \uparrow \vec{b}; \\ -|\overrightarrow{OA_1}|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow \downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

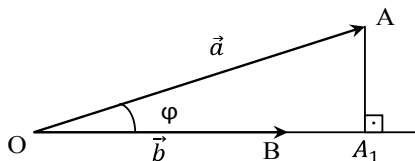


Рис. 2.8

Координаты x, y, z вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это его проекции на соответствующие координатные оси: $x = np_{\vec{i}}\vec{a}$, $y = np_{\vec{j}}\vec{a}$, $z = np_{\vec{k}}\vec{a}$.

Длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.21)$$

О п р е д е л е н и е. **Направляющими косинусами** вектора $\vec{a}(x; y; z)$ называются косинусы углов α, β, γ , которые вектор образует с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ (рис. 2.9). При этом:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \quad (2.22)$$

Имеет место равенство: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Для единичного вектора $\vec{a}^0$, имеющего направление вектора $\vec{a}$, имеем:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (2.23)$$

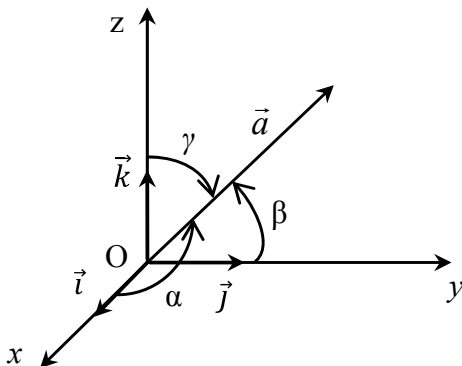


Рис. 2.9

Пусть даны два вектора $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Тогда:

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

2. При сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2); \alpha \vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (2.24)$$

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты равны разности соответствующих координат конечной и начальной его точек:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (2.25)$$

При этом:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.26)$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, и пусть точка $C(x; y; z)$ такая, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$. Тогда координаты точки C находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.27)$$

Координаты середины отрезка AB (т. е. $\lambda = 1$ в формуле 2.27) определяются равенствами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.28)$$

Пример 2.14. Даны две точки $A(3; -4; 1)$ и $B(4; 6; -3)$. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле (2.25). При этом $x_1 = 3; y_1 = -4; z_1 = 1; x_2 = 4; y_2 = 6; z_2 = -3$, т. е.

$\overrightarrow{AB} = (4 - 3; 6 + 4; -3 - 1) = (1; 10; -4)$. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле (2.21): $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$.

Направляющие косинусы вычисляем по формулам (2.22):

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{117}}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{10}{\sqrt{117}}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{AB}|} = -\frac{4}{\sqrt{117}}.$$

2.8. Скалярное произведение векторов

О п р е д е л е н и е. *Скалярным произведением* ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$ и определяется равенством:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right). \quad (2.29)$$

т. е. число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi = \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right)$ между ними.

Скалярное произведение обладает следующими *свойствами*:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (коммутативность);
- 2) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$ (дистрибутивность);
- 3) $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$) (критерий ортогональности);
- 5) $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$ (скалярный квадрат вектора);
- 6) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : \vec{a}(x_1; y_1; z_1); \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$2) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (\text{следует из свойства 5});$$

$$3) \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (\text{вытекает из}$$

формулы (2.29) и формул для вычисления $(\vec{a}, \vec{b})$ и $|\vec{a}|, |\vec{b}|$).

$$4) \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (\text{следует из свойства 6}).$$

Механический смысл скалярного произведения – это работа A , производимая силой $\vec{F}$, точка приложения которой перемещается по отрезку $M_1 M_2$ из точки M_1 в точку M_2 : $A = (\vec{F}; \overline{M_1 M_2})$.

Пример 2.15. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{a} = (3; -3; 1)$, $\vec{b} = (0; -1; 7)$, а $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 0 + (-3)(-1) + 1 \cdot 7 = 10; |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}.$$

$$\text{Поэтому } \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Пример 2.16. Какую работу производит сила $\vec{F} = (2; -1; -4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A = (1; -2; 3)$ в точку $B = (5; -6; 1)$?

Решение. Используя механический смысл скалярного произведения, имеем $A = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (5-1; -6-(-2); 1-3) = (4; -4; -2)$.

Тогда $A = (\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) = 20$.

Ответ: $A = 20$.

2.9. Векторное произведение векторов

Определение. **Векторным произведением** вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

3) упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (рис. 2.10).

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

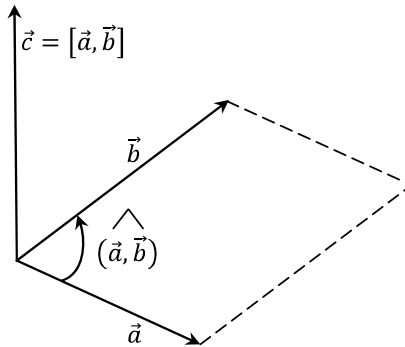


Рис. 2.10

Векторное произведение обладает следующими **свойствами**:

1) $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$ (антикоммутативность);

2) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$ (дистрибутивность);

3) $[\alpha \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \vec{b}] = \alpha [\vec{a}, \vec{b}]$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);

4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (критерий коллинеарности);

5) **геометрический смысл** векторного произведения: модуль векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен **площади параллелограмма**, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от одной точки:

$$S_{\text{паралл}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|;$$

6) **механический смысл** векторного произведения: **момент силы** $\vec{F}$, приложенной в точке B , относительно точки A определяется равенством: $\vec{M}_A(\vec{F}) = [\vec{AB}, \vec{F}]$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$; $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (2.30)$$

Пример 2.17. Найти площадь и длину высоты BD треугольника с вершинами в точках $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$.

Решение. Поскольку площадь S треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2} |\vec{AC}| |\vec{BD}|$, то $|\vec{BD}| = \frac{2S}{|\vec{AC}|}$ (рис. 2.11).

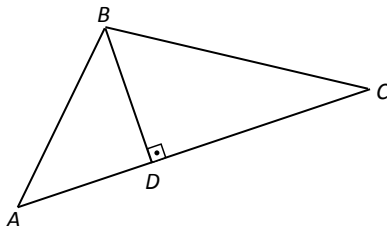


Рис. 2.11

1. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и длину $|\overrightarrow{AC}|$ вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{105}.$$

2. Находим S :

$$S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|; \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}.$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = 14\sqrt{5}; \quad S = 7\sqrt{5}.$$

$$3. |\overrightarrow{BD}| = \frac{14\sqrt{5}}{\sqrt{105}} = \frac{14}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } S = 7\sqrt{5}; |\overrightarrow{BD}| = 2\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Пример 2.18. Сила $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ приложена в точке $B(0; 1; -2)$. Найти $\vec{M}_A(\vec{F})$, если $A(1; -1; 2)$.

Решение. Согласно определению момента силы $\vec{M}_A(\vec{F}) = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}]$, находим координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -4)$, тогда:

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

$$\text{Ответ: } \vec{M}_A(\vec{F}) = (-2; -3; -1).$$

2.10. Смешанное произведение векторов

О п р е д е л е н и е. *Смешанным произведением трех векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ умножается скалярно на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Таким образом, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Смешанное произведение векторов обладает следующими *свойствами*:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]);$$

$$2) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов и меняет знак на противоположный при перемени мест любых двух рядом стоящих векторов – сомножителей;

$$3) (\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$4) (\alpha \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \alpha \vec{c}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

5) модуль смешанного произведения равен *объему параллелепипеда*, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

6) равенство $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ является *необходимым и достаточным условием компланарности векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1); \vec{b}(x_2; y_2; z_2); \vec{c}(x_3; y_3; z_3)$, то:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 2.19. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

Решение. Рассмотрим три вектора (рис. 2.12):

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + \vec{k}.$$

Можно показать, что объем пирамиды $ABCD$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

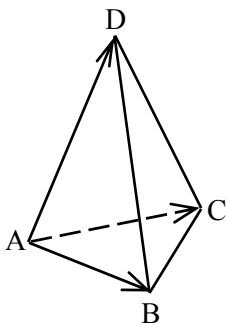


Рис. 2.12

Тогда $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

Т. к. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120$, то $V = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20$.

Ответ: 20.

Пример 2.20. Доказать, что четыре точки $A_1(3; 5; 1)$, $A_2(2; 4; 7)$, $A_3(1; 5; 3)$, $A_4(4; 4; 5)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Достаточно показать, что три вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т. е. компланарны). Находим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (2-3; 4-5; 7-1) = (-1; -1; 6),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (1-3; 5-5; 3-1) = (-2; 0; 2),$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (4-3; 4-5; 5-1) = (1; -1; 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов:

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4} \right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ компланарны, а значит, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости

2.11. Полярная система координат. Уравнение линии на плоскости

2.11.1. Полярная система координат

Полярная система координат задается точкой O , называемой **полюсом**, лучом Op , называемым **полярной осью**, и **единичным вектором** $\vec{e}$ того же направления, что и луч Op .

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью (рис. 2.13) и отсчитываемым в положительном направлении.

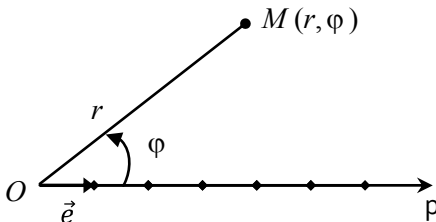


Рис. 2.13

О п р е д е л е н и е. Числа r и φ называются **полярными координатами** точки M : r называют **полярным радиусом**, φ – **полярным углом**.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значение φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ , и наоборот.

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy , а полярную ось – с положительной полуосью Ox (рис. 2.14), то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

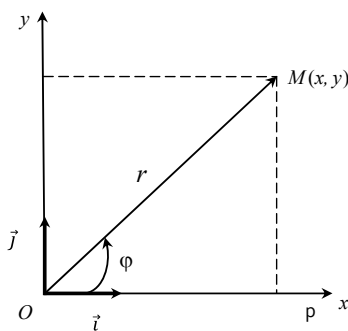


Рис. 2.14

Пример 2.21. Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2; -\frac{2}{3}\pi\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем $r = 2$, $\varphi = -\frac{2}{3}\pi$. По формулам (2.31) находим

$$x = 2 \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad y = 2 \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

Итак, $M(-1; -\sqrt{3})$.

Ответ: $M(-1; -\sqrt{3})$

П р и м е р 2.22. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $(-\sqrt{3}; -1)$.

Р е ш е н и е. Имеем $x = -\sqrt{3}$; $y = -1$. По формулам (2.32) находим $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi < \varphi \leq \pi$, получаем $\varphi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi$.

Итак, $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$.

Ответ: $M\left(2; -\frac{5}{6}\pi\right)$.

2.11.2. Уравнение линии на плоскости

О п р е д е л е н и е. *Уравнением линии на плоскости Оху* называется уравнение $F(x; y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Переменные x и y в уравнении линии называются **текущими координатами** точек линии.

Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r; \varphi) = 0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x; y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината –

по закону $y = y(t)$, где t – переменная, называемая **параметром**, то уравнение линии записывается в виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1; t_2].$$

Эти уравнения называются **параметрическими уравнениями линии**.

2.12. Прямая на плоскости

Будем считать, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy .

2.12.1. Различные виды уравнений прямой

Положение прямой на плоскости однозначно определяется какой-либо фиксированной точкой $M_0(x_0; y_0)$, лежащей на ней, и либо:

1) ненулевым вектором $\vec{n}(A; B) \neq \vec{0}$, перпендикулярным к прямой, который называется **нормальным вектором** прямой;

2) ненулевым вектором $\vec{s}(m; n) \neq \vec{0}$, параллельным прямой, который называется **направляющим вектором** прямой;

3) **угловым коэффициентом** прямой k , который равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox ;

4) **еще одной точкой** $M_1(x_1; y_1)$, не совпадающей с точкой $M_0(x_0; y_0)$.

В каждом из перечисленных случаев получаются свои уравнения прямой.

1. Заданы точка $M_0(x_0; y_0)$, лежащая на прямой, и нормальный вектор $\vec{n}(A; B)$, т. е. $\vec{n}(A; B) \neq \vec{0}$ и перпендикулярен прямой. Имеем следующие уравнения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (2.33)$$

Получаем:

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.34)$$

где $C = -(Ax_0 + By_0)$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. к. $\vec{n} \neq \vec{0}$).

О п р е д е л е н и е. Уравнение (2.34) называется **общим уравнением прямой** на плоскости.

2. Даны точка $M_0(x_0; y_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s}(m; n)$, т. е. $\vec{s} \neq \vec{0}$ и $\vec{s}$ параллелен прямой.

Имеем уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, t \in R \quad (2.35)$$

или при условии $m \neq 0, n \neq 0$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (2.36)$$

О п р е д е л е н и е. Уравнения (2.35) называются **параметрическими** уравнениями, а (2.36) – **каноническим уравнением прямой** на плоскости.

Замечание. В случае, когда одна из координат направляющего вектора $\vec{s}(m; n)$ равна нулю, запись уравнения прямой в канонической форме сохраняется в виде (2.36). При этом если в знаменателе стоит нуль, то к нулю нужно приравнять и числитель. Полученное равенство (или $y = \text{const}$, или $x = \text{const}$) и будет уравнением прямой на плоскости.

3. Если заданы точка $M_0(x_0; y_0)$ прямой и ее угловой коэффициент k , то **уравнение с угловым коэффициентом** имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.37)$$

После приведения подобных членов (2.37) можно записать и так:
 $y = kx + b$.

4. На прямой заданы две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$. Тогда **каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки**, имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (2.38)$$

Расстояние $\rho(M_0; l)$ от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l , заданной уравнением (2.34), вычисляется по формуле:

$$\rho(M_0; l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.39)$$

Пример 2.23. Составить каноническое и общее уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2; 1)$ и $M_2(-1; 2)$.

Решение. Для составления канонического уравнения воспользуемся формулой (2.38):

$$\frac{x - 2}{-1 - 2} = \frac{y - 1}{2 - 1} \text{ или } \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{1} - \text{каноническое уравнение.}$$

Общее уравнение получим из данного канонического, умножая обе части равенства на -3 , перенося все слагаемые в левую часть и приводя подобные члены:

$$x - 2 + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0 - \text{общее уравнение.}$$

Пример 2.24. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(-1; 2)$ перпендикулярно вектору, проходящему через точки $M_1(3; 1)$ и $M_2(4; -2)$. Найти расстояние от точки M до прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 .

Решение. Уравнение прямой запишем в виде (2.33):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где x_0, y_0 – координаты точки M , а A и B – координаты нормального вектора.

Так как $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (1, -3)$, то уравнение имеет вид: $1(x + 1) - 3(y - 2) = 0$ или $x - 3y + 7 = 0$.

Для нахождения расстояния от точки M до прямой M_1M_2 запишем уравнение этой прямой в виде (2.38):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ т. е. } \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 1}{-3},$$

или $3x + y - 10 = 0$.

Подставляя в формулу (2.39) координаты $x_0 = -1, y_0 = 2$ точки M , получаем:

$$\rho(M; l) = \frac{|3(-1) + 1 \cdot 2 - 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\rho(M; l) = \frac{11}{\sqrt{10}}.$

2.12.2. Угол между прямыми на плоскости

О п р е д е л е н и е. Под *углом между прямыми на плоскости* понимают наименьший (острый) из углов, образованных этими прямыми. Один из углов, образованных пересечением прямых, совпадает с углом между векторами нормали или направляющими векторами прямых.

1. Если две прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) \right| = \frac{\left| (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right|}{\left| \vec{n}_1 \right| \cdot \left| \vec{n}_2 \right|} = \frac{\left| A_1 A_2 + B_1 B_2 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (2.40)$$

где $\vec{n}_1(A_1; B_1), \vec{n}_2(A_2; B_2)$ – векторы нормали прямых.

2. Если прямые l_1 и l_2 заданы **каноническими (параметрическими)** уравнениями: $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, то:

$$\cos \varphi = \left| \cos \left(\vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) \right| = \frac{|\vec{s}_1; \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \quad (2.41)$$

где $\vec{s}_1(m_1; n_1)$, $\vec{s}_2(m_2; n_2)$ – направляющие векторы прямых.

Пример 2.25. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $9x - 3y + 7 = 0$ и $6x + 3y - 4 = 0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Запишем векторы нормалей этих прямых $\vec{n}_1(9; -3)$; $\vec{n}_2(6; 3)$ и воспользуемся формулой (2.40):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1; \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|9 \cdot 6 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{9^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{45}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Для того, чтобы найти точку пересечения прямых, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x - 3y + 7 = 0, \\ 6x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Складывая оба уравнения, получим $\begin{cases} 15x + 3 = 0 \\ 6x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$, откуда

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = \frac{26}{15}. \end{cases}$$

Пример 2.26. Дана прямая $3x - 4y = 7$. Через точку $M_0(3; 2)$ проведена прямая: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой. Составить ее уравнение.

Решение. а) $\vec{n}(3; -4)$ – вектор нормали исходной прямой. В силу параллельности прямых его можно считать и вектором нормали искомой прямой. Составляем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3; -4)$ (см. 2.33):

$$3(x-3) + (-4)(y-2) = 0, \text{ или } 3x - 4y - 1 = 0.$$

б) В силу перпендикулярности прямых вектор нормали $\vec{n}(3; -4)$ будет направляющим вектором для перпендикулярной прямой: $\vec{s} = \vec{n}(3; -4)$. Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3; 2)$ параллельно вектору $\vec{s}(3; -4)$ (см. (2.36)):

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-4} \Rightarrow -4x + 12 = 3y - 6 \Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0 - \text{искомое уравнение.}$$

2.13. Плоскость в пространстве

Будем считать, что в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$.

2.13.1. Различные виды уравнения плоскости

Однозначное расположение плоскости определяется:

1) либо фиксированной точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащей на этой плоскости, и ненулевым вектором $\vec{n}(A; B; C)$, перпендикулярным к плоскости, который называется **нормальным вектором**;

2) либо тремя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащими на одной прямой.

Рассмотрим эти случаи.

1. **Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A; B; C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$:**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.42)$$

Если раскрыть скобки, привести подобные члены, обозначить $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, то будем иметь уравнение, которое называется **общим уравнением плоскости**:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \quad (2.43)$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки
 $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.44)$$

Если вычислить этот определитель, то мы придем к уравнению вида (2.43), т. е. к общему уравнению плоскости.

Пример 2.27. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2; 1; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1; -2; 3)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.42):

$$1 \cdot (x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - (-1)) = 0.$$

Отсюда $x - 2 - 2y + 2 + 3z + 3 = 0$, а значит, $x - 2y + 3z + 3 = 0$ — общее уравнение искомой плоскости.

Пример 2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2; 3; 1)$ параллельно плоскости Oxy .

Решение. В качестве вектора нормали плоскости Oxy можно взять базисный вектор $\vec{k} = (0; 0; 1) = \vec{n}$, который будет служить и вектором нормали искомой плоскости. Далее по формуле (2.42) $0 \cdot (x + 2) + 0 \cdot (y - 3) + 1 \cdot (z - 1) = 0$ или $z - 1 = 0$.

Пример 2.29. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$, $M_3(0; -3; 1)$.

Решение. Используя формулу (2.44), получим:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & 2-0 & 3+1 \\ 0-1 & -3-0 & 1+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 16(x-1) - 6y - (z+1) = 0 \Rightarrow 16x - 6y - z - 17 = 0$ – общее уравнение искомой плоскости.

2.13.2. Угол между плоскостями

Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (2.45)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2.46)$$

Углом между плоскостями (2.45) и (2.46) называется угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$.

Поэтому косинус угла φ между ними находится по формуле:

$$\cos \varphi = \cos \left(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \right) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.47)$$

Величина меньшего угла между плоскостями вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2.48)$$

Пример 2.30. Найти угол между двумя плоскостями:
 $x - 2y - z + 1 = 0$, $x + 3z - 7 = 0$.

Решение. Нормальный вектор первой плоскости $\vec{n}_1(1; -2; -1)$, второй – $\vec{n}_2(1; 0; 3)$. Следовательно, по формуле (2.47):

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \\ &= \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}, \end{aligned}$$

угол находится из соотношения: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}$; $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}$.

2.13.3. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.49)$$

Пример 2.31. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями: $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Решение. $\vec{n}(1; -2; -2)$ – вектор нормали обеих плоскостей. Для решения задачи найдем какую-либо точку на первой плоскости и вычислим расстояние от этой точки до второй плоскости. Для этого положим в первом уравнении $x = 0$, $y = 0$, тогда $-2z - 12 = 0$. Отсюда $z = -6$. Следовательно, $M_0(0; 0; -6)$ – точка, лежащая на первой плоскости. Тогда по формуле (2.49) имеем:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-6) - 12|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2, \text{ т. е. } d = 2.$$

2.14. Прямая в пространстве

2.14.1. Различные уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве однозначно определяется:

1) заданием точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s}(m; n; p)$, параллельного прямой, который называется **направляющим вектором** прямой;

2) заданием двух точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ на этой прямой;

3) пересечением двух непараллельных плоскостей.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m; n; p)$, $\vec{s} \neq \vec{0}$, имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (2.50)$$

а ее **параметрические уравнения**:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t \in R. \quad (2.51)$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.52)$$

Общим уравнением прямой называется система уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

т. е. прямая задается пересечением двух плоскостей. Направляющий вектор прямой (2.53) находится по формуле:

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Пример 2.32. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4; 3; -2)$ параллельно

1) вектору $\vec{s}(3; -6; 5)$; 2) прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$

Решение.

1. Вектор $\vec{s}(3; -6; 5)$ является направляющим вектором искомой прямой, проходящей через точку M_0 . Тогда по формуле (2.50) канонические уравнения прямой примут вид:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z+2}{5}.$$

Используя (2.51), параметрические уравнения прямой запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 - 6t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Направляющий вектор $\vec{s}_1$ заданной в условии прямой находим по формуле (2.54):

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 6\vec{j} - 7\vec{k},$$

т. е. $\vec{s}_1 = (-11; 6; -7)$.

Вектор $\vec{s}_1$ может служить направляющим вектором и искомой прямой, т. к. прямые параллельны. Получаем канонические уравнения:

$$\frac{x-4}{-11} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+2}{-7}.$$

Параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = 4 - 11t, \\ y = 3 + 6t, \\ z = -2 - 7t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример 2.33. Найти уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(2; 2; 2)$ и $M_2(6; 2; 1)$.

Решение. Воспользуемся уравнениями (2.52):

$$\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-2}{1-2} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}.$$

Запись уравнений прямой в канонической форме сохраняется и в случае обращения отдельных координат вектора $\vec{s}$ в ноль. Если в знаменателе стоит ноль, то нулю нужно приравнять и числитель,

т. е. уравнения можно записать в виде:
$$\begin{cases} y - 2 = 0, \\ \frac{x-2}{4} = \frac{z-2}{-1}, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ x + 4z - 10 = 0, \end{cases}$$
 – это общее уравнение прямой в пространстве.

При этом параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 2, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Пример 2.34. Общее уравнение прямой:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z - 5 = 0, \end{cases}$$

преобразовать к каноническому виду.

Решение. Нам надо знать какую-либо точку на прямой и ее направляющий вектор $\vec{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z = 0$; тогда для нахождения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений: $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y - 5 = 0, \end{cases}$ из которой находим $x = 1, y = -\frac{3}{2}$. Значит, $M_0\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$ – точка прямой.

Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой находим по формуле (2.54):

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k},$$

т. е. $\vec{s} = (-4; -7; -6)$. Тогда, согласно формуле (2.50):

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{-7} = \frac{z}{-6} - \text{искомые канонические уравнения прямой.}$$

2.14.2. Угол между прямыми в пространстве

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad (2.55)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \quad (2.56)$$

Под **углом между прямыми** (2.55) и (2.56) понимают угол между направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Величина этого угла φ определяется формулой:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (2.57)$$

Пример 2.35. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-8}$ и $\frac{x}{11} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{-7}$.

Решение. $\vec{s}_1(7; 2; -8)$ и $\vec{s}_2(11; -8; -7)$ – направляющие векторы первой и второй прямых соответственно. Тогда по формуле (2.57):

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos \left(\vec{s}_1, \vec{s}_2 \right) = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{7 \cdot 11 + 2 \cdot (-8) + (-8)(-7)}{\sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} = \\ &= \frac{117}{\sqrt{117} \cdot \sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.\end{aligned}$$

2.15. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть прямая задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

а плоскость задана общим уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол φ (острый) между прямой и ее проекцией на плоскость. Величина угла φ определяется по формуле:

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\vec{s}, \vec{n} \right) \right| = \frac{|(\vec{s}, \vec{n})|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (2.58)$$

Пример 2.36. Найти угол (в градусах) между прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $3x - 4y + z - 2 = 0$.

Решение. В данном случае направляющий вектор прямой $\vec{s} = (3; 1; 2)$; а вектор нормали плоскости $\vec{n} = (3; -4; 1)$.

Воспользуемся формулой (2.58). Получим:

$$\sin \varphi = \frac{|9 - 4 + 2|}{\sqrt{9 + 1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 16 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{7}{2\sqrt{91}} \approx 0,37.$$

Откуда $\varphi = \arcsin 0,37 \approx 21,5^\circ$.

Пример 2.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = (2; 1; -2)$ прямой может служить нормальным вектором для искомой плоскости: $\vec{n} = \vec{s} = (2; 1; -2)$. Теперь воспользуемся формулой общего уравнения искомой плоскости (2.42):

$$2(x-4) + 1 \cdot (y - (-3)) + (-2) \cdot (z-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 7 = 0$$

Пример 2.38. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3; 4; 5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Точка M_2 , симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2 , для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости – это нормальный вектор этой плоскости $\vec{n} = (1; -2; 1)$. Уравнения перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1 , имеют вид ($\vec{s} = \vec{n} = (1; -2; 1)$):

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} (=t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 5 + t. \end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью найдем, решая систему:

$$\begin{cases} x = 3 + t; y = 4 - 2t; z = 5 + t; \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y, z в последнее уравнение системы, получим:

$$(3 + t) - 2(4 - 2t) + (5 + t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Теперь, подставляя найденное значение t в x, y, z , будем иметь: $x = 3 + 1 = 4; y = 4 - 2 = 2; z = 5 + 1 = 6$, т. е. $N(4; 2; 6)$ – точка пересечения перпендикуляра и плоскости. А так как N – середина отрезка

$$M_1M_2, \text{ то } x_N = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}; y_N = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}; z_N = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}.$$

Имеем: $4 = \frac{3 + x_{M_2}}{2}; 2 = \frac{4 + y_{M_2}}{2}; 6 = \frac{5 + z_{M_2}}{2}$. Отсюда находим: $x_{M_2} = 5; y_{M_2} = 0; z_{M_2} = 7$. Значит, точка M_2 имеет координаты $(5; 0; 7)$.

2.16. Кривые второго порядка

Считаем, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy .

Уравнением второй степени с двумя переменными называется уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (2.59)$$

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют какому-либо уравнению 2-й степени (2.59).

Линиями 2-го порядка являются **окружность, эллипс, гипербола, парабола**. Рассмотрим уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

2.16.1. Окружность

О п р е д е л е н и е. **Окружностью** называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N(a; b)$, называемой **центром**, на одно и то же расстояние R , называемое **радиусом** окружности (рис. 2.15).

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (2.60)$$

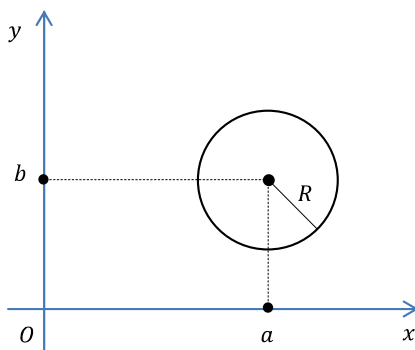


Рис. 2.15

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. $a = b = 0$, то уравнение (2.60) имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (2.61)$$

2.16.2. Эллипс

О п р е д е л е н и е. **Эллипсом** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса F_1 и F_2 , $|F_1 F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат, то $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$.

Обозначив через $2a$ сумму расстояний от точки кривой до фокусов ($2a > 2c$), получим **каноническое уравнение эллипса**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.62)$$

В этом уравнении $a > b$; $b > 0$ и числа a, b, c связаны соотношением:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

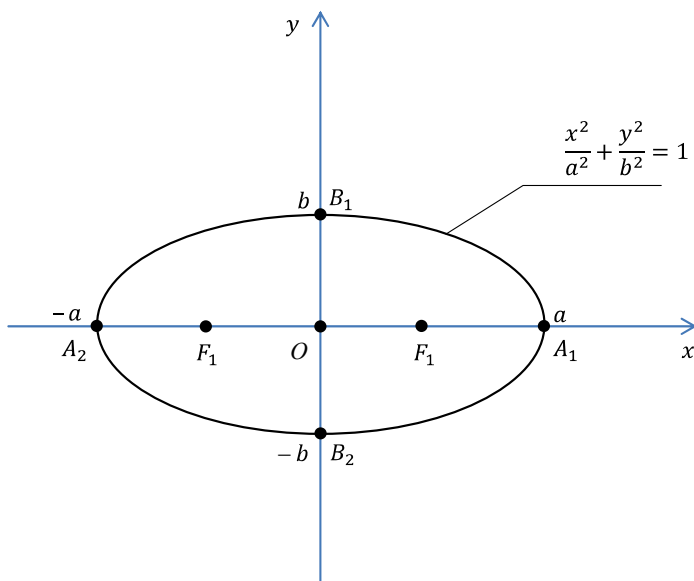


Рис. 2.16

Числа a и b называются **полуосями** эллипса, a – **большая полуось**, b – **малая полуось**.

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ называются **вершинами** эллипса (это точки пересечения эллипса с осями координат), точка $O(0; 0)$ – **центром** эллипса. Эллипс, заданный уравнением (2.62), изображен на рис. 2.16.

Эксцентриситетом эллипса называется число ε , равное отношению расстояния между фокусами эллипса $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (0 \leq \varepsilon < 1, \text{ т. к. } c < a).$$

Замечания.

1. При $a < b$ уравнение (2.62) также задает эллипс, но его фокусы лежат на оси Oy , при этом $c^2 = b^2 - a^2$; $F_1(0; -c)$; $F_2(0; c)$;

$\varepsilon = \frac{c}{b}$ (рис. 2.17).

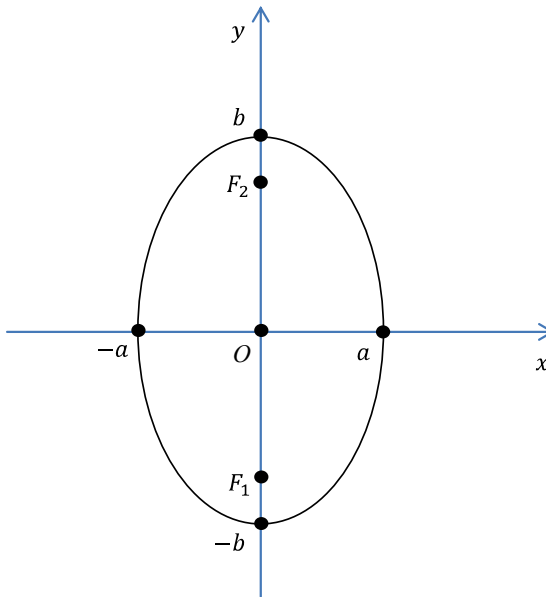


Рис. 2.17

2. Если $a = b$, то уравнение (2.62) определяет окружность радиуса a с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$. В этом случае $c = 0$. Следовательно, окружность – это частный случай эллипса с совпадающими фокусами, при этом $\varepsilon = 0$.

3. Уравнение эллипса с осями параллельными координатным имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (2.63)$$

где x_0, y_0 – координаты центра эллипса.

4. Уравнения: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$, являются параметрическими уравнениями эллипса.

2.16.3. Гипербола

О п р е д е л е н и е. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых **фокусами**, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами, и отличная от нуля. Если фокусы гиперболы F_1 и F_2 , $|F_1F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$; и обозначить модуль разности расстояний от точки кривой до фокусов через $2a$ ($0 < a < c$), то **каноническое уравнение гиперболы** имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.64)$$

в котором $b > 0$, причем $c^2 = a^2 + b^2$.

Гипербола (2.64) пересекает ось Ox в точках $A_1(a;0)$; $A_2(-a;0)$, которые называются **вершинами** гиперболы, а ось Oy гипербола не пересекает.

Та ось гиперболы, которую она пересекает, называется **действительной**, а та, которую не пересекает – **мнимой**. Числа a и b называются **полуосями** гиперболы; (a – **действительная**, b – **мнимая** полуоси). Точка $O(0;0)$ называется **центром** гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ называются **асимптотами** гиперболы. При неограниченном удалении от начала координат гипербола бесконечно близко приближается к своей асимптоте, не пересекая ее. Гипербола (2.64) изображена на рис. 2.18.

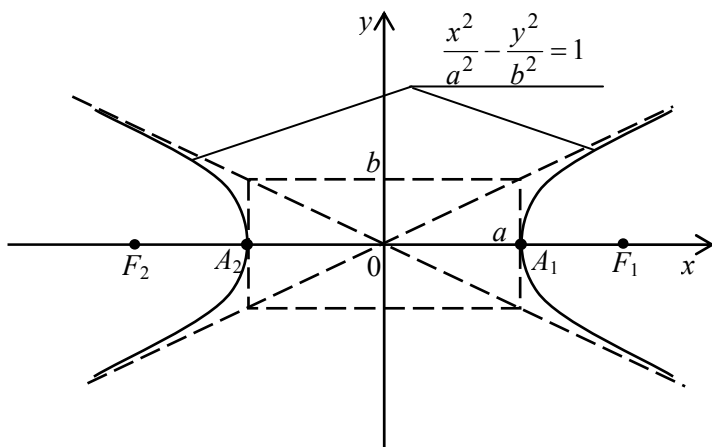


Рис. 2.18

Эксцентриситетом гиперболы называется число ε , равное отношению половины расстояния между фокусами гиперболы к ее действительной полуоси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1, \text{ т. к. } c > a).$$

Замечания.

1. Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy , то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \quad (2.65)$$

Действительной осью гиперболы (2.65) является ось Oy , а мнимой — ось Ox . Гиперболы, заданные уравнениями (2.64) и (2.65),

называются *сопряженными*. Сопряженные гиперболы имеют одинаковые асимптоты, а действительные оси их взаимно перпендикулярны. Для гиперболы (2.65) $\varepsilon = \frac{c}{b}$. Она изображена на рис. 2.19.

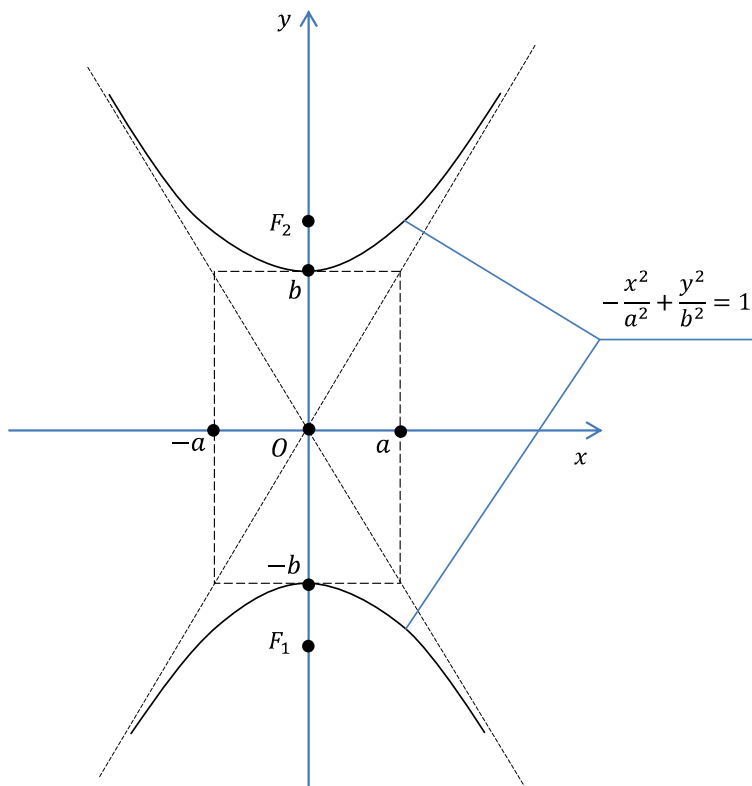


Рис. 2.19

2. Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (2.66)$$

где $(x_0; y_0)$ – координаты центра гиперболы.

2.16.4. Парабола

О п р е д е л е н и е. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой **фокусом** F , и данной прямой l , называемой **директрисой**.

Если расстояние от фокуса F до директрисы l обозначить через p , расположить фокус F на оси Ox , которая перпендикулярна директрисе l , а ось Oy – посередине между фокусом и директрисой параллельно последней, то парабола задается уравнением:

$$y^2 = 2px, \quad (2.67)$$

которое называется каноническим уравнением параболы (рис. 2.20).

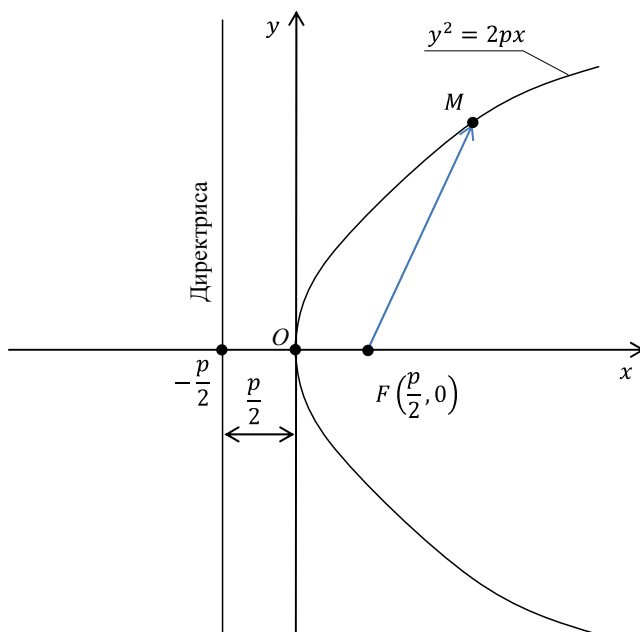


Рис. 2.20

Число p , равное расстоянию от фокуса F до директрисы l , называется **параметром** параболы, точка $O(0;0)$ – ее **вершиной**, а ось

Ox – *осью симметрии* параболы. *Уравнение директрисы l* имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$. *Эксцентриситет ε параболы* по определению считается равным 1: $\varepsilon = 1$.

Замечания.

1. Уравнение $y^2 = -2px$ также задает параболу, симметричную относительно оси Ox (рис. 2.21).

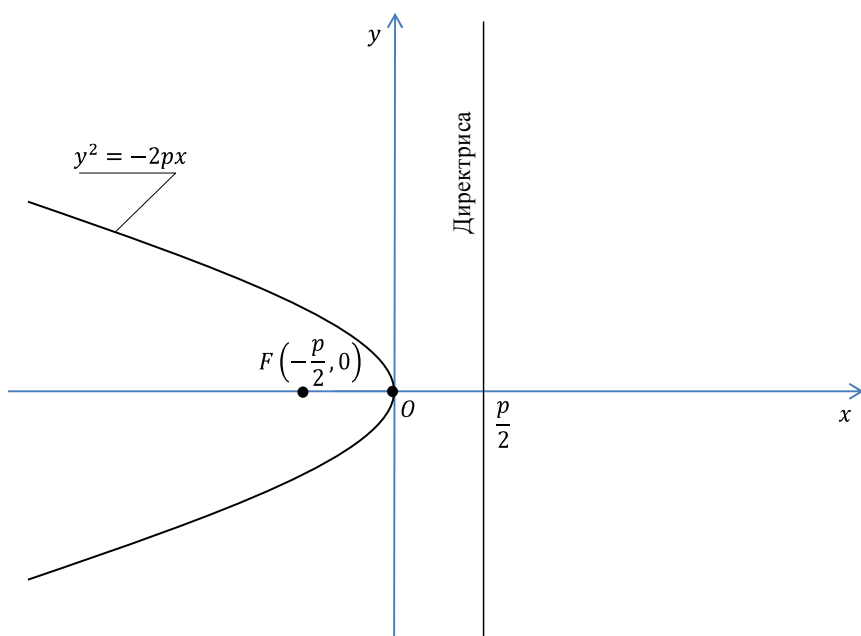


Рис. 2.21

2. Уравнения $x^2 = 2py$; $x^2 = -2py$ также задают параболы, но симметричные относительно оси Oy (рис. 2.22 и рис. 2.23).

3. Уравнения парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям, имеют вид:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0); \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

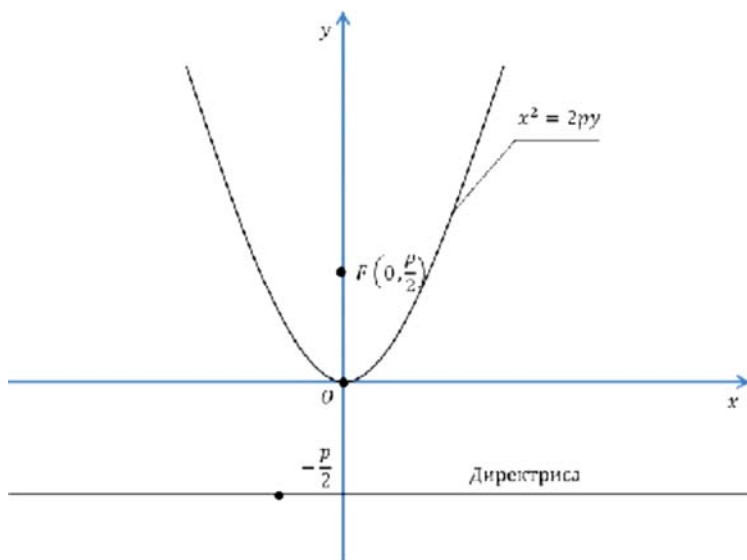


Рис. 2.22

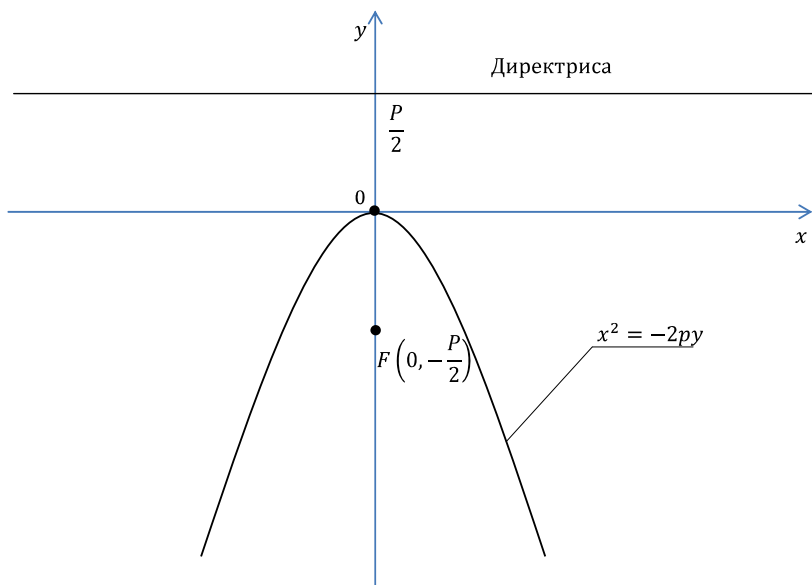


Рис. 2.23

2.16.5. Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Известно, что для любой линии второго порядка на плоскости существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта линия задается каноническим уравнением.

Покажем на конкретных примерах, как практически привести уравнение линии 2-го порядка, не содержащее члена с произведением переменных, т. е. $B = 0$ в (2.59), к каноническому виду.

Пример 2.39. Линия второго порядка задана уравнением:

$$3y^2 - 12x - 6y + 11 = 0.$$

Определить вид этой линии и нарисовать ее.

Решение. Уравнение не является каноническим. Выделим полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с переменной y , **причем коэффициент при y^2 обязательно выносим за скобки**.

$$\begin{aligned} 3(y^2 - 2y) - 12x + 11 = 0 &\Leftrightarrow 3((y^2 - 2y + 1) - 1) - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow \\ 3(y - 1)^2 - 3 - 12x + 11 = 0 &\Leftrightarrow 3(y - 1)^2 = 12x - 8 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4\left(x - \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Применив преобразование параллельного переноса $X = x - \frac{2}{3}$; $Y = y - 1$, из последнего уравнения получаем каноническое уравнение $Y^2 = 4X$. Отсюда видим, что рассматриваемая линия – парабола, симметричная относительно оси O_1X .

Чтобы нарисовать эту линию, изобразим на одном рисунке обе системы координат Oxy и O_1XY . При параллельном переносе координатные оси перемещаются параллельно самим себе, поэтому для определения их расположения достаточно определить положение нового начала координат. В точке O_1 $X = 0$ и $Y = 0$, значит, $x = \frac{2}{3}$;

$y = 1$. Через точку $O_1\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ проводим оси, сонаправленные осям Ox

и Oy , и получаем новую систему координат. В этой системе рисуем параболу $Y^2 = 4X$, вершина которой находится в начале координат, а ветви направлены в сторону положительного направления оси O_1X симметрично этой оси (рис. 2.24).

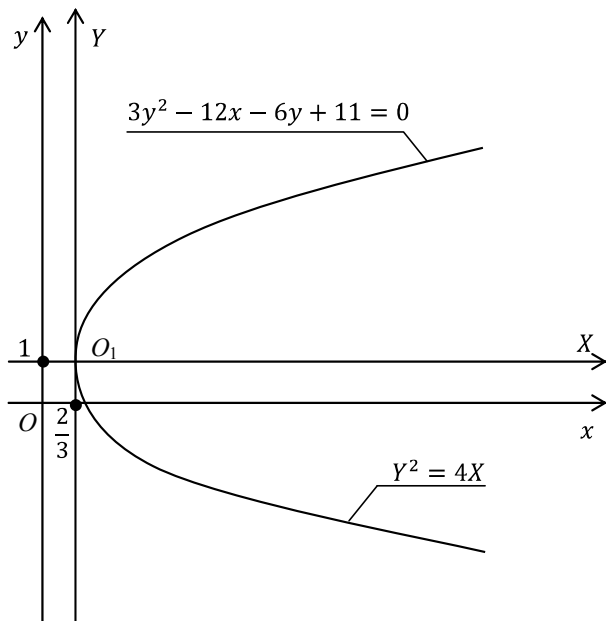


Рис. 2.24

Пример 2.40. Построить линию, определяемую уравнением $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y соответственно:

$$2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 5(y^2 + 2y + 1) - 5 + 13 = 0;$$

$$2(x - 3)^2 + 5(y + 1)^2 = 10;$$

$$\frac{(x - 3)^2}{5} + \frac{(y + 1)^2}{2} = 1.$$

Обозначая $x - 3 = X$, $y + 1 = Y$, получим каноническое уравнение эллипса $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$. Начало новой системы координат – точка $O_1(3; -1)$; оси O_1X , O_1Y параллельны осям Ox и Oy соответственно. Большая полуось эллипса $a = \sqrt{5}$, малая полуось $b = \sqrt{2}$. Изобразим кривую на рис. 2.25.

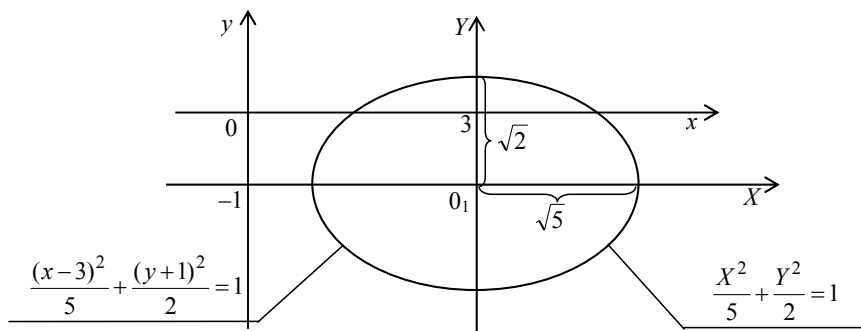


Рис. 2.25

2.17. Поверхности второго порядка

Мы будем рассматривать в данном параграфе только прямоугольную систему координат $Oxyz$.

2.17.1. Цилиндры и конусы

Пусть в пространстве заданы некоторая линия L и прямая α , пересекающая L .

О п р е д е л е н и е. *Цилиндрической поверхностью или цилиндром* называется поверхность, образованная прямой α при ее перемещении параллельно самой себе так, что она все время пересекает линию L . Прямые, полученные при перемещении прямой α , называются *образующими* этого цилиндра, а линия L – его *направляющей*. Если цилиндр имеет ось симметрии, а направляющая, лежащая в перпендикулярной этой оси плоскости, является окружностью, то цилиндр называется *круговым*.

Заметим, что если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, то это уравнение задает цилиндр с образующими, параллельными координатной оси, определяемой отсутствующей координатой. Уравнение направляющей этого цилиндра, лежащей в перпендикулярной образующим координатной плоскости, совпадает с уравнением самого цилиндра.

Так, уравнение $F(x; y) = 0$ задает цилиндр с образующими, параллельными оси Oz . Если это уравнение рассматривать в системе координат Oxy (т. е. в плоскости $z = 0$), то получим уравнение направляющей этого цилиндра.

Уравнения $F(x; z) = 0$ и $F(y; z) = 0$ задают цилиндры с образующими, параллельными осям Oy и Ox соответственно.

Пусть в пространстве задана некоторая линия L и точка O' .

О п р е д е л е н и е. *Конической поверхностью* или *конусом* называется поверхность, образованная прямыми, проходящими через O' и пересекающими кривую L . Прямые, из которых состоит конус, называются его *образующими*, а точка O' – его *вершиной*. Если конус имеет ось симметрии, а все его образующие наклонены к ней под одним и тем же углом, то конус называется *круговым*.

2.17.2. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

О п р е д е л е н и е. *Поверхностью второго порядка* называется множество всех точек пространства, удовлетворяющих в некоторой системе координат какому-либо уравнению 2-й степени, т. е. уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + R = 0. \quad (2.68)$$

Уравнение (2.68) называется *общим уравнением* поверхности второго порядка (коэффициенты A, B, C, D, E, F не равны нулю одновременно).

Для любой поверхности 2-го порядка в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой

эта поверхность задается каноническим уравнением. Перечислим основные типы канонических уравнений 2-й степени с тремя переменными:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – эллипсоид (рис. 2.26);

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – однополостный гиперболоид (рис. 2.27);

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – двуполостный гиперболоид (рис. 2.28);

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус второго порядка (рис. 2.29);

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ – эллиптический параболоид (рис. 2.30);

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллиптический цилиндр (рис. 2.31);

7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ – гиперболический параболоид (рис. 2.32);

8) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр (рис. 2.33);

9) $y^2 = 2px$ – параболический цилиндр (рис. 2.34);

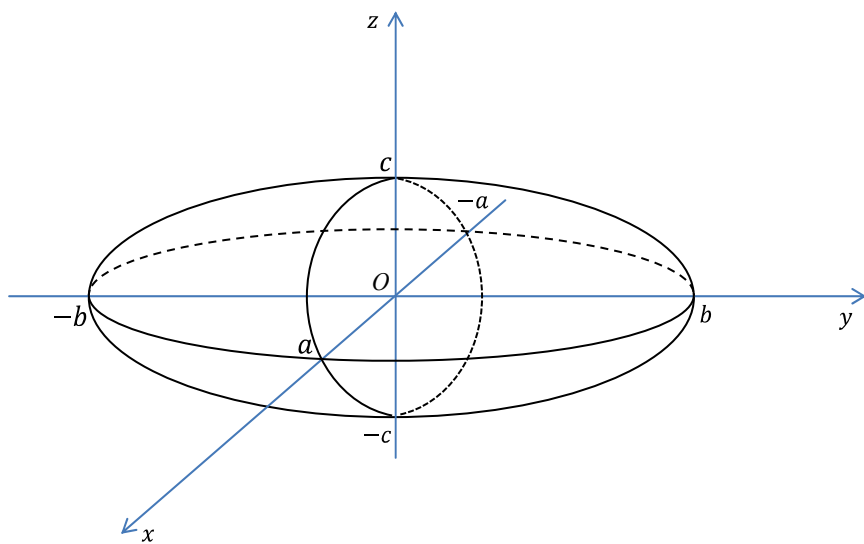


Рис. 2.26

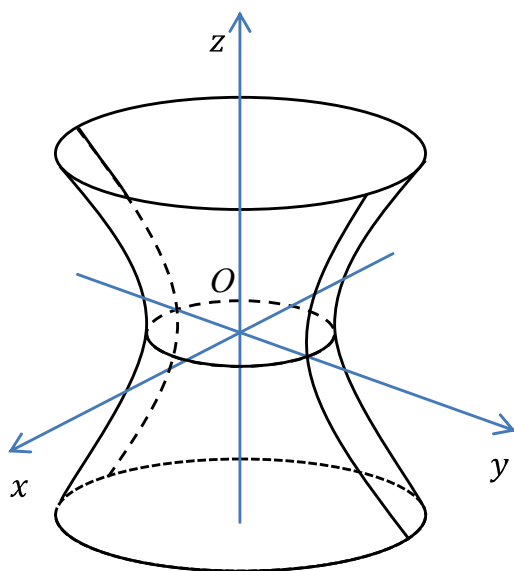


Рис. 2.27

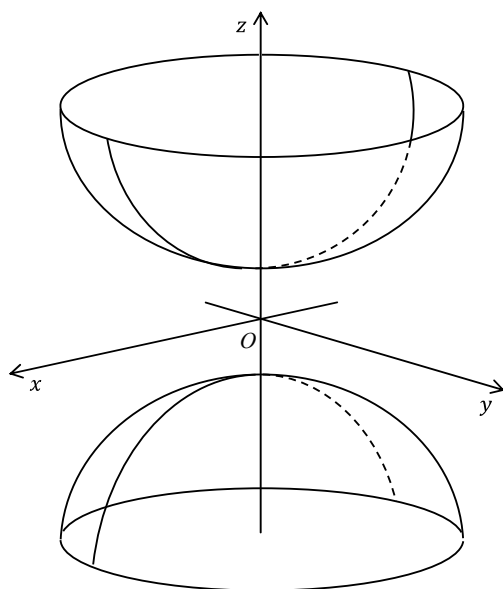


Рис. 2.28

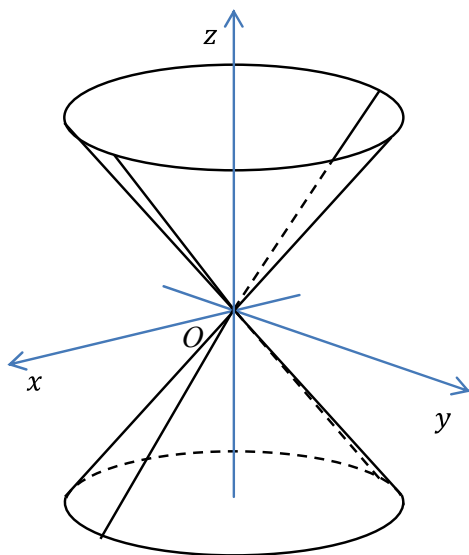


Рис. 2.29

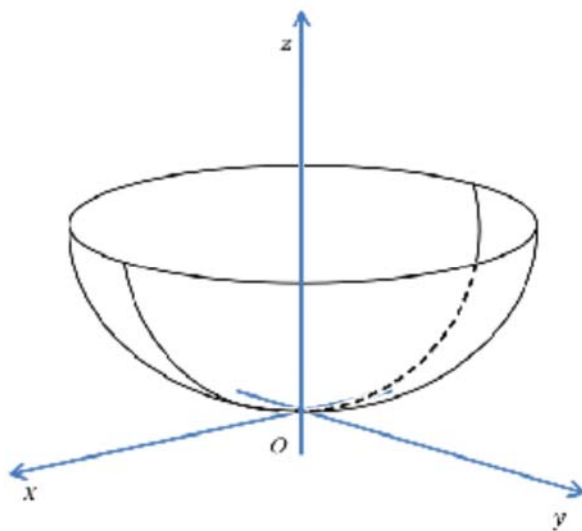


Рис. 2.30

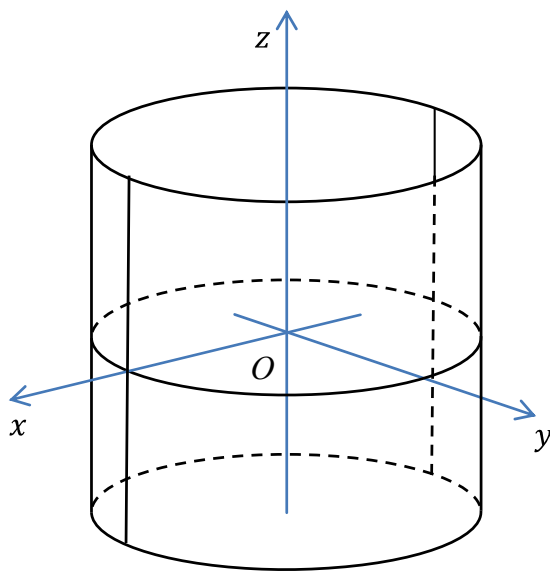


Рис. 2.31

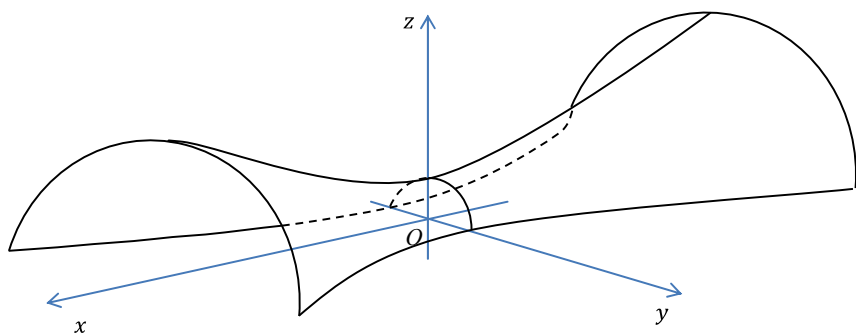


Рис. 2.32

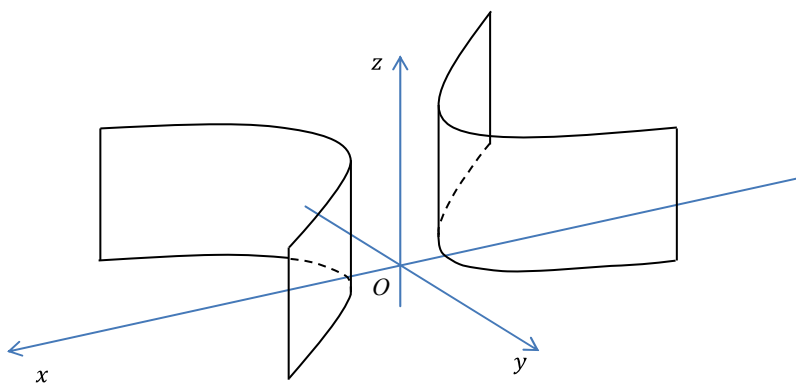


Рис. 2.33

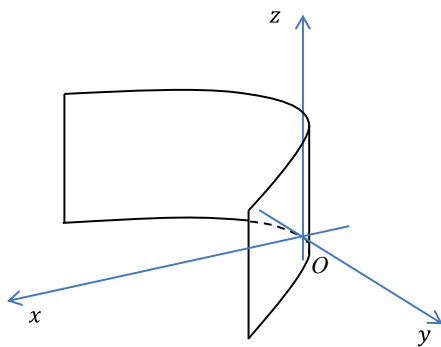


Рис. 2.34

Пример 2.41. Построить тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

Решение. Тело ограничено снизу поверхностью параболоида: $x^2 + y^2 = 3z$, а сверху – поверхностью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Тело изображено на рис. 2.35.

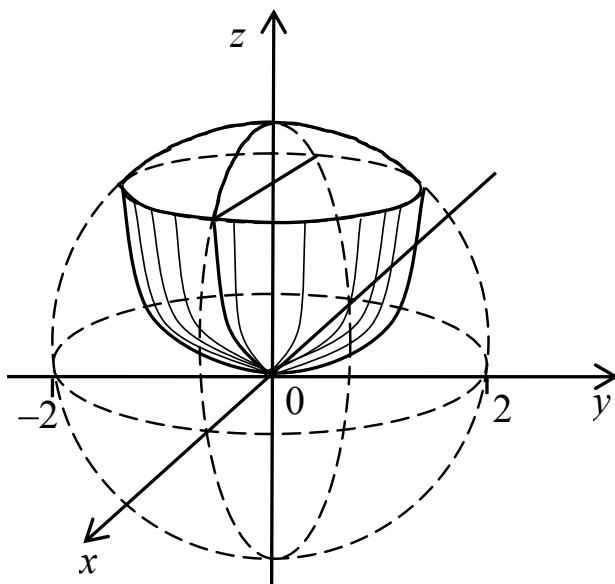


Рис. 2.35

Пример 2.42. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad x = 0, z = 0 \quad (x \geq 0, z \geq 0), \quad y = 3, y = -3.$$

Решение. Поверхность $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ – эллиптический цилиндр.

Он пересечен плоскостями $x = 0$, $z = 0$ (координатные плоскости Ozy и Oxy). По оси Oy тело ограничено плоскостями $y = 3$, $y = -3$ (рис. 2.36).

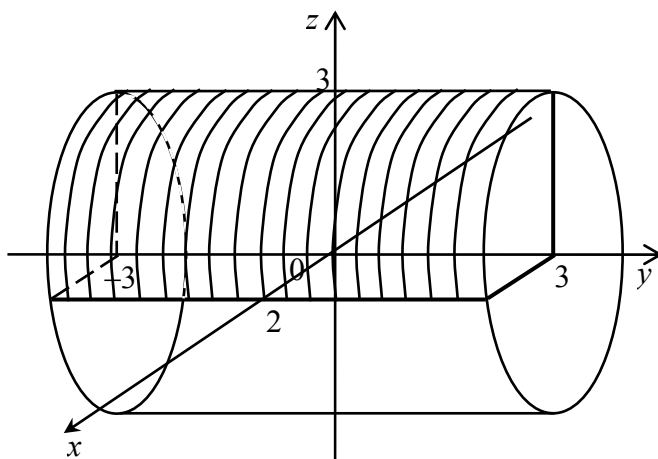


Рис. 2.36

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 1.

а) решить систему линейных уравнений по формулам Крамера и матричным способом;

б) исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее, используя метод Гаусса.

1.1.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases} \end{array}$$

1.2.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.3.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases} \end{array}$$

1.4.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.5.

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \quad \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7. \end{cases} & \text{б)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 16. \end{cases} \end{array}$$

1.6.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.7.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ -5x_1 + x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.8.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.9.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.10.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.11.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.12.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.13.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 - 4x_3 = -1, \\ x_1 + x_3 = 2. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases} \end{array}$$

1.14.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.15.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases} \end{array}$$

1.16.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.17.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.18.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.19.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.20.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.21.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.22.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases} \end{array}$$

1.23.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.24.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \end{array}$$

1.25.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

1.26.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4. \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases} \end{array}$$

1.27.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

1.28.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

1.29.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

1.30.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Задание 2.

Найти:

1) $\overline{np_{AC} AB}$;

2) площадь треугольника с вершинами в точках A, B, C .

2.1. $A(7;1;4), B(9;-2;0), C(0;3;-3)$.

2.2. $A(3;1;4), B(-3;-1;0), C(2;1;-3)$.

2.3. $A(2;1;0), B(3;-1;-4), C(0;2;-2)$.

2.4. $A(3;-1;-1), B(3;1;4), C(1;0;5)$.

2.5. $A(2;1;-1), B(7;-1;3), C(0;3;3)$.

2.6. $A(2;-3;7), B(-3;-1;5), C(9;0;1)$.

2.7. $A(7;-3;4), B(3;2;-1), C(4;1;1)$.

2.8. $A(1;1;0), B(2;1;-4), C(0;1;0)$.

2.9. $A(1;-1;4), B(2;3;-4), C(1;0;-5)$.

2.10. $A(2;-4;7), B(8;1;0), C(-1;-3;0)$.

2.11. $A(1;-1;0), B(0;1;7), C(-1;-2;-3)$.

2.12. $A(0;9;-3), B(1;3;4), C(0;2;-5)$.

2.13. $A(1;-1;3), B(2;-2;4), C(1;0;1)$.

2.14. $A(2;-2;-3), B(-1;-4;7), C(0;4;-3)$.

2.15. $A(1;0;0), B(-3;1;-1), C(1;-2;-3)$.

2.16. $A(1;3;7), B(7;3;-5), C(-1;-4;0)$.

2.17. $A(1;-1;1), B(0;1;0), C(1;4;-5)$.

2.18. $A(2;-2;3), B(1;-1;4), C(0;1;-1)$.

- 2.19.** $A(2;0;-1), B(1;-1;1), C(0;1;7).$ **2.20.** $A(1;-1;3), B(2;1;-4), C(0;1;0).$
2.21. $A(1;-2;2), B(2;0;1), C(1;4;-7).$ **2.22.** $A(1;2;-3), B(2;-1;4), C(2;3;-4).$
2.23. $A(7;9;-3), B(1;0;-1), C(0;3;0).$ **2.24.** $A(1;-2;0), B(2;4;-1), C(7;1;0).$
2.25. $A(3;-1;4), B(-4;2;3), C(0;1;-1).$ **2.26.** $A(6;-3;0), B(3;0;1), C(2;-4;3).$
2.27. $A(4;5;-1), B(6;-4;2), C(0;3;-1).$ **2.28.** $A(3;-1;2), B(3;6;-4), C(0;1;-1).$
2.29. $A(1;1;-1), B(3;4;0), C(0;5;-2).$ **2.30.** $A(1;0;2), B(3;4;7), C(5;-1;1).$

Задание 3.

Найти угол (в градусах) между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+1}{3}$ и плоскостью, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 .

- 3.1.** $M_1(1;-3;4), M_2(0;-2;-1), M_3(1;1;-1).$
3.2. $M_1(1;1;4), M_2(-2;1;1), M_3(1;3;6).$
3.3. $M_1(1;2;-1), M_2(-1;0;4), M_3(-2;-1;1).$
3.4. $M_1(1;2;3), M_2(4;-1;-2), M_3(4;0;3).$
3.5. $M_1(1;3;-1), M_2(-3;1;-9), M_3(1;0;-7).$
3.6. $M_1(1;-2;-1/2), M_2(2;1;3), M_3(0;-1;-1).$
3.7. $M_1(1;1;4), M_2(2;-1;0), M_3(3;2;1).$
3.8. $M_1(-13;3;2), M_2(-3;-2;-4), M_3(0;0;-3).$
3.9. $M_1(1;-1;-3), M_2(0;6;1), M_3(2;2;-2).$
3.10. $M_1(2;3;-10), M_2(1;-1;-9), M_3(0;-1;-4).$
3.11. $M_1(1;1;4), M_2(2;0;2), M_3(0;3;3).$
3.12. $M_1(2;1;-3), M_2(1;1;0), M_3(-1;2;7).$
3.13. $M_1(1;0;1), M_2(0;0;2), M_3(1;1;1).$
3.14. $M_1(-5;-1;1), M_2(-2;0;1), M_3(-1;1;0).$
3.15. $M_1(2;1;3), M_2(0;0;4), M_3(1;1;1).$
3.16. $M_1(2;3;1), M_2(4;-4;-2), M_3(1;0;0).$
3.17. $M_1(-1;0;1), M_2(3;-2;-1), M_3(-4;-1;2).$
3.18. $M_1(2;-2;9), M_2(-2;0;1), M_3(-4;1;3).$
3.19. $M_1(1;2;-1), M_2(2;3;-10), M_3(0;4;1).$
3.20. $M_1(1;-2;1), M_2(0;-1;2), M_3(2;-1;-1).$
3.21. $M_1(1;-2;-5), M_2(2;3;2), M_3(-1;0;5).$
3.22. $M_1(1;3;4), M_2(0;1;2), M_3(2;5;0).$

- 3.23. $M1(1;-1;0)$, $M2(-3;-4;1)$, $M3(-1;-1;2)$.
 3.24. $M1(-1;2;0)$, $M2(6;3;1)$, $M3(-15;0;2)$.
 3.25. $M1(1;2;3)$, $M2(2;4;1)$, $M3(2;0;-3)$.
 3.26. $M1(-1;1;0)$, $M2(3;-4;5)$, $M3(-2;0;2)$.
 3.27. $M1(2;-3;5)$, $M2(1;-2;12)$, $M3(4;-1;7)$.
 3.28. $M1(3;-1;2)$, $M2(4;-1;-1)$, $M3(2;0;2)$.
 3.29. $M1(1;3;1)$, $M2(4;0;7)$, $M3(-2;1;2)$.
 3.30. $M1(1;-1;1)$, $M2(5;4;-2)$, $M3(-1;-2;2)$.

Задание 4.

Упростить уравнение кривой и изобразить ее на рисунке.

- 4.1. $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$.
 4.2. $9x^2 + y^2 - 36x + 2y + 28 = 0$.
 4.3. $x^2 + 8x + 2y + 20 = 0$.
 4.4. $4x^2 + 9y^2 - 40x - 36y + 100 = 0$.
 4.5. $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 12 = 0$.
 4.6. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.
 4.7. $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$.
 4.8. $25x^2 - 9y^2 - 150x - 72y - 144 = 0$.
 4.9. $2x^2 + 8x - y + 12 = 0$.
 4.10. $9x^2 + 4y^2 - 18x = 0$.
 4.11. $x^2 - 4y^2 - 4x + 40 = 0$.
 4.12. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$.
 4.13. $9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0$.
 4.14. $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y + 89 = 0$.
 4.15. $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$.
 4.16. $x^2 + 4y^2 + 2x = 0$.
 4.17. $4x^2 - y^2 - 24x - 6y + 43 = 0$.

- 4.18. $x = 2y^2 - 12y + 14$.
- 4.19. $y^2 + 4y = 2x$.
- 4.20. $2x^2 - 5y^2 + 4x + 40y - 58 = 0$.
- 4.21. $4x^2 - 9y^2 + 4x = 0$.
- 4.22. $x^2 - 8x + y + 15 = 0$.
- 4.23. $3x^2 + 4y^2 + 30x - 24y + 99 = 0$.
- 4.24. $3x^2 - 4y^2 + 18x + 15 = 0$.
- 4.25. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.
- 4.26. $y^2 - 6x + 6y + 27 = 0$.
- 4.27. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.
- 4.28. $4x^2 + 8x - y + 7 = 0$.
- 4.29. $y^2 + 2x - 4y + 14 = 0$.
- 4.30. $x^2 - 5x - y + 7 = 0$.

Задание 5.

Даны вершины треугольника A, B, C . Найти уравнение и длину высоты, опущенной из вершины B .

- 5.1. $A(-1; 3); B(0; 2); C(4; -1)$.
- 5.2. $A(0; 2); B(2; 4); C(3; 0)$.
- 5.3. $A(1; -1); B(3; 4); C(-5; 0)$.
- 5.4. $A(1; 4); B(3; 0); C(-3; 2)$.
- 5.5. $A(1; -1); B(3; 1); C(2; 1)$.
- 5.6. $A(-1; 1); B(1; 5); C(3; -2)$.
- 5.7. $A(3; 4); B(-1; 2); C(2; -1)$.
- 5.8. $A(4; 6); B(-8; 9); C(5; -6)$.
- 5.9. $A(-2; 4); B(-6; 8); C(6; -16)$.
- 5.10. $A(-2; 1); B(2; 3); C(-1; 3)$.
- 5.11. $A(1; 3); B(3; 7); C(-1; 1)$.

- 5.12. $A(-2; 1); B(2; 3); C(-1; 3)$.
5.13. $A(2; 1); B(-2; 3); C(-3; 2)$.
5.14. $A(1; 0); B(5; 2); C(3; -1)$.
5.15. $A(0; -3); B(-2; -1); C(1; 1)$.
5.16. $A(-3; 2); B(1; -4); C(2; 5)$.
5.17. $A(0; 2); B(2; 4); C(4; 0)$.
5.18. $A(1; 5); B(3; 1); C(-1; -1)$.
5.19. $A(2; 3); B(2; 1); C(-1; -1)$.
5.20. $A(-3; 1); B(2; 4); C(3; 2)$.
5.21. $A(1; 4); B(-1; 2); C(5; 2)$.
5.22. $A(-4; 0); B(3; 2); C(-2; 3)$.
5.23. $A(-2; 3); B(5; 2); C(4; -2)$.
5.24. $A(0; 0); B(-3; 1); C(1; 4)$.
5.25. $A(-2; -1); B(4; -2); C(5; 2)$.
5.26. $A(-1; 1); B(1; -2); C(3; 2)$.
5.27. $A(-1; 4); B(1; 0); C(4; 1)$.
5.28. $A(-3; -2); B(0; 0); C(3; -3)$.
5.29. $A(-4; 2); B(4; 1); C(0; 0)$.
5.30. $A(1; 1); B(2; 2); C(5; -3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова [и др.] – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 256 с.
2. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак. – Минск : Тетра-Системс, 2009. – 417 с.
3. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / Рябушко А. П., В. В. Бархетов, В. В. Державец [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2009. – 4 ч.
4. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. / Д. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2009. – Ч. 1. – 42 с.
5. Математика : методическое пособие для студентов заочной формы обучения : в 4 ч. / Т. С. Яцкевич, А. А. Раевская, В. И. Юринок [и др.]. – Минск : БНТУ, 2012. – Ч. 1. – 210 с.

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие

для обучающихся по программе общего высшего образования
по специальности 6-05-0612-01 «Программная инженерия»

С о с т а в и т е л и:

БОЯРШИНОВА Оксана Александровна
КАЗАКЕВИЧ Виктор Александрович
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Редактор *А. С. Быховцова*

Компьютерная верстка *А. В. Степанкиной*

Подписано в печать 25.07.2025. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 5,52. Уч.-изд. л. 3,61. Тираж 100. Заказ 718.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.