

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей

6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества.

Метрология, стандартизация и контроль качества
в машиностроении и приборостроении»;

6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»;

6-05-0716-04 «Опτικο-электронная и лазерная техника»;

6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия.

Технические средства диагностики и лечения»

В 3 частях

Часть 2

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области приборостроения*

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области обеспечения качества*

Под редакцией М. А. Князева

Минск
БНТУ
2025

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я7

М34

А в т о р ы:

*Л. В. Бокуть, Е. И. Гацкевич,
И. В. Прусова, Н. А. Кондратьева*

Под редакцией *М. А. Князева*

Р е ц е н з е н т ы:

профессор кафедры информационных технологий и математики
УО «БИП-Университет права и социально-информационных технологий»,
канд. физ.-мат. наук *А. В. Остапенко*;
профессор кафедры физики УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», д-р физ.-мат. наук *В. Л. Малевич*

Математика : учебно-методическое пособие для студентов спе-
М34 циальностей 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль
качества. Метрология, стандартизация и контроль качества в маши-
ностроении и приборостроении»; 6-05-0716-03 «Информационно-
измерительные приборы и системы»; 6-05-0716-04 «Оптико-электрон-
ная и лазерная техника»; 6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия.
Технические средства диагностики и лечения» : в 3 ч. / Л. В. Бокуть,
Е. И. Гацкевич, И. В. Прусова [и др.]; под ред. М. А. Князева. –
Минск : БНТУ, 2021–2025. – Ч. 2: Функции многих переменных.
Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. – 2025. – 79 с.
ISBN 978-985-31-0078-5 (Ч. 2).

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной или
заочной формы обучения при самостоятельном изучении дисциплины «Математика».
В пособии содержатся материалы к тестированию по темам: «Дифференциальное
исчисление функции нескольких переменных», «Неопределенный интеграл», «Опре-
деленный интеграл», «Кратные и криволинейные интегралы».

Часть 1 была издана в 2021 г.

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я7

ISBN 978-985-31-0078-5 (Ч. 2)
ISBN 978-985-583-677-4

© Белорусский национальный
технический университет, 2025

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения письменного контроля знаний студентов очного и заочного отделений инженерных специальностей приборостроительного факультета БНТУ. Учебно-методическое пособие включает контрольные вопросы и большой набор типовых задач по разделам дисциплины «Математика» второго семестра обучения. Содержит следующие темы: «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Кратные и криволинейные интегралы».

Учебно-методическое пособие может быть использовано при проведении практических занятий и проверочных контрольных работ. Основная цель – повысить уровень мотивации студентов при подготовке к экзаменам и зачетам по математике. Самостоятельное решение подобранных задач позволит осуществить первичное закрепление материала и систематизировать знания обучающихся.

1. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

1.1. Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольной работы необходимо:

- 1) указывать на титульном листе номер работы, название дисциплины, номер курса и название факультета, номер зачетной книжки, фамилию, имя и отчество, обратный адрес;
- 2) решения задач приводить в порядке, указанном в задании;
- 3) перед каждым решением указывать полный номер задачи (например, 3.4.15 – третья работа, задание 4, вариант 15) и ее условие согласно заданию;
- 4) решения приводить с необходимыми краткими пояснениями, крупным и разборчивым почерком;
- 5) после каждого решения оставлять место для возможных замечаний рецензента;
- 6) незачтенные работы не оформлять заново. Исправленные решения задач следует приводить в конце работы.

Прорецензированные и зачтенные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

1.2. Контрольная работа № 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задание 1.1.

Найти область определения указанной функции. Сделать рисунок.

1. $z = \sqrt{y^2 - x^2};$

11. $z = \frac{1}{\ln(4 - y^2 - x^2)};$

2. $z = \arcsin(x^2 - y);$

12. $z = \ln(\ln\sqrt{xy} - 2);$

3. $z = \ln(9 - x^2 - y^2);$

13. $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{4x - y};$

4. $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2};$

14. $z = \ln(9x^2 - y^2);$

5. $z = \sqrt{3 - y^2 - x^2};$

15. $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2 - 9}} + \sqrt{16 - x^2 - y^2};$

6. $z = \sqrt{y + x - 2} + \sqrt{x - y - 2};$

16. $z = \ln(y - 2x) - \sqrt{25 - x^2 - y^2};$

7. $z = \ln(y^2 - 4x + 8);$

17. $z = \sqrt{y^2 - x - 1};$

8. $z = \arccos(x - y^2);$

18. $z = \cos\sqrt{x^4 - y} + \sqrt{-xy};$

9. $z = \sin\sqrt{x^3 - y} + \sqrt{xy};$

19. $z = \frac{1}{\sqrt{y + x - 9}} + \sqrt{81 - x^2 - y^2};$

10. $z = \sqrt{y + x + 2} + \sqrt{x - y + 2};$

20. $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2};$

$$21. \quad z = \ln(y^2 - 4x^2);$$

$$26. \quad z = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3y^2 - 6}};$$

$$22. \quad z = \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2 - 9}};$$

$$27. \quad z = \ln(x^2 - 5y^2);$$

$$23. \quad z = \sqrt{\frac{x}{y-x}};$$

$$28. \quad z = \ln(y^2 - 5x + 1);$$

$$24. \quad z = \frac{1}{\arccos(y+x)};$$

$$29. \quad z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2 - 1}};$$

$$25. \quad z = e^{\sqrt{y^2 + x^2 - 16}};$$

$$30. \quad z = \arcsin(4xy).$$

Задание 1.2.

Найти частные производные первого порядка.

$$1. \quad \sqrt{2y} \log_3 x + \sin(2x + 3y);$$

$$8. \quad \frac{\operatorname{tg}(2x^2 + 3y^2)}{2};$$

$$2. \quad \frac{x}{\sin y} + \sqrt{2x} \ln y;$$

$$9. \quad \frac{\sin x}{\cos y} + \sqrt{3x} e^{2y};$$

$$3. \quad \frac{\log_2(3x)}{2y};$$

$$10. \quad \frac{\sin x}{\cos 2y} + \sqrt{x} e^{2y};$$

$$4. \quad 3 \operatorname{arctg}(x^2 \cdot y^2);$$

$$11. \quad \sqrt{3y} 3^x + \sin(5x - 2y);$$

$$5. \quad \sqrt{3y} \ln x + \sin(2x + 3y);$$

$$12. \quad \frac{\operatorname{ctg}(3x^2 + 2y^2)}{2};$$

$$6. \quad \arcsin(2x^2 \cdot y^2);$$

$$13. \quad \sqrt{3y} 2^{3x} + \cos(3x - 4y);$$

$$7. \quad \sin(2x^2 + 3y^2);$$

$$14. \quad y^2 \arccos(xy);$$

$$15. \frac{\arctg(3x \cdot y^2)}{3};$$

$$16. \log_2(3x + 2y^2);$$

$$17. \frac{\tg(2x^3 + y^3)}{3};$$

$$18. 4\arctg(x^2 \cdot y);$$

$$19. \frac{\arctg(x \cdot y)}{3};$$

$$20. \frac{y}{\cos x} + \sqrt{2y} \ln x;$$

$$21. \frac{y}{\sin x} + \sqrt{5y} \ln x;$$

$$22. \frac{\log_3(5y)}{3x};$$

$$23. \frac{\ln(5xy)}{3x};$$

$$24. x^2 \arcsin(xy);$$

$$25. y^2 \arcsin(xy);$$

$$26. x^2 \arccos(xy);$$

$$27. \sqrt{2y} \cdot 2^{3x} + \ln(3x - 4y);$$

$$28. \sqrt{2x} 2^{3y} + \ln(3x + 2y);$$

$$29. \log_7(3x^2 + 2y^3);$$

$$30. \frac{\log_7(3x)}{5y}.$$

Задание 1.3.

Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции

$$z = f(x, y).$$

$$1. \frac{x}{\sin y};$$

$$2. 3 \arctg(xy);$$

$$3. x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5;$$

$$4. \sqrt{3x} e^{2y};$$

$$5. \frac{\ln(5y)}{3x};$$

$$6. \frac{\sin y}{\cos 2x};$$

7. $\sqrt{2x} \ln y;$

19. $\operatorname{arctg}(xy);$

8. $2e^{-xy};$

20. $y \ln(xy);$

9. $\sin(2x + 3y);$

21. $\frac{y}{\cos x};$

10. $\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{3};$

22. $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right);$

11. $\ln(3x + 2y);$

23. $\frac{\ln(xy)}{3x};$

12. $\frac{\operatorname{arctg}(3xy)}{3};$

24. $x^2 \arcsin(xy);$

13. $\frac{2x}{\cos y};$

25. $\arcsin(xy);$

14. $\sqrt{5y} \ln x;$

26. $x^5 - 4x^2 y^2 - 3xy^5 + 2y^4;$

15. $\sin(2x^2 + 3y^2);$

27. $\arccos(xy);$

16. $x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3 + 3y^5;$

28. $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right);$

17. $4\operatorname{arctg}(xy);$

29. $\ln(3x + 2y);$

18. $\frac{\sin x}{\cos y};$

30. $\arccos\left(\frac{x}{y}\right).$

Задание 1.4.

а) Найти полный дифференциал функции. б) Найти градиент функции в точке $M_0(x_0; y_0)$. в) Найти производную функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $z = \sin^2(2x + y), M_0\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \vec{a} = \{1; -3\};$

2. $z = \cos^2(3x + 5y), M_0(\pi; 0), \vec{a} = \{4; 3\};$

3. $z = \operatorname{tg}(x + 7y), M_0(\pi; 0), \vec{a} = \{-4; 1\};$

4. $z = e^{xy}, M_0(0; 2), \vec{a} = \{2; 3\};$

5. $z = x \sin^2 y, M_0\left(3; \frac{\pi}{2}\right), \vec{a} = \{-1; -3\};$

6. $z = y \cos^2 x, M_0\left(\frac{\pi}{3}; 1\right), \vec{a} = \{3; -2\};$

7. $z = \sin^2(x - y), M_0\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right), \vec{a} = \{2; -1\};$

8. $z = \ln(x^2 - y^2), M_0(e; 0), \vec{a} = \{-4; 3\};$

9. $z = \ln(xy), M_0(e; 1), \vec{a} = \{-4; 1\};$

10. $z = \operatorname{arctg}(xy), M_0(2; 0), \vec{a} = \{3; 4\};$

11. $z = (x - y)e^{xy}, M_0(2; 0), \vec{a} = \{-1; 2\};$

12. $z = y \ln \frac{x}{y}, M_0(1; 1), \vec{a} = \{3; -4\};$
13. $z = \operatorname{arctg}(x + 2y), M_0(1; 2), \vec{a} = \{1; 3\};$
14. $z = \arcsin(xy), M_0\left(\frac{1}{2}; 1\right), \vec{a} = \{-1; 3\};$
15. $z = \sin(xy), M_0(\pi; 1), \vec{a} = \{1; 3\};$
16. $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), M_0(2; 0), \vec{a} = \{-4; 2\};$
17. $z = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + y^2)^3}, M_0(1; -1), \vec{a} = \{2; -3\};$
18. $z = \sqrt{x^2 + 2y}, M_0(0; 2), \vec{a} = \{4; -3\};$
19. $z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, M_0(1; 2), \vec{a} = \{3; -4\};$
20. $z = x \ln \frac{y}{x}, M_0(4; 1), \vec{a} = \{-1; 2\};$
21. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, M_0(2; -1), \vec{a} = \{3; 5\};$
22. $z = (x + y)e^{xy}, M_0(-3; 0), \vec{a} = \{2; 1\};$
23. $z = \operatorname{arctg}(3x - y), M_0(1; 2), \vec{a} = \{-5; 1\};$
24. $z = e^y \sin x, M_0\left(\frac{\pi}{2}; 1\right), \vec{a} = \{1; -2\};$

25. $z = e^y \sin y, M_0 \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \vec{a} = \{3; 5\};$
26. $z = 3^{xy} \sin y, M_0 (0; 0), \vec{a} = \{3; -4\};$
27. $z = x \sin(2x + y), M_0 (\pi; 0), \vec{a} = \{1; -5\};$
28. $z = \frac{e^x}{\sqrt{xy}}, M_0 (1; 1), \vec{a} = \{-1; -2\};$
29. $z = \sqrt{e^x + \sin y}, M_0 \left(0; \frac{\pi}{6} \right), \vec{a} = \{3; 4\};$
30. $z = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{x}, M_0 (1; 1), \vec{a} = \{2; -1\}.$

Задание 1.5.

Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M_0 .

№	Поверхность S	$M_0 (x_0, y_0, z_0)$
1.	$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 10$	$(1, 2, -1)$
2.	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 5z - 15 = 0$	$(-1, 2, -1)$
3.	$x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$	$(1, 2, -1)$
4.	$2x^2 + y^2 - 2z - 2y + z = -1$	$(1, 1, -1)$
5.	$x^3 + 4x^3z + z^2 - 2x^2y + 4 = 0$	$(-1, 0, 1)$

6.	$xz + xy - yz + xyz + 8 = 0$	$(3, 2, -2)$
7.	$\ln(z + 3) = xz - yx^2 + 3z$	$(2, 1, -2)$
8.	$x^3y + 3xyz - z^3 = 27$	$(3, 1, 3)$
9.	$2x^2 - y^2 + z^2 + y - 4z - 13 = 0$	$(2, 1, -1)$
10.	$6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 = -3$	$(1, 2, 3)$
11.	$(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$	$(1, 1, 2)$
12.	$3x^2 - 3yz + 12xz - 4xy + z^2 + 15 = 0$	$(-1, -1, 2)$
13.	$z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3y^2 - 15}$	$(2, -3, 2)$
14.	$x^2 - y^2 - xz^2 + xy^2 + z^3 - 1 = 0$	$(1, 2, -1)$
15.	$x^2 + yz + z^2 + 2xy - 10y - 5 = 0$	$(1, 3, 4)$
16.	$x^2 + y^2 - z^2 + 2y^2 - 3x - 7 = 0$	$(3, 2, -1)$
17.	$x^2yz + \ln(y + z^2) = 0$	$(2, 1, 0)$
18.	$2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz - 3 = 0$	$(1, 2, 1)$
19.	$x^2 + y^2 - z^2 + 4y + xz - 4 = 0$	$(1, 1, 2)$
20.	$x^2 + y^2 - 3z^2 + xy + 2z = 0$	$(1, 0, 1)$

21.	$xy^2z^3 + 3x + 2y + z = 0$	$(3, 2, -1)$
22.	$x^2y + xz^2 + yz^2 - x = 6$	$(1, 2, 1)$
23.	$x^2 + y^2 - x - y + zx = 0$	$(1, 3, -6)$
24.	$-6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 23$	$(3, 0, -4)$
25.	$\frac{1}{3}x^3 + 5y^2 + 2z^2 - xy + xz = \frac{29}{3}$	$(2, -1, 1)$
26.	$x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$	$(2, 1, 3)$
27.	$z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15$	$(-1, 3, 4)$
28.	$2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$	$(1, -1, 1)$
29.	$z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$	$(3, 4, 7)$

1.3. Контрольная работа № 2

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задание 2.1.

Найти неопределенный интеграл с помощью подведения под знак дифференциала:

$$1. \int x^2 \operatorname{tg}^2(x^3 - 3) dx;$$

$$10. \int \frac{\cos x}{3 + 4 \cos^2 x} dx;$$

$$2. \int x^4 \sqrt{2 - 3x^2} dx;$$

$$11. \int \frac{x^4 dx}{(x^5 + 1)^4};$$

$$3. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}};$$

$$12. \int \frac{dx}{(2 - 3 \ln^2 x)};$$

$$4. \int \frac{2x - 1}{\sqrt{9x^2 - 4}} dx;$$

$$13. \int \frac{e^x dx}{(5 - e^x)^2};$$

$$5. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$$

$$14. \int 2^{7-4x} dx;$$

$$6. \int \frac{\sin x \cos x dx}{(\cos^2 x + 5)^4};$$

$$15. \int \frac{3x + x^3}{\sqrt{1 + x^4}} dx;$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)};$$

$$16. \int \sqrt[4]{7x - 2} dx;$$

$$8. \int e^{\cos x} \sin x dx;$$

$$17. \int x^2 \sqrt[5]{x^3 - 8} dx;$$

$$9. \int \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx;$$

$$18. \int e^{(2x^3 - 4)} x^2 dx;$$

$$19. \int \sqrt{3 + \cos(5x)} \sin(5x) dx;$$

$$25. \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx;$$

$$20. \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 1};$$

$$26. \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$21. \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx;$$

$$27. \int \frac{x}{x^2 + 16} dx;$$

$$22. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$28. \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^6}} dx;$$

$$23. \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} dx;$$

$$29. \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx;$$

$$24. \int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}};$$

$$30. \int \frac{3x dx}{\sqrt{4 + 9x^2}}.$$

Задание 2.2.

Найти неопределенный интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$1. \int x \sin 3x dx;$$

$$7. \int (3x + 8)e^x dx;$$

$$2. \int \ln^2 x dx;$$

$$8. \int \frac{x}{\sin^2 3x} dx;$$

$$3. \int x^5 e^{-x^3} dx;$$

$$9. \int \ln(1 + x^2) dx;$$

$$4. \int x^2 \cos x dx;$$

$$10. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}} dx;$$

$$5. \int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx;$$

$$11. \int 4^x \sin x dx;$$

$$6. \int e^x \sin(-2x) dx;$$

$$12. \int 3^{4x} \sin(2x) dx;$$

13. $\int \cos(\ln(1-4x)) dx;$

22. $\int x^2 \ln x dx;$

14. $\int x^2 \arctg 2x dx;$

23. $\int (x^2 - 7x) 3^{-x} dx;$

15. $\int \cos(4 \ln x) dx;$

24. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx;$

16. $\int x \ctg^2 x dx;$

25. $\int x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx;$

17. $\int x^2 \arctg x dx;$

26. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx;$

18. $\int (3x-1) 3^x dx;$

27. $\int (4x-2) e^{4x} dx;$

19. $\int (x^3 + 7x - 2) \ln x dx;$

28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx;$

20. $\int (3+x) e^x dx;$

29. $\int x^2 \ln 2x dx;$

21. $\int (x+8) \tg^2 4x dx;$

30. $\int \arcsin^2 5x dx.$

Задание 2.3.

Найти неопределенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции на простейшие дроби:

1. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x)^2};$

4. $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx;$

2. $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2 (x-2)} dx;$

5. $\int \frac{x^2 + x - 8}{(x^2 + 3x + 4)(x-1)} dx;$

3. $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^2 - 4x^2 + 3x)} dx;$

6. $\int \frac{5x}{x(x^2 + 6x + 8)} dx;$

$$7. \int \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 2x - 8)} dx;$$

$$8. \int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx;$$

$$9. \int \frac{(2x + 1) dx}{x^3 - 25x^2};$$

$$10. \frac{7}{(x^2 - 25)x};$$

$$11. \int \frac{x^3 - x + 5}{(x - 7)^2 (x + 8)} dx;$$

$$12. \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x - 3)^2 (x + 1)^2} dx;$$

$$13. \int \frac{dx}{x^3 - 8};$$

$$14. \int \frac{dx}{x(x + 1)^2};$$

$$15. \int \frac{x^2}{x(x^2 + x - 2)} dx;$$

$$16. \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2x + 1)(x - 1)} dx;$$

$$17. \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx;$$

$$18. \int \frac{dx}{1 + x^4};$$

$$19. \int \frac{2x^2 - x + 2}{(x^2 + x + 1)(x + 2)} dx;$$

$$20. \int \frac{x^2 + 5}{x(x^2 + 5x + 4)} dx;$$

$$21. \int \frac{x^2 - 6x - 18}{(x - 2)(x^2 + 2x + 5)} dx;$$

$$22. \int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x + 4)^2 (x + 1)} dx;$$

$$23. \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

$$24. \int \frac{2x + 1}{x(x^2 + x - 2)} dx;$$

$$25. \int \frac{x^2 - 5x + 9}{x(x^2 - 5x + 6)} dx;$$

$$26. \int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x - 6)^2 (x + 1)} dx;$$

$$27. \int \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2(x+2)} dx;$$

$$29. \int \frac{5x^3 + 7}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx;$$

$$28. \int \frac{dx}{(1+x^2)^2};$$

$$30. \int \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}.$$

Задание 2.4.

Найти неопределенный интеграл от функции, содержащий квадратный трехчлен:

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}};$$

$$9. \int \sqrt{-x^2 + 2x + 4} dx;$$

$$2. (2x - 3)\sqrt{x^2 + 6x + 10} dx;$$

$$10. \int \frac{(x-4)dx}{x^2 + x - 12};$$

$$3. \int \frac{2x+3}{x^2 + x + 1} dx;$$

$$11. \int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx;$$

$$4. \int \frac{1}{2x^2 - x + 2} dx;$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13};$$

$$5. \int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7};$$

$$13. \int \frac{x-3}{4x^2 - 4x - 3} dx;$$

$$6. \int \frac{4-x}{x^2 + 5x + 6} dx;$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}};$$

$$7. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x}};$$

$$15. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2}};$$

$$8. \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}};$$

$$16. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 8x + 1}};$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}};$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}};$$

$$19. \int \frac{3x - 2}{\sqrt{-x^2 + 10x - 24}} dx;$$

$$20. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} dx;$$

$$21. \int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}} dx;$$

$$22. \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx;$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 25}};$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}};$$

$$26. \int \frac{5x + 2}{\sqrt{2x^2 + 12x - 11}} dx;$$

$$27. \int \frac{2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} dx;$$

$$28. \int \frac{4}{\sqrt{2x^2 - x - 2}} dx;$$

$$29. \int \frac{2x + 5}{x^2 - 4x + 8} dx;$$

$$30. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

Задание 2.5.

Найти неопределенный интеграл с помощью подстановки:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}};$$

$$2. \int \sqrt{\frac{3-x}{3+x}} dx;$$

$$3. \int \frac{4 - \sqrt{x+1}}{4 + \sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$4. \int \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} dx;$$

$$5. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx;$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}};$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}};$$

$$8. \int \frac{x}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx;$$

$$9. \int \sqrt{\frac{x}{x+5}} dx;$$

$$10. \int \frac{x-5}{\sqrt{x}-7} dx;$$

$$11. \int \frac{1-3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx;$$

$$12. \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(x-\sqrt[3]{x})} dx;$$

$$13. \int \frac{\sqrt{x+5}}{x} dx;$$

$$14. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{6x+1}} dx;$$

$$15. \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx;$$

$$16. \int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx;$$

$$17. \int \frac{4-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} dx;$$

$$18. \int \frac{x-3}{\sqrt{x}+11} dx;$$

$$19. \int x\sqrt{x+7} dx;$$

$$20. \int \sqrt{\frac{x+2}{x}} dx;$$

$$21. \int \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+8} dx;$$

$$22. \int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}} dx;$$

$$23. \int \frac{\sqrt{x+7}}{x} dx;$$

$$24. \int \sqrt{\frac{3}{x}+5} dx;$$

$$25. \int \frac{2x+7}{\sqrt[3]{x+3}} dx;$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x}-\sqrt[4]{1-3x}}} dx;$$

$$27. \int \frac{\sqrt[4]{x+2} dx}{\sqrt[4]{(x+2)^3(\sqrt{x+2}+5)}};$$

$$28. \int \frac{x}{3\sqrt{x}+8} dx;$$

$$29. \int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} dx;$$

$$30. \int \frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} dx.$$

Задание 2.6.

Найти неопределенный интеграл с помощью подстановки:

1. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x};$

12. $\int \frac{dx}{2 - \sin 3x + 2 \cos x};$

2. $\int \frac{dx}{2 \sin x - 9 \cos x};$

13. $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 4 \cos x};$

3. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x};$

14. $\int \frac{dx}{4 + 5 \sin x};$

4. $\int \frac{dx}{11 - 7 \sin x};$

15. $\int \frac{dx}{8 + 2 \sin x + \cos x};$

5. $\int \frac{dx}{9 - 5 \sin x + 7 \cos x};$

16. $\int \frac{\cos^3 x}{3 + \sin x} dx;$

6. $\int \frac{dx}{(2 - 3 \sin x)(3 - 3 \sin x)};$

17. $\int \frac{dx}{5 - 3 \sin x - 4 \cos x};$

7. $\int \frac{dx}{2 + 4 \sin 3x + 7 \cos x};$

18. $\int \frac{dx}{3 - \sin 3x + 6 \cos x};$

8. $\int \frac{dx}{2 - \cos x};$

19. $\int \frac{dx}{9 + \cos 2x};$

9. $\int \frac{dx}{7 - 3 \sin x - 2 \cos x};$

20. $\int \frac{dx}{2 - \sqrt{3} \sin x + \cos x};$

10. $\int \frac{1}{8 + 7 \sin^2 x} dx;$

21. $\int \frac{dx}{7 \sin^2 x + 6};$

11. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx;$

22. $\int \frac{dx}{2 + \sin x + 3 \cos x};$

$$23. \int \frac{\sin x}{3 + \sin x} dx;$$

$$27. \int \frac{dx}{5 \sin x + 7};$$

$$24. \int \frac{dx}{\cos x};$$

$$28. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x - 5};$$

$$25. \int \frac{dx}{19 \sin x - 3 \cos x};$$

$$29. \int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 17};$$

$$26. \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx;$$

$$30. \int \frac{\sin x + 3}{\cos x + \sin x} dx.$$

1.4. Контрольная работа № 3

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задание 3.1.

С помощью интегрирования по частям вычислить определенный интеграл в промежутке от x_1 до x_2 от функции вида:

1. $\frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x^2 - 3x - 18)}$, при $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \pi$.

2. $\frac{3}{(x + 1)(x^2 - 5x + 6)}$, при $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

3. $\frac{4x - 7}{x(x^2 - 9)}$, при $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

4. $\frac{5x}{x(x^2 + 6x + 8)}$, при $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

5. $\frac{x^2 + 2}{x(x^2 - 1)}$, при $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

6. $\frac{x - 3}{x(x^2 - 2x + 1)}$, при $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

7. $\frac{6}{(x^2 - 16)x}$, при $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \pi$.

8. $\frac{x - 1}{x(x^2 - x - 30)}$, при $x_1 = 1$; $x_2 = e$.

9. $\frac{x^2 - 2}{(x^2 - 16)x}$, при $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

10. $\frac{7}{x(x^2 - 4x + 3)}$, при $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

11. $\frac{3-x}{x(x^2+2x-8)}$, при $x_1=0$; $x_2=1$.
12. $\frac{3+x}{x(x^2-3x+2)}$, при $x_1=3$; $x_2=4$.
13. $\frac{7-x}{x(x^2-2x-8)}$, при $x_1=0$; $x_2=\ln 2$.
14. $\frac{x^2+6}{x(x^2-9)}$, при $x_1=0$; $x_2=\pi$.
15. $\frac{2x+1}{x^3-25x^2}$, при $x_1=1$; $x_2=\ln 2$.
16. $\frac{x^3-1}{x^3+1}$, при $x_1=\pi$; $x_2=2\pi$.
17. $\frac{6x+1}{x(x^2+x-2)}$, при $x_1=0$; $x_2=\frac{\pi}{2}$.
18. $\frac{2x-3}{x(x+1)(x-2)}$, при $x_1=3$; $x_2=4$.
19. $\frac{x^2+3}{x(x^2+5x+4)}$, при $x_1=1$; $x_2=\ln 2$.
20. $\frac{x+4}{x(x^2-5x-6)}$, при $x_1=1$; $x_2=3$.
21. $\frac{x^2+x-1}{x(x^2+2x-8)}$, при $x_1=0$; $x_2=\frac{\pi}{3}$.
22. $\frac{2x+1}{x(x^2+x-30)}$, при $x_1=\frac{\pi}{2}$; $x_2=\pi$.
23. $\frac{x+3}{(x^2-16)x}$, при $x_1=0$; $x_2=\ln 3$.

$$24. \frac{x^2}{x(x^2 + x - 2)}, \text{ при } x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \pi.$$

$$25. \frac{2}{x(x^2 - 3x + 2)}, \text{ при } x_1 = 0; x_2 = \pi.$$

$$26. \frac{x^3}{x^2 - 1}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = e.$$

$$27. \frac{4}{x^3 - x}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = \ln 2.$$

$$28. \frac{2x - 1}{(x^2 - 9)x}, \text{ при } x_1 = \frac{\pi}{3}; x_2 = \pi.$$

$$29. \frac{x + 4}{x(x^2 - 4x + 3)}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = \ln 2.$$

$$30. \frac{x + 2}{x(x^2 - 2x - 8)}, \text{ при } x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \ln \pi.$$

Задание 3.2.

Вычислить с помощью подстановки определенный интеграл от функции:

$$1. \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \text{ при } x_1 = 3; x_2 = 4.$$

$$6. \frac{x}{2\sqrt{x+7}}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 4.$$

$$2. \frac{x}{\sqrt[3]{x+3}}, \text{ при } x_1 = 5; x_2 = 7.$$

$$7. \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}, \text{ при } x_1 = 0; x_2 = 1.$$

$$3. \frac{1-2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 4.$$

$$8. x\sqrt[3]{x+5}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 3.$$

$$4. \frac{x+7}{\sqrt{x+5}}, \text{ при } x_1 = 4; x_2 = 9.$$

$$9. \sqrt{\frac{2}{x}} - 7, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 2.$$

$$5. \frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 9.$$

$$10. \frac{2x+4}{\sqrt[3]{x+5}}, \text{ при } x_1 = 1; x_2 = 3.$$

11. $\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x+2}}$, при $x_1 = 4; x_2 = 16$.
12. $(x+2)\sqrt[3]{x+1}$, при $x_1 = 0; x_2 = 7$.
13. $\sqrt{\frac{4}{x}+3}$, при $x_1 = 4; x_2 = 6$.
14. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$, при $x_1 = 1; x_2 = 9$.
15. $\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}$, при $x_1 = 1; x_2 = 3$.
16. $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, при $x_1 = 0; x_2 = 1$.
17. $\frac{x}{\sqrt{x+6}}$, при $x_1 = 3; x_2 = 10$.
18. $\frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x-4}}$, при $x_1 = 1; x_2 = 4$.
19. $\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$, при $x_1 = 0; x_2 = 1$.
20. $(x+7)\sqrt[3]{x+2}$, при $x_1 = 6; x_2 = 8$.
21. $\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$, при $x_1 = 4; x_2 = 9$.
22. $\frac{x-3}{\sqrt{x-7}}$, при $x_1 = 1; x_2 = 9$.
23. $\frac{3x+2}{x-\sqrt{x}}$, при $x_1 = 4; x_2 = 16$.
24. $\sqrt{\frac{2}{x}+1}$, при $x_1 = 1; x_2 = 2$.
25. $\sqrt{\frac{x+1}{x}}$, при $x_1 = 8; x_2 = 9$.
26. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, при $x_1 = 1; x_2 = 3$.
27. $\sqrt{\frac{2+x}{x}}$, при $x_1 = 2; x_2 = 7$.
28. $x\sqrt{x+1}$, при $x_1 = 3; x_2 = 8$.
29. $\frac{\sqrt{x+3}}{x}$, при $x_1 = 6; x_2 = 9$.
30. $\sqrt{\frac{x}{x+4}}$, при $x_1 = 2; x_2 = 5$.

Задание 3.3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = 2 + x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
2. $y = \cos x$, $y = -x$, $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$;
3. $y = x^2 + x$, $y = x + 3$;

$$4. \ 2x - y + 5 = 0, \ x + y - 4 = 0, \ y = 0;$$

$$5. \ x = -3y^2, \ x = 1 - 4y^2;$$

$$6. \ y = -x^2 + 3, \ y = 2x + 1;$$

$$7. \ y = 5x^2, \ y = 1 + x^2, \ x = 4;$$

$$8. \ y = \arcsin x, \ x = 0, \ y = \frac{\pi}{2};$$

$$9. \ y = x^2 + 2x, \ y = x + 3;$$

$$10. \ y^3 = x, \ y = 2x;$$

$$11. \ r = 2 \sin 2\varphi; \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \ \varphi_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$12. \ r = 3 \cos \varphi;$$

$$13. \ r = 4 \sin 3\varphi;$$

$$14. \ r^2 = 2 \cos 2\varphi;$$

$$15. \ r = 3 + \cos \varphi;$$

$$16. \ r = 3 \sin 3\varphi, \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \ \varphi_2 = \frac{3\pi}{2};$$

$$17. \ r = 2 \sin 3\varphi;$$

$$18. \ r = 4 + \cos 2\varphi;$$

$$19. \ r = 8 \cos \varphi;$$

$$20. \ r^2 = 8 \cos 2\varphi;$$

$$21. \ x = 2 \sin t, \ y = 4 \sin 2t, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

22. $x = 2t^2, y = 2t - t^2, 0 \leq t \leq 8;$
23. $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \text{ ось } OX, 0 \leq t \leq 2\pi;$
24. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t;$
25. $x = 5\cos^2 t, y = 2t - t^3;$
26. $x = 4t^2, y = t - 2t^2, 0 \leq t \leq 16;$
27. $x = 2\cos^2 t, y = t - 2t^3;$
28. $x = 4\sin t, y = 2\sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$
29. $x = 5t^2, y = 5t - t^2, 0 \leq t \leq 20;$
30. $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t.$

Задание 3.4.

Вычислить длину дуги кривой:

1. Окружности $x^2 + y^2 = R^2$, радиуса 4.
2. $y = \ln \sin x$, заключенной между прямыми $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}.$
3. $9y^2 = 4(3 - x)^3$ между точками пересечения с осью OX .
4. Полукубической параболы $y = \frac{2}{3}x^{3/2}, 0 \leq x \leq 2.$
5. Астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}.$
6. $y = \ln \cos x$, заключенной между прямыми $x = 0, x = \frac{\pi}{3}.$
7. Астроиды $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t.$

$$8. x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$9. \text{ Арки циклоиды } x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$10. x = 3 \cos t, y = 4 \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$11. x = t^2, y = \frac{t^3}{3}, 0 \leq t \leq 4.$$

$$12. x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$13. \text{ Кардиоиды } r = 2(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$14. r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq 3\pi.$$

$$15. r = 4(1 - \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$16. r = \cos^3 \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \pi.$$

$$17. r = 2 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 4\pi.$$

$$18. \text{ Кардиоиды } r = 4(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}.$$

$$19. y = \ln x, \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$20. 2y = x^2 - 2, \text{ между точками пересечения с осью } OX.$$

$$21. y = \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq x \leq 3.$$

$$22. y = \ln \sin 2x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}.$$

$$23. x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$24. x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$25. x = t^2 - 6, y = \frac{2}{3}t^3, 0 \leq t \leq 2.$$

$$26. x = 2(\cos t + t \sin t), y = 2(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$27. r = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq 4\pi.$$

$$28. r = 2 \cos^3 \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$29. r = 4 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$30. r = 1 - \cos \varphi, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 3\pi.$$

Задание 3.5.

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

$$1. y = x^2, y = 0, x = 2, \text{ вокруг оси } OX.$$

$$2. y = \sin x, x \in [0; \pi]2, \text{ вокруг оси } OX.$$

$$3. y = -x^2 + 5, y = 1, \text{ вокруг оси } OX.$$

$$4. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ вокруг оси } OY.$$

$$5. 2y = x^2, 2x + 3y - 3 = 0, \text{ вокруг оси } OX.$$

$$6. y = 4 - x^2, y = 0, \text{ вокруг прямой } x = 3.$$

$$7. y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1, \text{ вокруг оси } OX.$$

8. $y = \ln x$, $x = 4$, $y = 0$, вокруг оси OX .
9. $x = \cos t$, $y = 3 \sin t$, вокруг оси OX .
10. $x = 2t - 2 \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0; \pi]$, вокруг оси OX .
11. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = 0$, $y = 3$, вокруг оси OY .
12. $y = \sin x$ (одной волной), $y = 0$, вокруг оси OX .
13. $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$, вокруг оси OY .
14. $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$, вокруг оси OX .
15. $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$, вокруг оси OY .
16. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (одной аркой циклоиды) и осью OX , вокруг оси OX .
17. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{5}$, $x = 0$, $y = 0$, вокруг оси OY .
18. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, вокруг оси OY .
19. $y = \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$, вокруг оси OX .
20. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$, вокруг оси OX .
21. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$, вокруг оси OX .
22. $x = 2 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$, вокруг оси OX .
23. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, вокруг оси OY .
24. $y^2 = 4x$, $x = 1$, вокруг оси OY .

25. $y^2 = 4x$, $y = -2$, $y = 2$, $x = 0$, вокруг оси OY .

26. $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$, вокруг оси OY .

27. $y^2 = 8x$, $x = 1$, вокруг оси OX .

28. $y = \frac{1}{2x}$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$, вокруг оси OY .

29. $y^2 = 9x$, $x = 2$, вокруг оси OY .

30. $y^2 = 6x$, $x = 2$, вокруг оси OX .

Задание 3.6.

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2};$

2. $\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx;$

3. $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx;$

4. $\int_0^{\infty} \frac{e^{\arctg 3x}}{1+9x^2} dx;$

5. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$

6. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2};$

7. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$

8. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx;$

9. $\int_0^2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$

10. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

11. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}};$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$

13. $\int_{-\infty}^1 e^{2x} dx;$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x};$

15. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x};$

16. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$

17. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x};$

18. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^4}};$

19. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x};$
20. $\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx;$
21. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$
22. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx;$
23. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}};$
24. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$
25. $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2 - 1};$
26. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$
27. $\int_0^1 \ln x dx;$
28. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$
29. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx;$
30. $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}.$

1.5. Контрольная работа № 4

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Задание 4.1.

Вычислить двукратный интеграл:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_0^5 dx \int_{x-1}^{x+5} (3x - 2y + 2) dy;$ | 11. $\int_0^2 dy \int_{y-1}^{y+3} (4x - 3y - 7) dx;$ |
| 2. $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{y+3} (3x - 2y - 5) dx;$ | 12. $\int_0^5 dx \int_{x-1}^{x+1} (2x - y - 4) dy;$ |
| 3. $\int_0^1 dx \int_{x-3}^x (4x + 3y + 2) dy;$ | 13. $\int_0^2 dx \int_x^{x+1} (5x + 2y - 7) dy;$ |
| 4. $\int_0^2 dx \int_{x-1}^x (x - 2y + 5) dy;$ | 14. $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{y+2} (4x - 2y + 1) dx;$ |
| 5. $\int_0^3 dy \int_{y-2}^{y+1} (x - 2y - 3) dx;$ | 15. $\int_0^3 dy \int_{y-2}^{y+3} (3x - 4y + 1) dx;$ |
| 6. $\int_0^4 dy \int_y^{y+1} (2x + y - 1) dx;$ | 16. $\int_0^1 dx \int_x^{x+3} (2x + y - 4) dy;$ |
| 7. $\int_0^2 dx \int_x^{x+3} (3x - 2y + 5) dy;$ | 17. $\int_0^4 dx \int_{x-3}^x (x + 5y - 1) dy;$ |
| 8. $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{y+1} (x - 2y - 1) dx;$ | 18. $\int_0^6 dy \int_{y-1}^y (5x - y - 3) dx;$ |
| 9. $\int_0^2 dy \int_{y-1}^{y+3} (4x - 3y - 4) dx;$ | 19. $\int_0^3 dy \int_y^{y+1} (5x - 6y - 7) dx;$ |
| 10. $\int_0^2 dx \int_{x-1}^{x+2} (3x - 2y + 1) dy;$ | 20. $\int_0^1 dy \int_{y-2}^y (6x + 5y + 3) dx;$ |

21. $\int_0^4 dx \int_x^{x+1} (5x - y + 2) dy;$
22. $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{y+1} (3x - 2y - 1) dx;$
23. $\int_0^2 dy \int_y^{y+2} (5x - y - 1) dx;$
24. $\int_0^3 dx \int_{x-1}^{x+1} (5x - y - 3) dy;$
25. $\int_0^4 dx \int_{x-1}^x (4x + y - 1) dy;$
26. $\int_0^4 dy \int_{y-3}^{y+1} (2x + 3y - 7) dx;$
27. $\int_0^1 dx \int_{x-2}^x (3x + 5y - 1) dy;$
28. $\int_0^3 dx \int_x^{x+2} (3x + y - 6) dy;$
29. $\int_0^5 dy \int_y^{y+2} (2x - 3y - 2) dx;$
30. $\int_0^4 dy \int_y^{y+3} (x - 5y + 4) dx.$

Задание 4.2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1. $y_1 = x^2 - 4x, \quad y_2 = 2x;$
2. $y_1 = x^2 - 4x, \quad y_2 = 4x - x^2;$
3. $y_1 = \frac{5}{9}x^2, \quad y_2 = 5\sqrt{\frac{x}{3}};$
4. $y_1 = 5x^2, \quad y_2 = 5\sqrt{x};$
5. $y_1 = 3x^2, \quad y_2 = 3\sqrt{x};$
6. $y_1 = 2x, \quad y_2 = -x^2 + 4x;$
7. $y_1 = x, \quad y_2 = 2\sqrt{x};$
8. $y_1 = -2\sqrt{x}, \quad y_2 = -2x;$

9. $y_1 = 2x - 2, \quad y_2 = -2x^2 + 2;$
10. $y_1 = 2x^2, \quad y_2 = 2x + 4;$
11. $y_1 = 2x^2, \quad y_2 = -2x^2 + 4;$
12. $y_1 = 3x, \quad y_2 = -x^2 + 4x + 2;$
13. $y_1 = 3x, \quad y_2 = -5x^2 + 5x + 5;$
14. $y_1 = -4\sqrt{x}, \quad y_2 = -4x;$
15. $y_1 = 3x - 3, \quad y_2 = -3x^2 + 3;$
16. $y_1 = 2x^2, \quad y_2 = -2x^2 + 16;$
17. $y_1 = 2x^2, \quad y_2 = -2x + 4;$
18. $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y_2 = \sqrt{x};$
19. $y_1 = 2x^2 - 4x, \quad y_2 = 4x - 2x^2;$
20. $y_1 = 3x, \quad y_2 = 3\sqrt{x};$
21. $y_1 = 4 - x, \quad y_2 = 2\sqrt{4 - x};$
22. $y_1 = x^2, \quad y_2 = -2x;$
23. $y_1 = x^2, \quad y_2 = 2 - x;$
24. $y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_2 = \sqrt{2x};$
25. $y_1 = x^2 - 4x, \quad y_2 = 4x - x^2;$
26. $y_1 = 2 - \frac{x}{2}, \quad y_2 = \sqrt{4 - x};$

27. $y_1 = x^2, \quad y_2 = -4x;$
28. $y_1 = x^2, \quad y_2 = x + 2;$
29. $y_1 = x, \quad y_2 = \sqrt{3x};$
30. $y_1 = x^2 - 3x, \quad y_2 = 3x - x^2.$

Задание 4.3.

Вычислить трехкратный интеграл:

1. $\iiint_{132}^{246} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz;$

2. $\iiint_{111}^{234} (xyz) dx dy dz;$

3. $\iiint_{113}^{236} (xy + z^2) dx dy dz;$

4. $\iiint_{231}^{462} (xz + y^2) dx dy dz;$

5. $\iiint_{231}^{462} (x^2 + yz) dx dy dz;$

6. $\iiint_{131}^{262} (x^2 + 4yz) dx dy dz;$

7. $\iiint_{132}^{264} (x^2 + 2yz) dx dy dz;$

8. $\iiint_{211}^{432} (xz + 3y^2) dx dy dz;$

9. $\iiint_{111}^{242} (4xz + 6y^2) dx dy dz;$
10. $\iiint_{111}^{232} (x^2 + yx + 2z^2) dx dy dz;$
11. $\iiint_{111}^{422} (x^2 + 4xz + 6y^2) dx dy dz;$
12. $\iiint_{132}^{246} (x^2 - 3y^2 + 2z^2) dx dy dz;$
13. $\iiint_{111}^{235} (xy + zx + yz) dx dy dz;$
14. $\iiint_{113}^{236} 5x(y - z)^2 dx dy dz;$
15. $\iiint_{111}^{232} 3x(y + z)^2 dx dy dz;$
16. $\iiint_{111}^{234} 3y(x - z)^2 dx dy dz;$
17. $\iiint_{111}^{234} 3y^2(x - z)^2 dx dy dz;$
18. $\int_{-1}^2 \int_{-1}^3 \int_{-1}^3 y(x + z)^2 dx dy dz;$
19. $\iiint_{111}^{243} (x^2 - y^2 + z^2) dx dy dz;$

$$20. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz;$$

$$21. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (3xy - z^2) dx dy dz;$$

$$22. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2xz - y^2) dx dy dz;$$

$$23. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2x^2 - yz) dx dy dz;$$

$$24. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (x^2 - 4yz) dx dy dz;$$

$$25. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2x^2 + 2yz) dx dy dz;$$

$$26. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (4xz + 3y^2) dx dy dz;$$

$$27. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (4xz - 3y^2) dx dy dz;$$

$$28. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2x^2 + xy + z^2) dx dy dz;$$

$$29. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (x^2 - 4xz + 6y^2) dx dy dz;$$

$$30. \quad \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (x^2 + 4y^2 - 2z^2) dx dy dz.$$

Задание 4.4.

1) Вычислить криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ по длине дуги $L = y(x)$ от точки $A(a, c)$ до точки $B(b, d)$:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl.$$

№	$f(x, y)$	L	A	B
1.	$\frac{1}{2x+2y+5}$	$y(x) = 2x - 1$	$(0, -1)$	$(1, 1)$
2.	$2x + y + 1$	$y(x) = 2x - 1$	$(0, -1)$	$(1, 1)$
3.	$\frac{8y}{\sqrt{16x^2 + 1}}$	$y(x) = 2x^2 - 1$	$(0, -1)$	$(3, 17)$
4.	xy^2	$y(x) = \frac{3}{4}x$	$(0, 0)$	$(4, 3)$
5.	$x^3 + y$	$y(x) = x$	$(1, 1)$	$(3, 3)$
6.	$\frac{1}{3x+2y+5}$	$y(x) = 3x - 2$	$(0, -2)$	$(1, 1)$
7.	$2x + y + 2$	$y(x) = 3x - 1$	$(0, -1)$	$(1, 2)$
8.	$\frac{8y}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	$y(x) = x^2 + 1$	$(1, 2)$	$(2, 5)$
9.	$\frac{y}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	$y(x) = x^2 + 1$	$(2, 5)$	$(3, 10)$
10.	$3x + 2y + 1$	$y(x) = 2x + 1$	$(1, 3)$	$(3, 7)$
11.	$\frac{1}{x+y+2}$	$y(x) = 2x - 2$	$(1, 0)$	$(2, 2)$

12.	$2x + 4y + 2$	$y(x) = 2x - 1$	$(1, 1)$	$(2, 3)$
13.	$\frac{y}{\sqrt{16x^2 + 1}}$	$y(x) = 2x^2 - 1$	$(0, -1)$	$(3, 17)$
14.	$x^2 + y^2$	$y(x) = 2x$	$(0, 0)$	$(2, 4)$
15.	$x^3 + 2y$	$y(x) = 2x + 1$	$(1, 3)$	$(2, 5)$
16.	$\frac{2}{y - x}$	$y(x) = 3x - 2$	$(2, 4)$	$(3, 7)$
17.	$x + 2y - 1$	$y(x) = 3x - 1$	$(1, 2)$	$(3, 8)$
18.	$\frac{4y}{\sqrt{9x^4 + 1}}$	$y(x) = x^3 + 1$	$(1, 2)$	$(2, 9)$
19.	$\frac{y}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	$y(x) = x^2 - 3$	$(2, 1)$	$(3, 6)$
20.	$5x - 2y + 1$	$y(x) = 2x + 1$	$(1, 3)$	$(3, 7)$
21.	$x^2y + y$	$y(x) = 2x$	$(1, 2)$	$(2, 4)$
22.	$x^2 + 2y$	$y(x) = 2x - 1$	$(0, -1)$	$(3, 5)$
23.	$\frac{yx}{\sqrt{16x^2 + 1}}$	$y(x) = 2x^2 - 1$	$(0, -1)$	$(2, 7)$
24.	$2x^2 + y^2$	$y(x) = 2x - 1$	$(1, 1)$	$(2, 3)$

25.	$2x^2y$	$y(x) = 2x + 1$	$(0, 1)$	$(2, 5)$
26.	$\frac{4}{x-y}$	$y(x) = 2 - 3x$	$(1, -1)$	$(2, -4)$
27.	$3x + 2y - 5$	$y(x) = 2x - 1$	$(1, 1)$	$(2, 3)$
28.	$\frac{4y}{\sqrt{9x^2 + 1}}$	$y(x) = \frac{3}{2}x^2 + 1$	$(1, \frac{5}{2})$	$(2, 7)$
29.	$\frac{3xy}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	$y(x) = x^2 - 3$	$(1, -2)$	$(3, 6)$
30.	$2x^2 + 2y + 1$	$y(x) = x + 1$	$(1, 2)$	$(2, 3)$

2) Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где кривая L_{AB} задана уравнением $y = y(x)$, $A(a, c)$ и $B(b, d)$ – соответственно начальная и конечная точки этой кривой.

№	$P(x, y)$	$Q(x, y)$	$y(x)$	A	B
1.	$x + y$	$x - y$	$4x^2 + 2$	$(-1, 6)$	$(1, 6)$
2.	$x - y$	$x + y$	x^2	$(-1, 1)$	$(2, 4)$
3.	$x - y$	$x + y$	$2x^2 - x$	$(-1, 3)$	$(2, 6)$
4.	$x - y$	$x + y$	$x^2 + 2x$	$(-1, -1)$	$(2, 8)$
5.	$\sin^2 x$	y^2	$\cos x$	$(0, 1)$	$(\pi, -1)$

6.	$\cos^2 x$	y^2	$\sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
7.	$x^2 + y^2$	$x^2 - y^2$	x^2	$(0, 0)$	$(2, 4)$
8.	$x^2 + y^2$	$2xy$	$2x - x^2$	$(0, 0)$	$(3, -3)$
9.	$x^2 + y^2$	$2xy$	$3x + x^2$	$(0, 0)$	$(1, 4)$
10.	$2xy$	$x^2 + y^2$	$3x - x^2$	$(1, 2)$	$(2, 2)$
11.	$x + y$	$x - y$	$4x^2 - 2$	$(-1, 2)$	$(1, 2)$
12.	$x - y$	$x + y$	$x^2 + 4$	$(-1, 5)$	$(2, 8)$
13.	$y - x^2$	$x + y$	$2x^2$	$(1, 2)$	$(2, 8)$
14.	$x - y$	$x + y$	$x^2 - 2x - 2$	$(-1, 1)$	$(2, -2)$
15.	$\sin^2 x$	y^2	$\sin x$	$(0, 0)$	$(\pi, 0)$
16.	x	$\cos^2 x$	$\sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
17.	$x^2 + y^2$	$x^2 - y^2$	$2x - x^2$	$(0, 0)$	$(3, -3)$
18.	$x^2 + y^2$	$2xy$	$2x + x^2$	$(0, 0)$	$(1, 3)$
19.	$x^2 + y^2$	$2xy$	$3x - x^2$	$(0, 0)$	$(1, 2)$

20.	$4xy$	$x^2 + y^2$	$3x - x^2$	$(1, 2)$	$(2, 2)$
21.	$xy - y^2$	x	$2x^2$	$(0, 0)$	$(1, 2)$
22.	$xy + y^2$	$x - y$	$2x^2$	$(0, 0)$	$(1, 2)$
23.	$2xy$	$x + y$	$\frac{x^2}{4}$	$(0, 0)$	$(2, 1)$
24.	xy	$x^2 - y^2$	$x^2 - 4x + 4$	$(1, 1)$	$(2, 0)$
25.	y	$-x$	$2\sqrt{x}$	$(1, 2)$	$(4, 4)$
26.	y	x	$2\sqrt{x} - 2$	$(1, 0)$	$(2, 2\sqrt{2} - 2)$
27.	$y - x^2$	$x + y$	$2x^2 - 2x$	$(0, 0)$	$(2, 4)$
28.	$x - y$	$x + y$	$2x^2 + 2\sqrt{x}$	$(1, 3)$	$(4, 8)$
29.	$x - y$	$x + y$	$x^2 + 2x - 2$	$(-1, -3)$	$(2, 6)$
30.	$\cos^2 x$	y^2	$\sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

2.1. Решение типового варианта контрольной работы № 1

Задание 1.1. Найти и изобразить область определения функции:

$$z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy.$$

Решение.

Данную функцию можно рассматривать как сумму двух функций:

$$f_1(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = \arcsin 2xy.$$

Множеством задания первой функции является множество точек E^2 , координаты которых удовлетворяют неравенству $|1 - x^2 - y^2| \leq 1$ или двум неравенствам $-1 \leq 1 - x^2 - y^2 \leq 1$. Эти неравенства равносильны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}.$$

Множеством решений этой системы является круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат. Аналогично координаты точек множества задания второй функции должны удовлетворять двойному неравенству $-\frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$, которое равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} xy \geq -\frac{1}{2} \\ xy \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Множеством решений последней системы является часть плоскости, заключенная между гиперболами $xy = -\frac{1}{2}$ и $xy = \frac{1}{2}$ и включающая точки самих гипербол (рис. 1):

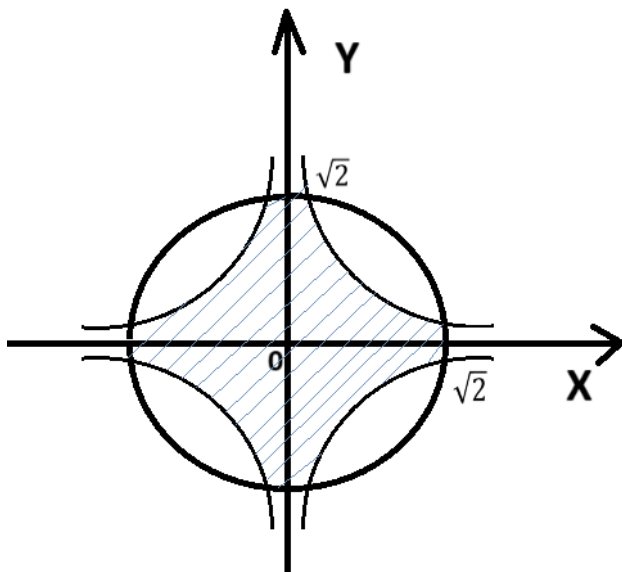


Рис. 1. Область определения функции

Задание 1.2. Найти частные производные первого порядка:

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}.$$

Решение.

Данная функция является функцией трех переменных x , y и z . При нахождении частной производной по каждой из этих переменных, две другие следует считать постоянными, поэтому:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}.$$

Задание 1.3. Найти частные производные второго порядка:

$$z = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{y}{x}\right).$$

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{2}{\sin \frac{2y}{x}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\sin \frac{2y}{x}}.$$

Частные производные второго порядка следует находить путем дифференцирования частных производных первого порядка как по x , так и по y , не забывая считать постоянными те переменные, по которым не берется производная:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2y \left(\frac{2}{x^3} \frac{1}{\sin \frac{2y}{x}} + \frac{1}{x^2} \frac{\cos \frac{2y}{x} \left(-\frac{2y}{x^2} \right)}{\sin^2 \frac{2y}{x}} \right) = \\ &= \frac{4y}{x^4 \sin^2 \frac{2y}{x}} \left(x \sin \frac{2y}{x} - y \cos \frac{2y}{x} \right). \end{aligned}$$

Если продифференцировать $\frac{\partial z}{\partial x}$ по y , то получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{\sin \frac{2y}{x}} - \frac{y}{\sin^2 \frac{2y}{x}} \cdot \cos \frac{2y}{x} \frac{2}{x} \right) = \\ &= \frac{2}{x^3 \sin^2 \frac{2y}{x}} \left(2y \cos \frac{2y}{x} - x \sin \frac{2y}{x} \right).\end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя по x и по y $\frac{\partial z}{\partial y}$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2 \left(-\frac{1}{x^2} \frac{1}{\sin \frac{2y}{x}} + \frac{1}{x} \frac{\cos \frac{2y}{x}}{\sin^2 \frac{2y}{x}} \frac{2y}{x^2} \right) = \\ &= \frac{2}{x^3 \sin^2 \frac{2y}{x}} \left(2y \cos \frac{2y}{x} - x \sin \frac{2y}{x} \right);\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{2}{x} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{2y}{x}} \cos \frac{2y}{x} \frac{2}{x} \frac{2}{x} \right) = -\frac{4}{x^2} \frac{\cos \frac{2y}{x}}{\sin^2 \frac{2y}{x}}.$$

Заметим, что смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

отличаются порядком, в котором велось дифференцирование. Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что на всем множестве

задания данной функции $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Задание 1.4.

а) Найти полный дифференциал функции:

$$z = x^2 - y^2; \quad x = u \cos v; \quad y = u \sin v.$$

Решение.

Воспользуемся свойством инвариантности формы полного дифференциала функции нескольких переменных. Для данного случая это свойство выразится формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Согласно данной формуле имеем:

$$dz = 2x dx - 2y dy,$$

так как

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \cos v du - u \sin v dv$$

и

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \sin v du + u \cos v dv,$$

то выражение полного дифференциала через независимые переменные u и v и их дифференциалы du и dv будет иметь вид

$$dz = 2u \cos v (\cos v du - u \sin v dv) - 2u \sin v (\sin v du + u \cos v dv)$$

или

$$dz = 2u \left(\cos 2v du - \frac{1}{2} u \sin 2v dv \right).$$

б) Найти $\text{grad } z$ в точке A и производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}$, если $z(x, y) = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2}$, $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и вектора $\vec{a}(-5; 12)$.

Решение.

Найдем $\text{grad } z$ в точке A , для этого вычислим частные производные первого порядка в точке A .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}}} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \bigg|_{\substack{x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}}} = 1.$$

Таким образом, $\text{grad } z(A) = \bar{i} + \bar{j} = \{1; 1\}$.

в) Для нахождения производной функции $z = f(x, y)$ в направлении вектора $\bar{a} = (-5; 12)$ найдем единичный вектор

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{(-5; 12)}{\sqrt{25+144}} = \left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right), \text{ тогда}$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}(A) = (\text{grad } z(A); \bar{a}_0) = 1 \left(-\frac{5}{13}\right) + 1 \cdot \frac{12}{13} = \frac{7}{13}.$$

Задание 1.5. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + y^2$ в точке, для которой $x = 1; y = 1$.

Решение.

Прежде всего определим аппликату точки касания из условия, что точка лежит на поверхности $x = 1$ и $y = 1$, получим $z = 3$. Следовательно, точкой касания является т. $M_0(1; 1; 3)$.

Так как уравнение поверхности разрешено относительно z , то касательная плоскость определяется уравнением

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

а нормаль – уравнениями

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Вычислим при $x = 1$ и $y = 1$ (т. е. в точке $P_0(1; 1)$) значения частных производных функции $z = 2x^2 + y^2$:

$$f'_x(1; 1) = 4x \Big|_{x=1} = 4; \quad f'_y(1; 1) = 2y \Big|_{y=1} = 2.$$

Подставив эти значения и координаты точки M_0 соответственно в уравнения касательной и нормали, получим

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

или

$$4x + 2y - z - 3 = 0,$$

и уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Задание 1.6. С помощью полного дифференциала функции вычислить приближенно

$$\arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right).$$

Решение.

Применяя полный дифференциал к приближенным вычислениям, необходимо указать аналитическое выражение для функции, приближенное значение которой надо найти; выбрать начальную точку P_0

так, чтобы значения функции и частных производных в этой точке можно было вычислить без таблиц:

$$f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right) \text{ в точке } P_1(1,97; 1,02).$$

Выбрав $P_0(2; 1)$ за начальную точку, имеем

$$\Delta x = 1,97 - 2 = -0,03;$$

$$\Delta y = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Найдем сначала частные производные функции:

$$f'_x(x, y) = -\frac{\cancel{1}/y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = -\frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = -\frac{-\cancel{x}/y^2}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2},$$

тогда

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(2, 1) = -\frac{1}{1^2 + (2 - 1)^2} = -0,5;$$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(2, 1) = \frac{2}{1^2 + (2 - 1)^2} = 1.$$

Воспользовавшись формулой приближенного вычисления:

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \Delta y,$$

получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) &\approx \operatorname{arctg} 1 + (-0,5)(-0,03) + 1 \cdot 0,02 = \\ &= \frac{\pi}{4} + 0,015 + 0,02 \approx 0,785 + 0,035 = 0,82.\end{aligned}$$

Задание 1.7. Найти локальные экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение.

1) Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравняем их к нулю

и решим полученную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x \end{array} \right\};$$

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Итак, имеем две точки $O(0; 0)$ и $P_0(1; 1)$, координаты которых удовлетворяют первоначальной системе уравнений. Обе точки являются приближенными, так как данная функция определена на всей евклидовой плоскости. Других приближенных точек нет, так как частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ существуют $\forall P(x, y) \in E^2$.

2) Найдем частные производные второго порядка и вычислим их значения в критических точках:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

В точке $O(0; 0)$ имеем:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = -3; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0.$$

В точке $P_0(1; 1)$ имеем:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 6; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1} = -3; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{y=1} = 6.$$

3) Найдем значения разности $AC - B^2$ в каждой критической точке.

В точке $O(0; 0)$ $AC - B^2 = 0 - 9 = -9 < 0$. Отсюда следует, что в этой точке функция не имеет локального экстремума.

В точке $P_0(1; 1)$ $AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$, и так как $A = 6 > 0$, то приходим к выводу, что в точке $P_2(1; 1)$ функция имеет локальный минимум:

$$z_{\min} = z \Big|_{x=1} = 1 + 1 - 3 = -1.$$

2.2. Решение типового варианта контрольной работы № 2

Задание 2.1.

Найти неопределенный интеграл с помощью подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}.$$

Решение. Так как $d(1 + \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, то интеграл приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} &= \int \frac{d(1 + \operatorname{tg} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x}} = \int (1 + \operatorname{tg} x)^{-\frac{1}{2}} d(1 + \operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + C. \end{aligned}$$

Задание 2.2.

Найти неопределенный интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int (x^2 - 2x + 3) \sin 3x dx.$$

Решение.

Так как один из множителей подынтегральной функции является многочленом второй степени, то найдем данный интеграл, применив два раза формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} &\int (x^2 - 2x + 3) \sin 3x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 2x + 3, dv = \sin 3x dx, du = (2x - 2) dx = 2(x - 1) dx \\ v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = \\ &= -\frac{x^2 - 2x + 3}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \int (x - 1) \cos 3x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x - 1, dv = \cos 3x dx, du = dx, v = \int \cos 3x dx = \\ = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^2 - 2x + 3}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{3} \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx \right) = \\
&= -\frac{x^2 - 2x + 3}{3} \cos 3x + \frac{2(x-1)}{9} \sin 3x - \frac{2}{27} \int \sin 3x d(3x) = \\
&= -\frac{x^2 - 2x + 3}{3} \cos 3x + \frac{2(x-1)}{9} \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C = \\
&= \frac{(-9x^2 + 18x - 25)}{27} \cos 3x + \frac{2(x-1)}{9} \sin 3x + C.
\end{aligned}$$

Задание 2.3.

Найти неопределенный интеграл от функции, содержащей квадратный трехчлен:

$$\int \frac{x+2}{3x^2 + 2x + 5} dx.$$

Решение.

Так как $(3x^2 + 2x + 5)' = 6x + 2$, то

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{3x^2 + 2x + 5} dx &= \frac{1}{6} \int \frac{(6x+2) + 10}{3x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x+2}{3x^2 + 2x + 5} dx + \\
&+ \frac{5}{3} \int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{6} \int \frac{d(3x^2 + 2x + 5)}{3x^2 + 2x + 5} + \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}} = \\
&= \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{9} \int \frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{14}}{3}\right)^2} dx = \\
&= \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 2x + 5) + \frac{5}{3\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{14}} + C.
\end{aligned}$$

Задание 2.4.

Найти неопределенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции на простейшие дроби:

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx.$$

Решение.

Выделим целую часть неправильной рациональной дроби, выполнив деление углом числителя на знаменатель:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + 4 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Полученную правильную дробь разложим на простейшие:

$$4 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = 4 \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{CX + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов получим:

$$4(x^3 + x^2 + x + 1) = AX(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (CX + D)x^2.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем, приравняв коэффициенты при x^3, x^2, x и x^0 .

$$x^3: A + C = 4; \quad x^2: 2A + B + D = 4; \quad x: 2A + 2B = 4; \quad x^0: 2B = 4.$$

Таким образом, $A = 0, B = 2, C = 4, D = 2$, и

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx &= \int x dx - \int 2 dx + 2 \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{2(2x + 2) - 2}{x^2 + 2x + 2} 2 dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} - \\ &- 2 \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C. \end{aligned}$$

Задание 2.5.

Найти неопределенный интеграл с помощью подстановки:

$$\int \sqrt{\frac{x+4}{x}} dx.$$

Решение.

Введем подстановку: $\sqrt{\frac{x+4}{x}} = t$.

Тогда, $x = \frac{4}{t^2 - 1}$, $dx = -\frac{8t}{(t^2 - 1)^2} dt$.

Тогда, $\int \sqrt{\frac{x+4}{x}} dx = -8 \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} dt$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(t^2 - 1)^2} = \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{(t-1)^2} + \frac{A_3}{t+1} + \frac{A_4}{(t+1)^2};$$

$$A_1(t-1)(t+1)^2 + A_2(t+1)^2 + A_3(t+1)(t-1)^2 + A_4(t-1)^2 = t^2.$$

Применяя метод частных значений, положим $t = 1$, $t = -1$.

Найдем $A_2 = \frac{1}{4}$, $A_4 = \frac{1}{4}$.

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим:

$$t^3(A_1 + A_3) + t^2(A_1 + A_2 - A_3 + A_4) + t(-A_1 + 2A_2 - A_3 - 2A_4) + t^0(-A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = t^2;$$

$$t^3: A_1 + A_3 = 0; \quad A_1 = \frac{1}{4}; \quad A_3 = -\frac{1}{4};$$

$$t^2: A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 1;$$

$$t: -A_1 + 2A_2 - A_3 - 2A_4 = 0;$$

$$t^0: -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0.$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{x+4}{x}} dx &= -8 \left(\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t+1)^2} \right) = \\
 &= -2 \left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} - \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right) + C = \\
 &= -2 \left(\ln \left| \sqrt{\frac{x+4}{x}} - 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+4}{x}} - 1} - \ln \left| \sqrt{\frac{x+4}{x}} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{\frac{x+4}{x}} + 1} \right) + C.
 \end{aligned}$$

Задание 2.6.

Найти неопределенный интеграл с помощью подстановки:

$$\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}.$$

Решение.

Применим универсальную подстановку:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - 4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 - 8t + 8} = \\
 &= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

2.3. Решение типового варианта контрольной работы № 3

Задание 3.1.

С помощью интегрирования по частям вычислить определенный интеграл от функции вида $(7x+3) \cdot \cos 2x$, при $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (7x+3) \cos 2x &= \left| \begin{array}{l} u = 7x+3, \quad du = 7dx \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (7x+3) \sin 2x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{7}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \\ &= \left(\frac{1}{2} (7x+3) \sin 2x + \frac{7}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7\pi}{2} + 3 \right) \sin \pi - \frac{3}{2} \sin 0 + \frac{7}{4} \cos \pi - \frac{7}{4} \cos 0 = -\frac{7}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Задание 3.2.

Вычислить с помощью подстановки определенный интеграл от функции $\frac{x}{\sqrt{1+3x}}$ в промежутке от $x_1 = 0$ до $x_2 = 5$.

Решение.

Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x} = t$.

Отсюда находим $x = \frac{t^2-1}{3}$, $dx = \frac{2}{3} t dt$ и новые пределы интегрирования $t_1 = 1$ при $x_1 = 0$, $t_2 = 4$ при $x_2 = 5$. Подставляя, получим

$$\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9} \int_1^4 (t^2-1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \left(\frac{64-1}{3} - 4 + 1 \right) = 4.$$

Задание 3.3.

а) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми

$$y = 4 - x^2 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 2x.$$

Решение.

Определив точки пересечения парабол и построив область их пересечения (рис. 2), видим, что искомую площадь S можно найти двумя способами.

1-й способ. Определим площадь S как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций $S = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$.

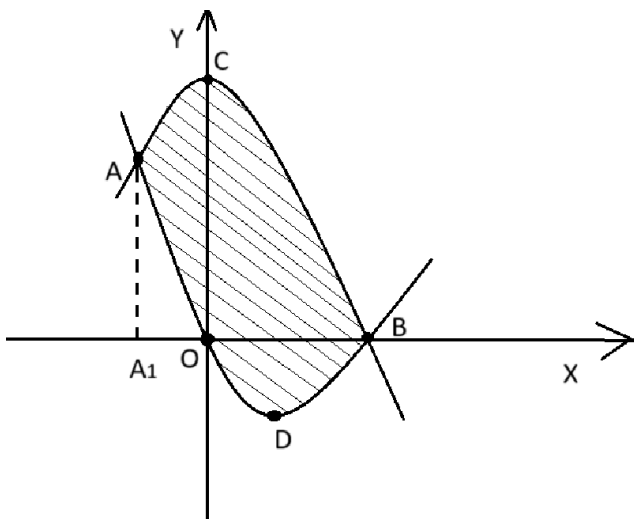


Рис. 2. Плоская фигура, ограниченная заданными кривыми

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$4 - x^2 = x^2 - 2x;$$

$$-2x^2 + 2x + 4 = 0;$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0;$$

$$x_1 = -1; x_2 = 2; y_1 = 3; y_2 = 0.$$

Точки пересечения парабол имеют координаты: $A(-1; 3), B(2; 0)$.

$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9;$$

$$S_{OBD} = \int_2^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3} \quad (\text{т. к. площадь } OBD$$

расположена ниже оси OX , пределы интегрирования взяты справа налево).

$$S_{A_1AO} = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Окончательно получим $S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9$ (кв. ед.).

2-й способ.

В соответствии с формулой $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, получаем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left((4 - x^2) - (x^2 - 2x) \right) dx = \int_{-1}^2 (4 + 2x - 2x^2) dx = \\ &= \left(4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = 9 \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

б) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 1 + \cos \varphi$.

Решение.

Фигура, ограниченная кардиоидой, симметрична относительно прямой $\varphi = 0$ (рис. 3).

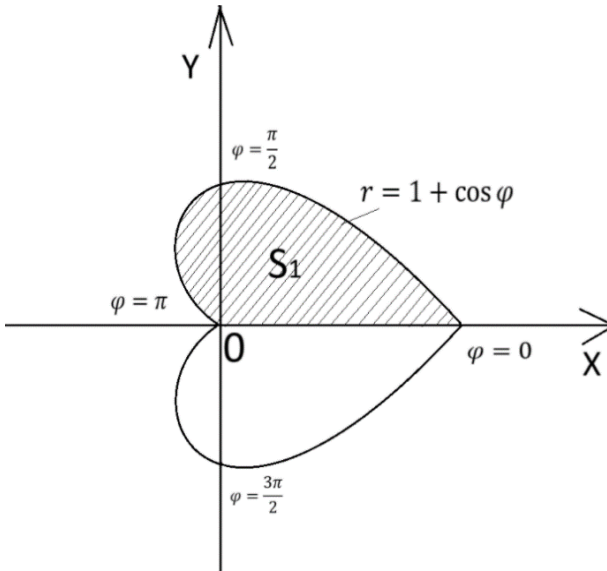


Рис. 3. Плоская фигура, ограниченной кардиоидой

Ее площадь $S = 2S_1$, где S_1 вычислим по формуле $S_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{4} \pi \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

$$S = 2S_1 = \frac{3}{2} \pi \text{ (кв. ед.)}.$$

Задание 3.4.

а) Вычислить длину дуги кривой $y^2 = (x-1)^3$, при $2 \leq x \leq 5$.

Решение.

Длина дуги кривой $y = f(x)$, заключенная между прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Выразим из данного уравнения y и найдем y' .

$$y = \pm(x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \pm \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} l &= \int_2^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_2^5 \sqrt{9x-5} dx = \frac{1}{18} \int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}} d(9x-5) = \\ &= \frac{1}{27} (9x-5)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 \approx 7,63. \end{aligned}$$

б) Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, где $0 \leq t \leq 1$.

Решение.

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t меняется $t_1 \leq t \leq t_2$, длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Определим $x'_t = t^2 - 1$, $y'_t = 2t$. Тогда,

$$l = \int_0^1 \sqrt{(t^2 - 1)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt =$$

$$\int_0^1 \sqrt{(t^2 + 1)^2} dt = \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t \right)_0^1 = \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}.$$

Задание 3.5.

а) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

Решение.

Изобразим фигуру, ограниченную заданными линиями, предварительно вычислив абсциссы точек пересечения (рис. 4):

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ и } y = \frac{3-2x}{2},$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{3}{2} - x,$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1.$$

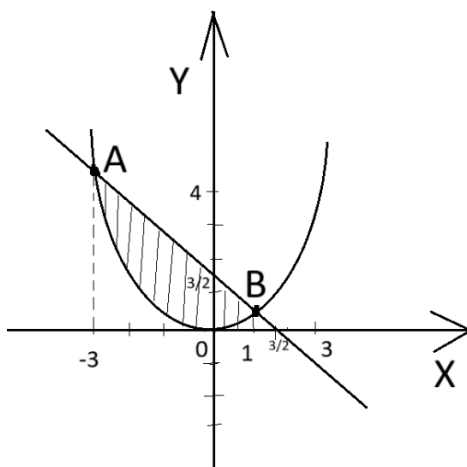


Рис. 4. Плоская фигура, ограниченная заданными линиями

Искомый объем представляет собой разность объемов двух тел вращения вокруг оси OX :

$$V_x = V_1 - V_2,$$

где V_1 – объем, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямой $y = \frac{3}{2} - x$, где $-3 \leq x \leq 1$; V_2 – объем, полученный вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$, где $-3 \leq x \leq 1$. По формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ получаем

$$V_x = V_1 - V_2 = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 dx = -\pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 d\left(\frac{3}{2} - x \right) -$$

$$-\pi \int_{-3}^1 \frac{x^4}{4} dx = -\pi \frac{\left(\frac{3}{2} - x \right)^3}{3} \Big|_{-3}^1 - \pi \frac{x^5}{20} \Big|_{-3}^1 = \frac{272}{15} \text{ (куб. ед.)}.$$

б) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Решение.

Построим плоскую фигуру, ограниченную астроидой (рис. 5).

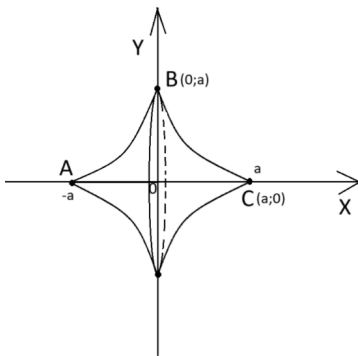


Рис. 5. Вычисление объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX

Объем тела вращения вокруг оси OX определяется по формуле

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx = \pi \int_{-a}^a y^2(x) dx = 2\pi \int_0^a y^2(x) dx.$$

Астроида задана параметрическими уравнениями. Следовательно,

$$y^2 = a^2 \sin^6 t, \quad dx = -3a \cos^2 t \sin t dt, \quad \text{при } x=0, t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \text{при } x=a, t_2 = 0.$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a y^2(x) dx = -6a^2 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt = \\ &= 6a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t (-\sin t) dt = \\ &= 6a^3 \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) d\cos t = \\ &= 6a^3 \pi \left(\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{32}{105} \pi a^3 \text{ (куб. ед.)}. \end{aligned}$$

Задание 3.6.

а) Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Решение.

Подынтегральная функция является непрерывной на интервале $(-\infty; +\infty)$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{(x+1)^2 + 4}.$$

Воспользуемся правилом вычисления несобственного интеграла первого рода:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx. \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a+1}{2} \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b+1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, исходный интеграл сходится.

б) Вычислить или установить расходимость в несобственном интеграле $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение.

Так как $f(x) = \frac{1}{x^2}$ — непрерывна на интервале $(0; 1]$, а в точке $x = 0$ терпит бесконечный разрыв $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, воспользуемся правилом вычисления несобственных интегралов второго рода:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \\
 \int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x} \right)_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty.
 \end{aligned}$$

Следовательно, исследуемый интеграл расходится.

2.4. Решение типового варианта контрольной работы № 4

Задание 4.1.

Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_x^{x+1} (x - 5y + 4) dy$.

Решение.

Сначала вычисляем внутренний интеграл, в данном примере интеграл по y :

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{x+1} (x - 5y + 4) dy &= \int_0^2 dx \left(xy - \frac{5y^2}{2} + 4y \right) \Bigg|_x^{x+1} = \\ &= \int_0^2 dx \left[\left(x(x+1) - 5 \frac{(x+1)^2}{2} + 4(x+1) \right) - \left(x^2 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \right] = \\ &= \int_0^2 dx \left(-4x + \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Далее вычисляем интеграл по x :

$$\int_0^2 dx \left(-4x + \frac{3}{2} \right) = \left(-4 \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right) \Bigg|_0^2 = -8 + 3 = -5.$$

Задание 4.2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$y_1 = x^2 - 2x - 2, \quad y_2 = x + 2.$$

Решение.

Построим фигуру, используя заданные уравнения ее границы (рис. 6):

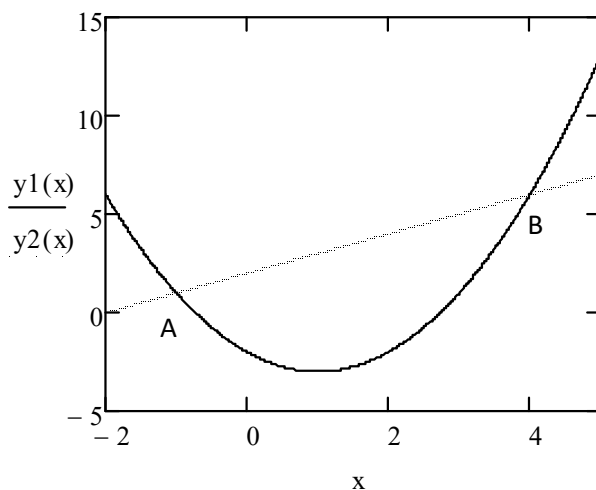


Рис. 6. Графики заданных линий

Линии пересекаются в точках $A(-1, 1)$ и $B(4, 6)$. Фигура, площадь которой нужно найти, заключена в пределах:

$$-1 \leq x \leq 4, \quad x^2 - 2x - 2 \leq y \leq x + 2.$$

Искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_{-1}^4 dx \int_{x^2 - 2x - 2}^{x+2} dy = \int_{-1}^4 dx \left(y \Big|_{x^2 - 2x - 2}^{x+2} \right) = \\ &= \int_{-1}^4 dx \left(x + 2 - x^2 + 2x + 2 \right) = \int_{-1}^4 dx \left(3x - x^2 + 4 \right) = \\ &= \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_{-1}^4 = \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Задание 6.3.

Вычислить трехкратный интеграл:

$$\int_{132}^{243} \int \int (yz + xy + xz) dx dy dz.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 \int_{132}^{243} (yz + xy + xz) dx dy dz &= \int_1^2 dz \int_3^4 dy \int_2^3 (yz + xy + xz) dx = \\
 &= \int_1^2 dz \int_3^4 dy \left[yzx + \frac{y}{2} x^2 + \frac{z}{2} x^2 \right]_2^3 = \\
 &= \int_1^2 dz \int_3^4 dy \left[\left(yz3 + \frac{y}{2} 3^2 + \frac{z}{2} 3^2 \right) - \left(yz2 + \frac{y}{2} 2^2 + \frac{z}{2} 2^2 \right) \right] = \\
 &= \int_1^2 dz \int_3^4 dy \left(\frac{5}{2} y + \frac{5}{2} z + yz \right) = \int_1^2 dz \left[\left(\frac{5}{4} y^2 + \frac{5}{2} zy + \frac{z}{2} y^2 \right) \right]_3^4 = \\
 &= \int_1^2 dz \left[\left(\frac{5}{4} 4^2 + \frac{5}{2} z4 + \frac{z}{2} 4^2 \right) - \left(\frac{5}{4} 3^2 + \frac{5}{2} z3 + \frac{z}{2} 3^2 \right) \right] = \\
 &= \int_1^2 dz \left(6z + \frac{35}{4} \right) = \left(3z^2 + \frac{35}{4} z \right) \Big|_1^2 = \frac{71}{4}.
 \end{aligned}$$

Задание 4.4.

а) Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \frac{2y dl}{\sqrt{8x^2 + 1}}$,

по длине дуги L , заданной уравнением $y(x) = \sqrt{2}x^2 + 3$, между точками $A(1, \sqrt{2} + 3)$ и $B(2, 4\sqrt{2} + 3)$.

Решение.

Находить криволинейный интеграл первого рода будем по формуле

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1)$$

Вычислим $y'(x)$:

$$y'(x) = 2\sqrt{2}x.$$

Подставим пределы интегрирования, $y(x)$ и $y'(x)$ в формулу (1):

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2(\sqrt{2x^2+3})}{\sqrt{8x^2+1}} \left(\sqrt{1+8x^2} \right) dx &= 2 \int_1^2 (\sqrt{2x^2+3}) dx = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^2 = \frac{14\sqrt{2}}{3} + 6. \end{aligned}$$

б) Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$\int_{L_{AB}} (\sin^2(2x) + y) dx + y^2 dy$, где кривая L_{AB} задана уравнением $y(x) = \cos(2x)$, $A(0, 1)$ и $B(\pi/4, -1)$ – соответственно начальная и конечная точки этой кривой.

Решение.

Находить криволинейный интеграл второго рода будем по формуле

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx. \quad (2)$$

Вычислим $y'(x)$:

$$y' = -2 \sin(2x).$$

Подставим пределы интегрирования, $y(x)$ и $y'(x)$ в формулу (2):

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x) dx + \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx - 2 \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) \sin(2x) dx.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sin^2(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos(4x)) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(4x)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{\sin(\pi)}{8} - 0 + 0 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} (\sin(2x)) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) = \frac{1}{2}.$$

Вычислим третий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) \sin(2x) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x) d(\cos(2x)) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\cos^3(2x)}{3} \right) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{6} \left(\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^3(0) \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Тогда, исходный криволинейный интеграл второго рода равен

$$\int_0^{\pi/4} (\sin^2(2x) + \cos(2x) + \cos^2(2x)(-2\sin 2x)) dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{6}.$$

3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Функции нескольких переменных. Частные приращения, производные, дифференциалы, их геометрический смысл. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

2. Полный дифференциал функции нескольких переменных. Полный дифференциал сложной функции. Инвариантность формы полного дифференциала.

3. Дифференцируемость функции нескольких переменных (необходимое и достаточное условия).

4. Производные сложных и неявно заданных функций нескольких переменных. Полная производная.

5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

6. Экстремум функции нескольких переменных, необходимое и достаточное условия

7. Первообразная функции и неопределенный интеграл.

8. Основные свойства неопределенного интеграла.

9. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

10. Замена переменной в неопределенном интеграле.

11. Интегрирование простейших рациональных дробей.

12. Интегрирование рациональных функций.

13. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

14. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

15. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, и его определение. Геометрический смысл определенного интеграла.

16. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

17. Формула Ньютона-Лейбница.

18. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу.

19. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной.

20. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

21. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах.

22. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
23. Вычисление длин дуг кривых в декартовых координатах.
24. Вычисление длин дуг кривых, заданных параметрически.
25. Вычисление длин дуг кривых в полярных координатах.
26. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям и объемов тел вращения.
27. Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов.
28. Двойной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат.
29. Замена переменной в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.
30. Тройной интеграл и его вычисление в декартовой системе координат.
31. Замена переменных в тройном интеграле.
32. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
33. Тройной интеграл в сферических координатах.
34. Криволинейный интеграл 1-го рода. Его вычисление.
35. Ориентированная кривая. Задача, приводящая к криволинейному интегралу 2-го рода.
36. Свойства и вычисление криволинейного интеграла 2-го рода. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода.
37. Формула Грина.
38. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
39. Криволинейный интеграл от полного дифференциала. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовничая, И. В. Математический анализ. Функции многих переменных : учебник и практикум для вузов / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2023. – 206 с.
2. Трухан, А. А. Математический анализ. Функция нескольких переменных / А. А. Трухан. – М. : Лань, 2021. – 236 с.
3. Веретенников, В. Н. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных : учебное пособие / В. Н. Веретенников, Ю. Б. Ржонсницкая, Е. А. Бровкина. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 72 с.
4. Математика : пособие для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения» : в 4 ч. / Г. К. Воронович [и др.]. – Минск : Белорус. нац. техн. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 192 с.
5. Матвеева, Л. Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных. Курс лекций для студентов инженерно-технических и экономических специальностей / Л. Д. Матвеева, А. Н. Рудый. – Минск : Белорус. нац. техн. ун-т, 2019. – 70 с.
6. Авакян, Е. З. Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. пособие для студентов техн. специальностей днев. формы обучения / Е. З. Авакян, С. Л. Авакян. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 114 с.
7. Абрамян, М. Э. Лекции по интегральному исчислению функции одной переменной и теории рядов / М. Э. Абрамян, Южный федеральный университет. – Ростов-на Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2021. – 261 с.
8. Потапов, А. П. Математический анализ. Интегральное исчисление функций нескольких переменных : учебник для вузов / А. П. Потапов. – М. : Лань, 2023. – 276 с.
9. Мышлявцева, М. Д. Интегральное исчисление функций нескольких переменных : учеб. пособие / М. Д. Мышлявцева, М. Н. Соколовский, Г. А. Троценко. – Омск : ОмГТУ, 2022. – 160 с.
10. Вся высшая математика : в 7 т / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко [и др.]. – Т. 2 : Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия. – Изд. стереотип. URSS, 2024. – 192 с.

11. Петрушко, И. М. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения : лекции и практикум / И. М. Петрушко. – М. : Лань, 2021. – 606 с.

Дополнительная литература

12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральные исчисления : учебник для втузов : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – 416 с. – Т.1.

13. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : учебное пособие для втузов : в т. 2 : / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с. – Т. 2.

14. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для студентов инженерно-технических специальностей вузов / Я. С. Бугров. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

15. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 2 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Мн. : Высшая школа, 1985. – 284 с. – Ч. 2.

16. Зорич, В. А. Математический анализ : в 3 т. / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – Т. 1. – 543 с.

17. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. 1. – 584 с.

18. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981. – Т. 2. – 687 с.

19. Щипачев, В. С. Курс высшей математики / В. С. Щипачев. – М. : Изд-во МГУ, 1982. – 326 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ	4
1.1. Правила оформления контрольных работ	4
1.2. Контрольная работа № 1	5
1.3. Контрольная работа № 2	14
1.4. Контрольная работа № 3	23
1.5. Контрольная работа № 4	34
2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	45
2.1. Решение типового варианта контрольной работы № 1	45
2.2. Решение типового варианта контрольной работы № 2	54
2.3. Решение типового варианта контрольной работы № 3	60
2.4. Решение типового варианта контрольной работы № 4	69
3. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ	74
Список литературы.....	76

Учебное издание

БОКУТЬ Людмила Валентиновна
ГАЦКЕВИЧ Елена Ивановна
ПРУСОВА Ирина Васильевна и др.

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов специальностей

6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества.

Метрология, стандартизация и контроль качества
в машиностроении и приборостроении»;

6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»;

6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника»;

6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия.

Технические средства диагностики и лечения»

В 3 частях

Часть 2

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 10.10.2025. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 4,60. Уч.-изд. л. 3,55. Тираж 100. Заказ 547.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.