МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Экспериментальная и теоретическая физика»

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Пособие
для студентов специальностей
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»,
6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»,
6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника»,
6-05-0716-05 «Технические системы обеспечения безопасности»,
6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия»,
6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника»

Рекомендовано учебно-методическими объединениями по образованию в областях приборостроения и обеспечения качества

Минск
БНТУ
2025

УДК 531/534+539.1+536(075.8)
ББК 22.3я7
М55

Составители:
В. В. Чёрный, Ю. А. Бумай, В. В. Красовский, Д. С. Бобученко, Л. П. Свирина, К. В. Юмашев

Рецензенты:
кафедра физики УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» (заведующий кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доцент *А. А. Григорьев*);
зав. лабораторией спектроскопии полупроводников БГУ, канд. физ.-мат. наук *В. С. Просолович*

М55 **Механика.** Молекулярная физика и термодинамика : пособие для студентов специальностей 6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества», 6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы», 6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника», 6-05-0716-05 «Технические системы обеспечения безопасности», 6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия», 6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника» / сост. : В. В. Чёрный [и др.]. – Минск : БНТУ, 2025. – 241 с.

ISBN 978-985-31-0069-3.

Пособие содержит теоретический материал по различным разделам курса «Механика. Молекулярная физика и термодинамика». Дается элементарное объяснение используемых физических и математических терминов. Включена также глава, посвященная специальной теории относительности.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, изучающих разделы «Механика. Молекулярная физика и термодинамика» курса общей физики.

УДК 531/534+539.1+536(075.8)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-31-0069-3

© Белорусский национальный технический университет, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **7**
1. КИНЕМАТИКА 8
1.1. Разделы механики. Системы отсчета 8
1.2. Векторы 10
1.3. Скорость 13
1.4. Ускорение 17
1.5. Кинематика вращательного движения 21

2. ДИНАМИКА 26
2.1. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона 26
2.2. Масса. Сила. Импульс 27
2.3. Второй закон Ньютона 29
2.4. Третий закон Ньютона 30
2.5. Виды сил 31
2.6. Сила тяжести. Вес. Перегрузки. Невесомость 31
2.7. Упругие силы. Деформации. Закон Гука 34
2.8. Силы трения 41
2.9. Движение тела с переменной массой 49

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ 52
3.1. Закон сохранения импульса 52
3.2. Работа силы. Скалярное произведение векторов 54
3.3. Криволинейный интеграл. Мощность 56
3.4. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии 57
3.5. Потенциальная энергия. Связь силы с потенциальной энергией 59
3.6. Закон сохранения механической энергии 63
3.7. Момент импульса. Момент силы. Момент пары сил 65
3.8. Закон изменения момента импульса. Закон сохранения момента импульса 68

4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 71
4.1. Плоское движение твердого тела 71
4.2. Движение центра масс твердого тела 72
4.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент импульса твердого тела 73

4.4. Момент инерции. Теорема Штейнера 75
4.5. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела 78
4.6. Кинетическая энергия вращающегося тела 81
4.7. Кинетическая энергия тела при его плоском движении 82
4.8. Гироскопы. Гироскопический эффект 85

5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА 90
5.1. Силы инерции 90
5.2. Центробежная сила инерции 92
5.3. Сила Кориолиса 97

6. ГИДРОМЕХАНИКА 100
6.1. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности 100
6.2. Уравнение Бернулли 101
6.3. Формула Торичелли 105
6.4. Вязкость жидкости. Ламинарный и турбулентный режимы течения. Число Рейнольдса 106
6.5. Формула Пуазейля 109
6.6. Движение тел в жидкостях и газах 112

7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ 114
7.1. Преобразования Галилея 114
7.2. Опыт Майкельсона–Морли 115
7.3. Постулаты Эйнштейна 116
7.4. Преобразования Лоренца 117
7.5. Следствия из преобразований Лоренца 121
7.6. Основной закон релятивистской динамики материальной точки 128
7.7. Закон взаимосвязи массы и энергии 130

8. ГРАВИТАЦИЯ 135
8.1. Закон всемирного тяготения 135
8.2. Космические скорости 136
8.3. Гравитационное поле 138

9. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ 140
9.1. Статистическая физика и термодинамика 140
9.2. Состояние термодинамической системы. Процесс 141

9.3. Молекулярно-кинетические представления 143
9.4. Уравнение состояния идеального газа 146
9.5. Число ударов молекул о стенку сосуда.
Принцип детального равновесия..... 150
9.6. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории
для давления..... 151
9.7. Средняя энергия молекул 152

10. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ 157
10.1. Внутренняя энергия термодинамической системы..... 157
10.2. Работа, совершаемая телом при изменении его объема 158
10.3. Первое начало термодинамики 160
10.4. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа.
Уравнение Майера..... 162
10.5. Уравнение адиабатического процесса..... 166
10.6. Уравнение политропического процесса..... 168
10.7. Работа идеального газа при различных
политропических процессах..... 171
10.8. Классическая теплоемкость идеального газа.
Понятие о квантовой теплоемкости идеального газа..... 173

11. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 178
11.1. Функция распределения вероятности..... 178
11.2. Распределение Максвелла 181
11.3. Барометрическая формула..... 184
11.4. Распределение Больцмана 186
11.5. Определение числа Авогадро..... 187

12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА..... 189
12.1. Среднее число столкновений и средняя длина
свободного пробега молекул в газе..... 189
12.2. Эксперименты, подтверждающие
молекулярно-кинетическую теорию..... 191
12.3. Явления переноса в термодинамически неравновесных
системах.Теплопроводность. Диффузия. Вязкость..... 194
12.4. Вакуум и методы его получения.
Свойства ультраразреженных газов..... 198

13. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ 203
13.1. Тепловые машины. Теорема Карно. Цикл Карно 203
13.2. Статистический смысл энтропии и 2-го начала термодинамики 207
13.3. Энтропия идеального газа 211

14. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. ФАЗЫ. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ 213
14.1. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса 213
14.2. Фазы. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода 214
14.3. Равновесие между паром и жидкостью. Критическое состояние. Метастабильные состояния 217
14.4. Диаграмма состояний вещества 220

15. ЖИДКОЕ И ТВЕРДОЕ СОСТОЯНИЕ 222
15.1. Особенности строения жидкостей 222
15.2. Поверхностное натяжение 223
15.3. Явления смачивания и несмачивания 225
15.4. Капиллярные явления 227
15.5. Особенности строения и свойств кристаллов 231
15.6. Физические типы кристаллов 233
15.7. Тепловое расширение твердых тел 235
15.8. Теплоемкость твердых тел 237

Литература 241

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие посвящено первым разделам, с которых начинается изучение физики. Физика, наряду с другими областями знаний, представляет собой важнейшее направление, обеспечивающее научно-технический прогресс.

Начало механики было положено еще в древности. Время подтвердило правильность законов, установленных Архимедом. Дальнейшее развитие механики произошло в средние века в работах Галилея, Ньютона, Кеплера, Коперника и других ученых. Своего расцвета классическая механика достигла в XIX веке.

В начале XX столетия Эйнштейном было установлено, что законы классической механики являются частным случаем релятивистской механики при движениях со скоростями, значительно меньшими по сравнению со скоростью света в вакууме. Масса тела, которая была постоянной в классической механике, как оказалось, зависит от скорости тела. Коме этого, было показано, что и для многих других физических величин, характеризующих физические тела, их значения не инвариантны, а зависят от движения тел. Это было революцией не только в механике, но и во всей физике.

Тем не менее, в широчайшей практической деятельности, когда скорости движения невелики, законы классической механики сохранили свое важное значение и являются неотъемлемой частью современного курса физики.

В древности было сформулировано представление о дискретном, молекулярном строении материи. В течение долгого времени это было лишь догадкой выдающихся умов. Значительно позже возникла идея объяснить теплоту молекулярным движением, сторонником которой был М. Ломоносов. Развитию термодинамики способствовали изобретения паровой машины (Томас Ньюкомен, Джеймс Уатт). Особенно успешным для развития термодинамики было XIX столетие.

Вопрос о совершенствовании современных тепловых двигателей требует глубоких знаний в области термодинамики.

В курсе молекулярной физики изучаются многие понятия, необходимые для объяснения многих явлений в дальнейших разделах физики, таких как электричество, магнетизм, оптика.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Разделы механики. Системы отсчета

Кинематика изучает движение тел вне зависимости от причин, которые это движение обуславливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика, как частный случай динамики, изучает законы равновесия системы тел.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные ***упрощенные физические модели.***

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в одних задачах можно считать материальной точкой, в других – нет. Например, при рассмотрении движения Земли вокруг Солнца ее можно считать материальной точкой. При рассмотрении движения спутников это уже делать нельзя.

Абсолютно твердое тело – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь, а расстояние между любыми двумя точками этого тела остается постоянным.

Абсолютно упругое тело – тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

Любое движение твердого тела можно представить как ***комбинацию*** *поступательного* и *вращательного* движений. ***Поступательным*** называется движение тела, при котором прямая, проведенная через две любые несовпадающие точки, принадлежащие телу, остается параллельной самой себе в процессе движения.

Вращательным называется движение, при котором каждая точка тела описывает окружность, при этом центры окружностей, описываемых различными точками, лежат на одной прямой, называемой осью вращения, а плоскости всех окружностей перпендикулярны этой оси.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо указать, по отно-

шению к какому телу (или телам, называемым телами отсчета) мы рассматриваем движение данного тела. Кроме того, необходимо при этом фиксировать соответствующие моменты времени. Роль часов может выполнять устройство, в котором происходят периодические процессы. Совокупность неподвижных друг относительно друга тел отсчета и часов называется ***системой отсчета***. С телами отсчета связывают некоторую систему координат, например, прямоугольную декартову или сферическую или какую-либо другую.

В наиболее употребительной декартовой системе координат XYZ (рис. 1.1) координаты некоторой точки M определяются так. Через данную точку проводим плоскость, которая параллельна плоскости YZ. Данная плоскость пересечет ось X в точке M_x. Координата x по модулю равна длине отрезка OM_x, причем $x > 0$, если точка M_x принадлежит положительной полуоси X, и $x < 0$, если точка M_x принадлежит отрицательной полуоси X. Аналогично определяются две другие координаты y и z.

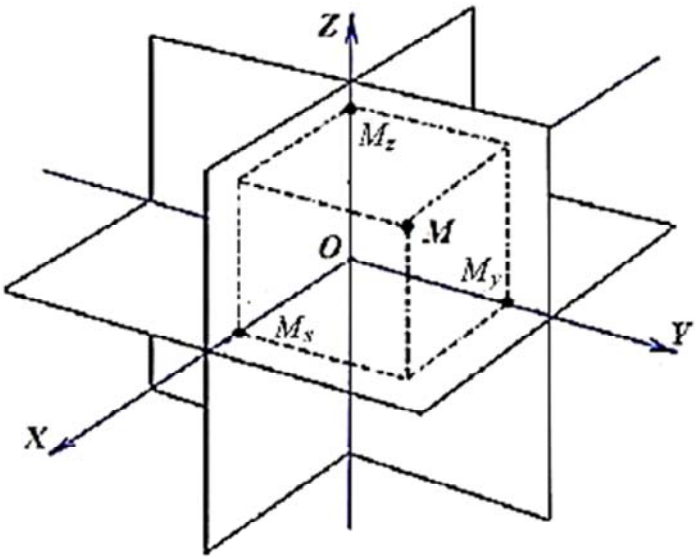


Рис. 1.1. Точка в декартовой системе координат

1.2. Векторы

Векторными называют величины, характеризуемые как числовым значением, так и направлением в пространстве. Векторы обозначаются со стрелкой вверху: $\vec{a}$. Модулем вектора является его числовое значение. Это скаляр, при этом всегда положительный, он обозначается $|\vec{a}|$ или a. Примеры векторов: радиус-вектор, скорость, момент силы. На рисунках векторы обозначаются в виде отрезков со стрелкой на конце, которая указывает его направление. Векторы, перпендикулярные плоскости рисунка и направленные за плоскость (от нас), обозначаются $\otimes$, а направленные от плоскости (на нас) – как $\odot$. Это напоминает стрелу, летящую соответственно от нас и к нам.

Пусть заданы вектор $\vec{a}$ и ось X. Из начала и конца вектора $\vec{a}$ опустим перпендикуляры на ось X, пересекающие ось в точках A и B – основания перпендикуляров. Проекция a_x вектора $\vec{a}$ на ось X равна длине отрезка AB, взятой со знаком плюс, если угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью X острый, и со знаком минус, если он тупой. Если $\varphi = \pi/2$, проекция равна нулю. Это отражает формула: $a_x = |AB|\cos\varphi$.

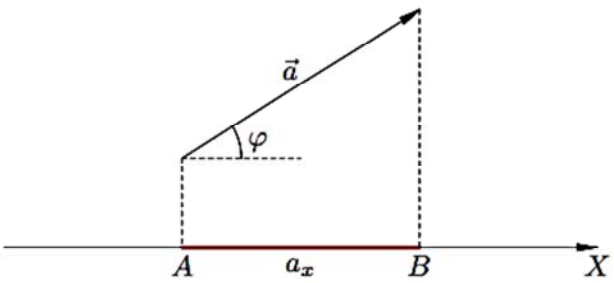


Рис. 1.2. Проекция вектора на ось

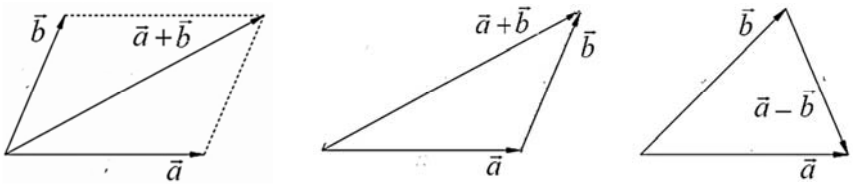
Представление вектора в виде суммы других векторов называют ***разложением вектора на составляющие***. Такую операцию можно произвести бесконечным числом способов. Если в пространстве задана декартова система координат, то вектор однозначно задается

набором своих координат a_x, a_y, a_z, которые являются проекциями вектора $\vec{a}$ на координатные оси:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, и $\vec{k}$ – единичные вектора вдоль осей X, Y и Z. Векторы $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, и $a_z\vec{k}$ называют составляющими вектора $\vec{a}$ вдоль осей X, Y и Z.

На рис. показаны простейшие операции с векторами. Рис. 1.3, *а* иллюстрирует известное правило, когда вектор суммы представляет собой диагональ параллелепипеда. Рис. 1.3, *б* иллюстрирует аналогичную операцию (правило треугольника при сложении векторов), когда начало второго вектора помещено в конец первого, а рис. 1.3, *в* – операцию вычитания векторов $(\vec{a} - \vec{b})$.



а *б* *в*

Рис. 1.3. Действия с векторами:
а, *б* – сложение; *в* – вычитание

Операции умножения векторов будут рассмотрены ниже.

Положение точки может быть задано и с помощью ее ***радиус-вектора*** $\vec{r}$, проведенного из начала координат в точку *M* (рис 1.4).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1.1)$$

Здесь x, y и z – декартовы координаты точки. Модуль (абсолютная величина) радиус-вектора – это расстояние от начала координат до данной точки.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1.2)$$

Движение материальной точки полностью определено, если декартовы координаты материальной точки заданы как функции времени t (от лат. *tempus*):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Эти уравнения называются ***кинематическими уравнениями движения точки***. Они эквивалентны одному векторному уравнению движения точки: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

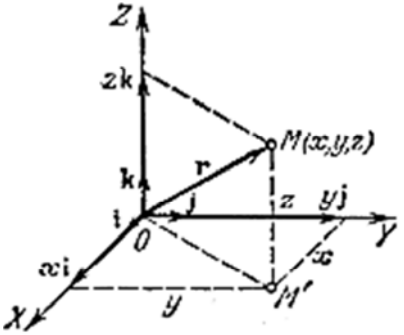


Рис. 1.4. Радикс-вектор точки

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета, называется ***траекторией***. Уравнение траектории можно получить, исключив параметр t из кинематических уравнений.

В зависимости от формы траектории движение может быть ***прямолинейным*** или ***криволинейным***.

Длиной пути точки называется сумма длин всех участков траектории, пройденных этой точкой за рассматриваемый промежуток времени: $s = s(t)$. Длина пути – ***скалярная*** функция времени.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени (рис. 1.5)):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}. \qquad (1.3)$$

В пределе $\Delta t \to 0$ длина пути по хорде Δs и длина хорды Δr будут все меньше отличаться: $\mathrm{d}s = \Delta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}r$.

1.3. Скорость

Скорость (от лат. *velocitas*) – это *векторная* величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

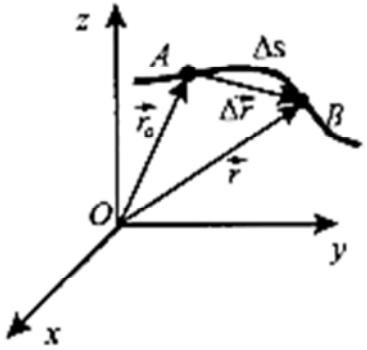


Рис. 1.5. К определению скорости

При движении вдоль одной оси x, если точка переместилась из точки с координатой x в точку с координатой $x+\Delta x$ за время Δt, то средняя скорость:

$$< v_x >= \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Размерность скорости – $\frac{м}{с}$.

Мгновенная скорость при движении вдоль одной оси x – *это предел отношения приращения координаты к длительности промежутка времени* Δt, *за которое оно произошло, если* $\Delta t \to 0$:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.4)$$

Эту величину называют производной от координаты по времени. В математике данную производную часто обозначают:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \qquad (1.5)$$

Для краткости производную по времени обозначают и так: $v_x = \dot{x}$.

Мгновенная скорость равна производной от координаты по времени.

Производная имеет следующий геометрический смысл. Она численно равна тангенсу угла α, который образует касательная, проведенная в данной точке M траектории к графику функции (в нашем случае функции $x(t)$) с осью аргументов (рис. 1.6).

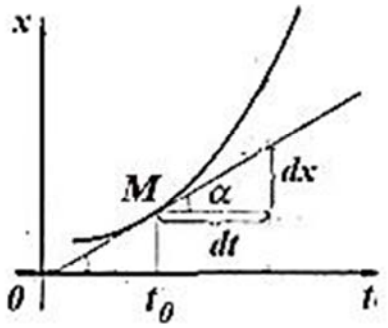


Рис. 1.6. К определению производной и дифференциала

Данный тангенс, равный $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, уже не является безразмерной величиной. Величина $\mathrm{d}x = v \cdot \mathrm{d}t$ называется дифференциалом функции. В данном случае $\mathrm{d}x$ – дифференциал координаты x. Это линейная часть приращения координаты – приращение координаты при условии, что скорость останется такой же, какой она была в точке M в момент времени t_0.

Аналогично, при движении вдоль осей y и z:

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}; \quad v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}.$$

При трехмерном движении вектором мгновенной скорости $\vec{v}$ называется:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \dot{x}_x \vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \qquad (1.6)$$

Это производная от радиус-вектора по времени.

Длина (модуль) вектора мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.7)$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ образует углы α, β и γ с координатными осями x, y и z, определяемые следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \qquad (1.8)$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}; \tag{1.9}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}. \tag{1.10}$$

Углы α, β и γ не являются независимыми друг от друга, а, как следует из (1.6)–(1.8), удовлетворяют равенству:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.11}$$

Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории.

Для нахождения координаты по заданной зависимости скорости от времени перепишем формулу (1.5) так:

$$\mathrm{d}x = v_x(t)\mathrm{d}t.$$

Так как мгновенная скорость $v_x(t)$ является производной функции $x(t)$, определяющей закон движения материальной точки по оси Ox, то задача сводится к разысканию по данной функции $v_x(t)$ такой функции $x(t)$, производная которой $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ равна $v_x(t)$. В математике такую функцию (в нашем случае это $x(t)$) называют неопределенным интегралом от функции $v_x(t)$:

$$x(t) = \int v_x(t)\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Аналогично в случае трехмерного движения

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \vec{i}\int v_x(t)\mathrm{d}t + \vec{j}\int v_y(t)\mathrm{d}t + \vec{k}\int v_z(t)\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

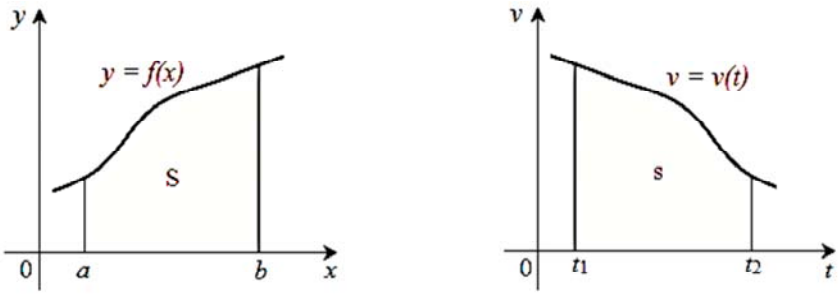
Длина пути s, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, если скорость не изменяла знака, задается определенным интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t. \tag{1.14}$$

В математике подобное выражение называется определенным интегралом от скорости от момента времени t_1 до момента времени t_2. В общем случае геометрическим смыслом определенного интеграла является площадь S между графиком функции $y = f(x)$ и осью аргумента x (рис. 1.7, *а*). На рис. 1.7, *б* площадь S равна пути, пройденному материальной точкой, от момента времени t_1 до момента t_2, если ее скорость изменяется по закону $v = v(t)$.

Согласно формуле Ньютона–Лейбница, величина определенного интеграла равна разности первообразной функции на ее верхнем и нижнем пределах. Например, если $x(t)$ – первообразная функция для $v(t)$, то данный определенный интеграл записывается так:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t = x(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = x(t_2) - x(t_1). \tag{1.15}$$



а *б*

Рис. 1.7. Геометрический смысл определенного интеграла (*а*) и пути (*б*)

В случае, если скорость изменяла знак, необходимо разбить траекторию на участки, на которых скорость не изменяла знак, для каждого участка вычислить соответствующий интеграл, и сложить модули этих интегралов.

Если модуль скорости увеличивается с течением времени, то движение называется ***ускоренным***, если же он убывает с течением времени, то движение называется ***замедленным***.

1.4. Ускорение

Ускорение a (от лат. *acceleratio*) – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

При движении вдоль одной оси *x* средним ускорением называют отношение изменения скорости Δv_x к длительности промежутка времени, за которое это изменение произошло:

$$< a_x >= \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Мгновенным ускорением при одномерном движении называют предел последнего отношения при $\Delta t \to 0$, т. е. производную от v_x по времени:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x. \qquad (1.16)$$

Размерность ускорения – $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Так как $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, то a_x равно производной от производной от координаты по времени. Эта величина называется производной второго порядка от координаты по времени и обозначается иначе так:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}. \qquad (1.17)$$

Таким образом,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}. \qquad (1.18)$$

Аналогично, при движении вдоль осей y и z:

$$a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y}. \qquad (1.18, а)$$

$$a_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z}. \qquad (1.18, б)$$

При трехмерном движении вектором мгновенного ускорения $\vec{a}$ называется:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (1.19)$$

или

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}. \qquad (1.20)$$

Это производная от вектора скорости по времени или производная второго порядка от радиус-вектора по времени.

Длина (модуль) вектора мгновенного ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1.21)$$

Вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ образует углы α, β и γ с координатными осями x, y и z, определяемые следующим образом:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad (1.22)$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \tag{1.23}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \tag{1.24}$$

И в данном случае углы α, β и γ не являются независимыми друг от друга, а, как следует из (1.22)–(1.24), удовлетворяют равенству (1.11).

Из (1.16) следует формула для скорости:

$$v_x(t) = \int a_x(t)\mathrm{d}t.$$

В общем случае плоского (двумерного) криволинейного движения вектор ускорения удобно представить в виде *суммы двух взаимно перпендикулярных составляющих* (рис. 1.8, *а*):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \tag{1.25}$$

Тангенциальное (касательное) ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по модулю (рис. 1.8, *а*), его величина:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1.26}$$

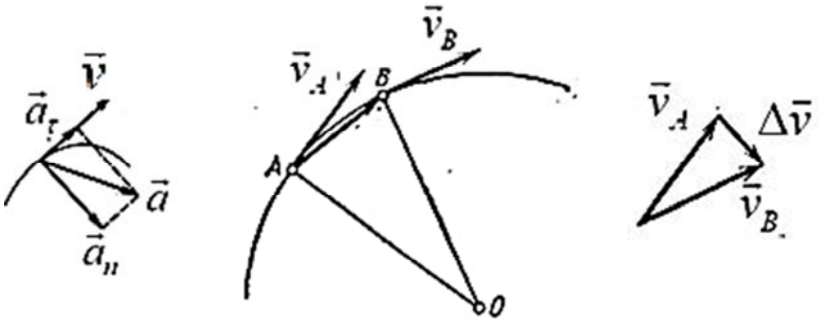
Ускорение $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением скорости, если она растет, и противоположно скорости, если она падает.

Нормальное (центростремительное) ускорение $\vec{a}_n$ (рис. 1.8, *а*) направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны *О* и характеризует, как *быстро изменяется направление* вектора скорости точки. Небольшой участок кривой можно представить как дугу окружности некоторого радиуса. Центр этой окружности называют центром кривизны. Его положение и радиус кривизны могут изменяться. На рис 1.8, *б* представлены скорости точки, движущейся по

окружности радиусом R с постоянной по модулю скоростью v. Для удобства расчетов вектора скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в точках A и B перемещены параллельно самим себе и сведены к общему началу (рис. 1.8, *в*). Угол между радиусами OA и OB и угол между векторами $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ равны, так как $\vec{v}_A \perp OA$, а $\vec{v}_B \perp OB$. Если этот угол α мал, то $\cup AB = AB = v\Delta t$, где Δt – время движения от точки A к точке B.

Из рис. 1.8, *б* следует, что $\alpha = \dfrac{AB}{R} = \dfrac{v \cdot \Delta t}{R}$, а из рис 1.8, *в* получаем, что $\alpha = \dfrac{\Delta v}{v}$. Приравнивая правые части последних равенств, получим: $\dfrac{v \cdot \Delta t}{R} = \dfrac{\Delta v}{v}$, откуда следует $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v^2}{R}$.

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (1.27)$$



а *б* *в*

Рис. 1.8. Тангенциальное и нормальное ускорения (*а*);
к расчету нормального ускорения (*б*, *в*)

Рассмотрим ускорения при различных видах движения.

1. *Прямолинейное равномерное движение:* $\vec{a}_n = 0 \quad (R \to \infty)$; $\vec{a}_\tau = 0$; $\vec{a} = 0$.

2. *Прямолинейное равноускоренное движение* $\vec{a}_\tau = \vec{a} = \overrightarrow{\text{const}}$.

Если $t_0 = 0$, то $a_\tau = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} = \dfrac{v - v_0}{t}$; $v = v_0 + at$;

$$x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

3. *Равномерное движение по окружности* $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const} = \dfrac{v^2}{R}$.

4. *Криволинейное движение* в общем случае $\vec{a}_n \neq 0$; $\vec{a}_\tau \neq 0$.

1.5. Кинематика вращательного движения

При описании вращательного движения удобно пользоваться ***полярными координатами*** R и φ, где R – ***радиус*** – расстояние от полюса (центра вращения) до материальной точки, а φ – полярный ***угол*** (угол поворота, рис. 1.9).

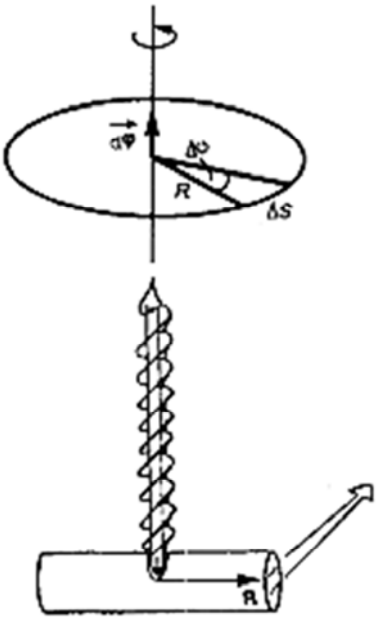


Рис. 1.9. К определению угловой скорости

Угол элементарных поворотов (обозначаются $\Delta\vec{\varphi}$ или $\mathrm{d}\vec{\varphi}$) можно рассматривать как ***вектор***. Его направление совпадает с направлением перемещения правого буравчика при повороте в том же направлении (рис. 1.9).

Векторы, направления которых определяются с направлением вращения, называются аксиальными векторами (или псевдовекторами). Угол элементарных поворотов относится к таким векторам. К подобным векторам относятся вектора угловой скорости, углового ускорения, момента силы, момента импульса и многие другие вектора.

Угловая скорость:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}. \qquad (1.28)$$

Как видно, угловая скорость есть производная от угла поворота по времени. Вектор $\vec{\omega}$ ***направлен*** вдоль оси вращения по правилу правого винта, так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$, и является также аксиальным вектором.

Единица угловой скорости – рад/с.

Из (1.28) следует, что

$$\varphi(t) = \int \omega(t)dt.$$

Угловое ускорение:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \qquad (1.29)$$

Как видно, угловое ускорение есть производная от угловой скорости по времени, или вторая производная от угла поворота по времени.

Вектор $\vec{\beta}$ направлен вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости. При *ускоренном* вращении вектор $\vec{\beta}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$, при *замедленном* – противоположен направлению $\vec{\omega}$.

Единица углового ускорения – рад/с^2.

Линейная скорость точки связана с угловой скоростью и радиусом траектории соотношением:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega.$$

Как векторная величина, $\vec{v}$ определяется в общем случае с помощью векторного произведения.

Познакомимся вначале с векторным произведением векторов.

Векторное произведение $\left[\vec{A}, \vec{B}\right]$ двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – это вектор $\vec{C} = \left[\vec{A}, \vec{B}\right]$, определяемый следующим образом (рис. 1.10). Он перпендикулярен обоим перемножаемым векторам (или перпендикулярен плоскости, в которой лежат оба перемножаемых вектора

$\vec{A}$ и $\vec{B}$), и направлен в ту сторону, в которую будет двигаться правый буравчик, если его поворачивать от первого вектора $\vec{A}$ к вектору $\vec{B}$ по кратчайшему пути. Модуль вектора $\vec{C}$ равен произведению модулей векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ на синус угла φ между ними:

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \sin\varphi. \qquad (1.30)$$

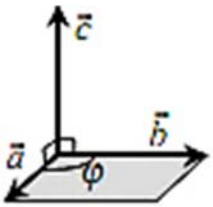


Рис. 1.10. Векторное произведение векторов

Так как поворот осуществляется по кратчайшему пути, то независимо от направления вращения угол $\varphi \le \pi$, и всегда выполняется условие $\sin\varphi \ge 0$. Векторное произведение по-другому обозначают как $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Как видно, векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ образуют ***правую тройку векторов*** (рис. 1.10).

В декартовой системе векторное произведение $\left[\vec{A}, \vec{B}\right]$ двух векторов $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ и $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ определяется следующим образом:

$$\left[\vec{A}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}\,(A_xB_y - A_yB_x). \qquad (1.31)$$

При изменении порядка перемножаемых векторов буравчик надо поворачивать от вектора $\vec{B}$ к вектору $\vec{A}$, при этом он будет перемещаться в направлении, противоположном первоначальному. Поэтому $\left[\vec{B}, \vec{A}\right] = -\left[\vec{A}, \vec{B}\right]$, т. е. векторное произведение антикоммутативно.

Если векторно перемножаемые вектора параллельны $(\varphi = 0)$ или антипараллельны $(\varphi = \pi)$, то $\sin\varphi = 0$, и векторное произведение равно нулю.

В векторном виде формулу для линейной скорости материальной точки можно написать, как ***векторное произведение***:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]. \qquad (1.32)$$

Здесь $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\vec{r}$ – радиус-вектор вращающейся точки относительно любой точки на оси вращения. При движении точки по окружности постоянного радиуса конец вектора $\vec{r}$ описывает эту окружность (рис. 1.11). Так как согласно формуле (1.30):

$$\left|\vec{v}\right| = v = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{r}\right| \sin\alpha = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha,$$

а $r \cdot \sin\alpha = R$, где R – радиус вращения, то получаем известную формулу:

$$v = \omega \cdot R.$$

Как видно, величина v не зависит от положения точки O, в которой находится начало вектора $\vec{\omega}$.

Предположим, вращение происходит относительно оси z по окружности.

При равномерном вращении: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \text{const}$, следовательно $\varphi = \omega t$.

Равномерное вращение можно характеризовать ***периодом вращения*** T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, $2\pi = \omega T$.

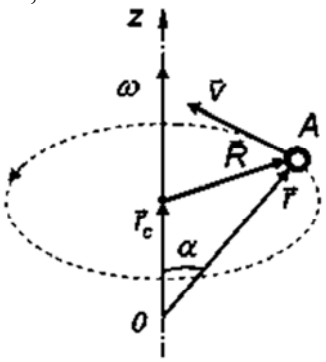


Рис. 1.11. Ориентация векторов угловой и линейной скорости

Частота вращения – число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Единица частоты вращения – **герц (Гц)**.

Из (1.29) следует, что

$$\omega(t) = \int \beta(t)\mathrm{d}t.$$

При равноускоренном вращательном движении $\beta = \text{const}$:

$$\omega = \omega_0 + \beta t; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{dt} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \beta R;$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \omega R\mathrm{d}t = R\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = R\varphi.$$

Вопросы к главе 1

1. Что называется материальной точкой?
2. Что такое система отсчета?
3. Что такое вектор перемещения?
4. Какое движение называют поступательным, вращательным?
5. Что такое средняя скорость?
6. Что такое мгновенная скорость, мгновенное ускорение? Как они направлены?
7. Что характеризуют тангенциальное и нормальное ускорения? Как они направлены?
8. При каких движениях отсутствует нормальное ускорение, тангенциальное ускорение?
9. Что такое угловая скорость, угловое ускорение? Как они направлены?
10. Что такое векторное произведение?
11. Назовите, как связаны линейные и угловые величины.

2. ДИНАМИКА

2.1. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

Траектория движения тела оказывается разной в разных системах отсчета, в которых это движение рассматривается. Так, если в вагоне движущегося поезда уронить теннисный мяч, то относительно находящегося в вагоне наблюдателя он будет падать вниз по прямой. Относительно наблюдателя, находящегося на перроне, траекторией будет парабола.

Существуют системы отсчета (СО), в которых законы движения тел оказываются наиболее простыми. В частности, если не тело не действуют другие тела, оно движется прямолинейно и равномерно или сохраняет состояние покоя.

Подобные системы отсчета называются *инерциальными* (ИСО). Их существует бесконечное множество, так как любая СО, которая движется прямолинейно и равномерно относительно некоторой ИСО, сама является ИСО.

Опытным путем установлено, что ИСО является СО с центром, находящимся в центре Солнца, а ее координатные оси направлены на неподвижные звезды. СО, связанная с Землей, не является строго инерциальной из-за суточного вращения вокруг оси и вращения относительно Солнца. Однако отклонения от ИСО, вносимые данными движениями, незначительны, и во многих случаях Землю можно считать ИСО. И законы механики с достаточно большой степенью точности выполняются и СО, связанной с Землей, хотя в СО, связанной с Солнцем, они, конечно, выполняются еще с большей точностью.

Положение о существовании ИСО и является первым законом Ньютона. Он формулируется следующим образом. *Существуют СО, в которых тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку действие других тел не вынудит его изменить это состояние*.

Свойство тел сохранять скорость неизменной, (равной, в частности, нулю), если на них не действуют другие тела, называют инертностью, или противодействием изменению скорости. Поэтому равномерное прямолинейное движение называют движением по инерции, а первый закон Ньютона – законом инерции.

Кажущийся нам очевидным, этот закон не всегда был таковым. До Галилея считалось, что внешнее воздействие определяет скорость, а не ее изменение. Причиной этого ошибочного утверждения было то, что при рассмотрении движений не принимались во внимание силы, препятствующие движению (силы трения, силы сопротивления среды).

2.2. Масса. Сила. Импульс

Масса является количественной мерой инертности тела. Численное значение массы можно определить, сравнивая ее с эталонной массой, принятой за единицу. В системе СИ единицей массы является килограмм (кг). Международный прототип (эталон) килограмма хранится в Международном бюро мер и весов (расположено в Севре близ Парижа). Он представляет собой цилиндр диаметром и высотой 39,17 мм из сплава платины и иридия (90 % платины, 10 % иридия).

XXVI Генеральная конференция по мерам и весам 13–16 ноября 2018 г. одобрила новое определение килограмма, основанное на фиксации численного значения постоянной Планка.

Кроме того, масса характеризует гравитационные свойства тел. При этом с высокой степенью точности установлено, что значение массы, фигурирующие в законах механики (инерционная масса) совпадает со значением, фигурирующем в законе всемирного тяготения (гравитационная масса).

Массу тела можно определить статическим способом. Он основан на статическом действии силы тяжести, которая прямо пропорциональна массе. На практике производится взвешивание на пружинных весах. При этом вес тела, в точности равный его силе тяжести в состоянии покоя $(\vec{a} = 0)$, уравновешивается упругой силой, возникающей в растянутой пружине.

Сравнивая деформации пружины под действием эталонной массы и исследуемой, можно определить величину последней.

Масса не является постоянной величиной, а, как установлено в специальной теории относительности, зависит от скорости v:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \qquad (2.1)$$

Здесь c – скорость света в вакууме, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, m_0 – масса покоя. В нерелятивистской механике, когда $v << c$, мы будем считать, что $m = m_0$.

Сила является количественной мерой действий тел друг на друга, в результате чего они изменяют скорости движения, т. е. приобретают ускорения.

Статически силы проявляются в том, что тела, на которые они действуют, хотя и не приобретают ускорения, но определенным образом изменяют свои форму и размеры, т. е. деформируются. В результате они воздействуют на другие тела, удерживающие их от движения с определенными силами (силы натяжения нитей, силы давления и т. п.).

Динамическое проявление сил заключается в сообщении телам, на которые они действуют, ускорений. На этом проявлении можно было бы осуществить динамический способ измерения сил, сравнивая ускорения, сообщаемые телу различными силами. Однако на практике данный способ, как правило, не применяется, так как измерения ускорений связаны с определенными неудобствами.

Эталон силы удобно осуществить, используя статическое проявление сил. Например, в качестве эталона силы можно использовать упругую силу, возникающую в определенной пружине, растянутой под действием силы на определенную величину. Опытным путем установлено, что при малых деформациях пружины упругая сила пропорциональна величине деформации растяжения. Поэтому пружину можно проградуировать, и по величине растяжения определять измеряемые силы.

В случае одновременного действия на тело нескольких сил их результирующая определяется по правилу сложения векторов.

В физике важную роль играет введенная Ньютоном величина

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (2.2)$$

называемая импульсом тела (старое название – количество движения). Размерность импульса – кг · м/с. Как следует из (2.2), векторы $\vec{p}$ и $\vec{v}$ параллельны. В нерелятивистской механике, как отмечалось выше, под m мы будем понимать массу покоя тела.

2.3. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона формулируется так: ускорение, приобретенное телом, прямо пропорционально равнодействующей сил, действующей на него, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{2.3}$$

В данной формулировке предполагается, что масса тела постоянна. Однако она может изменяться в процессе движения тала, например у взлетающей ракеты. Согласно формуле (1.6), последнее равенство можно представить в виде:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Если масса изменяется в процессе движения, это можно учесть, внеся ее под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

или с учетом формулы (2.2):

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

Это и есть общая формулировка второго закона Ньютона: *производная по времени от импульса тела равна действующей на него результирующей силе и совпадает с ней по направлению*.

Из формулы (2.3) следует, что если $\vec{F} = 0,$ то $\vec{a} = 0,$ т. е. в таком случае тело движется прямолинейно и равномерно или покоится. Однако это не означает, что первый закон Ньютона является частным случаем второго, так как в нем утверждается существование ИСО.

Из формулы (2.4) следует, что

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}.$$

Величина $\vec{F}\mathrm{d}t$ называется импульсом силы.

Учитывая формулу (1.20), можно записать:

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}. \tag{2.5}$$

Если спроектировать уравнение (2.5) на координатные оси декартовой системы, получим три скалярных уравнения, называемые уравнениями движения:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \tag{2.6}$$

Они эквивалентны векторному уравнению (2.5).

2.4. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона отвечает на вопрос, откуда исходят силы, действующие на то или иное тело. Эти силы возникают только в результате действия тел друг на друга. Данное действие всегда носит характер взаимодействия: если тело *A* действует с некоторой силой на тело *B*, то и тело *B* действует на тело *A* с такой же по величине силой. Третий закон Ньютона и устанавливает соотношение между силами взаимодействия тел: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению.

Если $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первое тело со стороны второго, а $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на второе тело со стороны первого, то

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.7}$$

Так как силы $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ приложены к различным телам, то они не уравновешивают друг друга. Как видно, они направлены противоположно друг другу, поэтому при взаимодействии двух тел эти тела не могут получить скорости в одном направлении. Данный закон соблюдается как при покое взаимодействующих тел, так и при их движении.

Три закона Ньютона выполняются в ИСО. В НИСО третий закон не выполняется. Отступление от него возникают и при движении со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме. Мы не будем рассматривать подобные ситуации.

2.5. Виды сил

В природе действуют 4 вида фундаментальных сил:

1. Гравитационные.
2. Электромагнитные.
3. Силы сильного взаимодействия. Они связывают частицы, входящие в состав ядер, в устойчивую систему.
4. Силы слабого взаимодействия. Они проявляются при распаде ядер.

Упругие силы не являются фундаментальными, а относятся к электромагнитным.

Центростремительная сила также не является фундаментальной. Она может быть гравитационной, например, при движении спутников вокруг Земли, или равнодействующей силы тяжести и силы реакции рельс при движении вагона по закруглению железнодорожного полотна.

2.6. Сила тяжести. Вес. Перегрузки. Невесомость

Вблизи поверхности Земли все тела падают на нее с одинаковым ускорением, которое называют ускорением свободного падения и обозначают как g. Галилей доказал это и для легких перьев птиц, поместив их в вакуум, где отсутствовали силы сопротивления.

Данный факт означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует сила тяжести:

$$\vec{P} = m\vec{g}. \tag{2.8}$$

Она незначительно отличается от силы гравитационного притяжения тела к Земле. Отличие максимально на экваторе и составляет 0,36 % (более подробно данный вопрос будет рассмотрен ниже при изучении неинерциальных систем отсчета). Поэтому в первом приближении эти силы можно считать равными. Тело покоится относительно Земли, если его подвесить на нити или положить на горизонтальную площадку. В первом случае сила тяжести уравновешена силой натяжения нити, а во втором – силой реакции со стороны поверхности. Эти силы $\vec{N}$ называют *реакциями* подвеса или опоры. *Реакциями* называют силы, с которыми на данное тело действуют другие тела, ограничивающие его движение.

Согласно третьему закону Ньютона, тело действует на подвес или опору с силой $\vec{G},$ которую называют весом тела. Так как силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$ уравновешивают друг друга, то $\vec{P}+\vec{N}=0,$ или $\vec{P}=-\vec{N}.$ Согласно третьему закону Ньютона, $\vec{G}=-\vec{N}.$ Из двух последних равенств следует, что

$$\vec{G}=\vec{P}=m\vec{g}. \tag{2.9}$$

Следует иметь в виду, что хотя сила тяжести равна весу, эти силы приложены к разным телам.

Соотношение (2.9) между массой и весом тела лежит в основе способа определения массы тела путем взвешивания. Если весы уравновешены, то тела, лежащие на чашах, действуют на них с равными силами, и поэтому имеют одинаковые массы.

Равенство (2.9) выполняется только, если тело и опора (или подвес) неподвижны относительно Земли или движутся без ускорения. Если же подвес прикреплен к потолку кабины, которая движется с ускорением $\vec{a},$ то с таким же ускорением будет двигаться и подвешенное на опоре тело, и согласно 2-му закону Ньютона.

$$m\vec{a}=\vec{P}+\vec{N}=\vec{P}-\vec{G}=m\vec{g}-G,$$

откуда следует

$$\vec{G}=\vec{P}-m\vec{a}=m(\vec{g}-\vec{a}). \tag{2.10}$$

Пусть ускорение $\vec{a}$ направлено вверх (т. е. против $\vec{g}$). Тогда проектируя (2.10) на направленную вниз ось, получим, что $G = mg + ma$. В данном случае вес больше силы тяжести. Увеличение веса, обусловленное ускоренным движением тела, называют *перегрузкой.* Подобное кратковременное состояние испытывают пассажиры лифта при начале его движения вверх или при остановке лифта, спускающегося вниз. Под величиной перегрузки n понимают отношение:

$$n = \frac{G}{mg}.$$

Картина такова, как будто бы сила тяготения Земли увеличилась в $n = \frac{g+a}{g}$ раз. Соответственно возрастают как деформации, вызванные возросшей силой тяжести, так и силы, с которыми действуют друг на друга деформированные тела или части деформированных тел.

Если же направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{g}$ совпадают, то $G = mg - ma$, т. е. вес меньше силы тяжести. Это так называемая частичная невесомость. Подобное кратковременное состояние испытывают пассажиры лифта при остановке его движения вверх или при начале движения лифта, спускающегося вниз.

При движении кабины с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ вниз, т. е. при свободном падении, из (2.9) следует, что $\vec{G} = 0$. Это состояние невесомости. Если у космического корабля, находящегося на орбите, не работает двигатель, то он движется подобно падающему вниз лифту.

В подобном состоянии тела не оказывают никакого действия на соприкасающиеся с ними другие тела, что испытывают космонавты. Внутренние органы космонавта не давят на нижерасположенные органы и все тело перестает давить на кости.

Состояние невесомости связано с тем, что гравитационное поле сообщает одинаковое ускорение как телу, так и опоре (или подвесу) либо тело теряет контакт с опорой или подвесом. Так, всякое тело, которое движется только под действием сил всемирного тяготения, также находится в состоянии невесомости. Например, спортсмены, прыгающие в длину или высоту, в течение всего вре-

мени, когда их ноги не касаются поверхности Земли, находятся в состоянии невесомости.

Невесомость может влиять на многие физические явления. Так, в условиях невесомости непригодны устройства и приборы, в которых используются физические маятники или свободная подача жидкости. В обычных условиях у жидкости, налитой в сосуд, силы межмолекулярного взаимодействия малы по сравнению с силами давления, обусловленными весомостью жидкости. При этом межмолекулярные силы влияют лишь на форму мениска. В условиях невесомости силы давления исчезают вместе с весом и межмолекулярные силы остаются единственными. Смачивающая жидкость в закрытом сосуде равномерно распределяется по его стенкам, а воздух, если он имеется, находится в центральной части сосуда. Не смачивающая жидкость принимает форму шара. В условиях невесомости не может гореть свеча, так как не возникает конвекционный поток более нагретого углекислого газа и дыма вверх, свеча постепенно обволакивается дымом и прекращается доступ кислорода. Для длительного пребывания в состоянии невесомости человека необходимы предварительные специальные тренировки, так как исчезают нагрузки на опорно-двигательную систему.

2.7. Упругие силы. Деформации. Закон Гука

Деформацией называют изменение формы и размеров тел под действием приложенной внешней силы. Упругими называют деформации, при которых тело восстанавливает форму и размеры после прекращения действия внешних сил.

Упругими силами называют силы, возникающие в теле при его упругих деформациях и направленные в сторону, противоположную смещению частиц тела при деформации. Такие силы действуют в любом сечении деформированного тела также в месте контакта этого тела с другим телом, вызывающим деформации. Силы упругости перпендикулярны поверхности соприкосновения. Если во взаимодействии участвуют нити или пружины, силы упругости направлены вдоль их осей. При отсутствии ускорения силы упругости уравновешивают внешние.

Если ускорение деформированного тела равно нулю, то упругие силы одинаковы в любом сечении тела.

Экспериментально был установлен закон Гука: в пределах упругости удлинение (или укорочение) тела x прямо пропорционально действующей внешней силе $F_{\text{внеш}}$.

$$x = \frac{F_{\text{внеш}}}{k}. \tag{2.11}$$

Смещение тела (в виде пружины или стержня) происходит в том же направлении, что и направление $\vec{F}_{\text{внеш}}$, поэтому знаки x и $F_{\text{внеш}}$ совпадают. Величина k называется *жесткостью* пружины или стержня. Ее размерность – Н/метр.

Согласно 3-му закону Ньютона, упругая сила $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{внеш}}$, поэтому

$$x = -\frac{F_{\text{упр}x}}{k}.$$

Опуская индекс *упр*, для проекции силы упругости на ось x, вдоль которой действует внешняя сила, получим:

$$F_x = -kx. \tag{2.12}$$

Жесткость пружины или стержня зависит прежде всего от материала и размера. Если деформированную пружину мысленно разделить на 2 равные части, то в каждой из них будет действовать прежняя сила упругости, но удлинение каждой половины будет в 2 раза меньше. Поэтому, согласно формуле (2.11), жесткость половинной пружины будет в 2 раза больше.

Для стержня закон Гука можно выразить через величины, характеризующие его размеры и свойство материала, из которого он изготовлен. Упругие силы, действующие перпендикулярно оси, характеризуются механическим напряжением:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{2.13}$$

Размерность σ – это Ньютон/м^2 или Паскаль (Па). Относительное удлинение стержня $\varepsilon = \Delta l / l_0$ связано с σ соотношением:

$$\varepsilon = \sigma / E. \qquad (2.14)$$

Здесь Δl – удлинение, l_0 – исходная длина стержня, E – модуль Юнга, величина, характеризующая упругие свойства материала стержня, ее размерность совпадает с размерностью механического напряжения. Равенство (2.14) можно представить так:

$$\Delta l / l_0 = \sigma / E. \qquad (2.15)$$

Из него видно, что величина E численно равна механическому напряжению, при котором $\Delta l = l_0$, т. е. длина стержня увеличивается в 2 раза. В реальности такие напряжения выдерживают только эластичные материалы. Обычные материалы разрушаются уже при величине σ, равной нескольким тысячным E (например, для железа эта величина составляет 0,002 E).

Равенство (2.15) можно представит так: $\Delta l / l_0 = F / (SE)$ или $F = \Delta l SE / l_0$. Сравнивая данное выражение с (2.12), получим, что для стержня:

$$k = SE / l_0. \qquad (2.16)$$

При растяжении или сжатии изменяются поперечные сечения стержней.

Зависимость напряжений σ в твердом теле от относительной деформации ε называется диаграммой его растяжения. Типичная подобная диаграмма представлена на рис. 2.1. Закон Гука выполняется до значения $\sigma = \sigma_{\text{п}}$, называемого напряжением пропорциональности (точка *A*). Упругие деформации имеют место вплоть до $\sigma = \sigma_{\text{уп}}$ (точка *B*; различие между $\sigma_{\text{уп}}$ и $\sigma_{\text{п}}$ не превышает нескольких сотых процента).

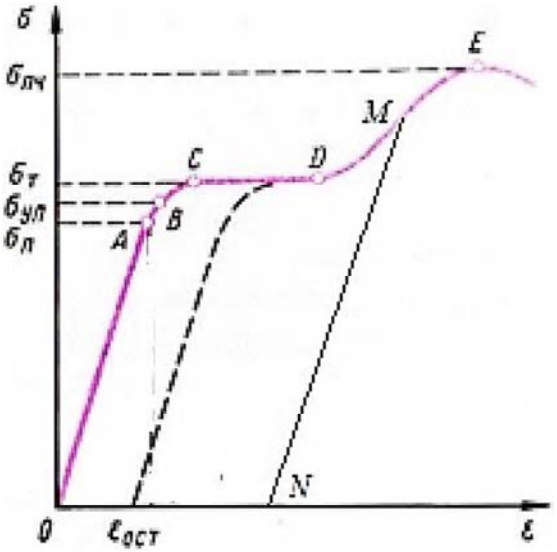


Рис. 2.1. Диаграмма растяжения материала

При приложении нагрузки до точки *B* и последующем снятии ее тело вернется в исходное состояние по линии *BA*. При $\sigma > \sigma_{уп}$ деформации становятся пластическими, а изменения в образце становятся необратимыми, и тело уже не вернется в исходное состояние (в точку *O*) при снятии нагрузки. В точке *C* начинается явление текучести, напряжение $\sigma_т$ в этой точке называется пределом текучести. Образец удлиняется и сужается, хотя при этом напряжение практически не изменяется. Текучесть продолжается до точки *D*, в которой начинается зона упрочнения. Материалы, у которых область *CD* значительна, называют пластичными (алюминий, золото). У хрупких материалов область *CD* практически отсутствует (стекло, чугун, кирпич).

В зоне упрочнения удлинение образца происходит уже при увеличении нагрузки, но оно заметно медленнее, чем на участке линейного роста *OA*. Если снять нагрузку на этом участке в точке *M*, то процесс разгрузки характеризуется прямой *MN*, параллельной *OA*. Конечно, теперь при отсутствии нагрузки сохраняется остаточная деформация. Повторная нагрузка описывается прямой *NM.* Даже при

напряжениях, заметно превышающих $\sigma_т$, образец сохраняет упругие свойства. Предел пропорциональности значительно увеличивается – он достигает того значения напряжения, с которого начался процесс разгрузки. Материал приобретает способность выдерживать нагрузки заметно большей величины, т. е. упрочняется. Это явление называют *наклепом*. Наклеп используется для упрочнения поверхностей деталей (отбивание кос, прокат металла и т. д.). Для этого используют различные виды пластической поверхностной деформации (обкатка роликами, дробеструйная обработка и др.).

Правда, наклеп ослабляет пластические свойства материала, делая его более хрупким. Чтобы это не имело место при пробивании отверстий в металлических деталях, например, диаметр пробойника делают несколько меньшего диаметра, чем нужно, а затем досверливают отверстие до нужного диаметра, при этом наклепа уже не происходит. Для снятия наклепа также используют отжиг – нагрев при определенной температуре.

Зона упрочнения заканчивается в точке *E*, напряжение в которой называют пределом прочности. Это наибольшее напряжение, которое может выдержать материал без разрушения. В этой точке в части образца толщина уменьшается, образуется так называемая «шейка», обусловленная изменением структуры материала (образованием пустот, микротрещин и т. п.). После этой точки кривая идет вниз, дальнейшая деформация до разрыва происходит при уменьшении напряжения.

Предположим, имеется куб с ребрами, равными *a*. Закрепим его нижнюю грань (рис. 2.2), а к ребру *AB* приложим силу, параллельную верхней грани (так называемое касательное усилие). В результате возникнет деформация *сдвига*, куб превращается в параллелепипед. Сдвиг характеризуется относительным сдвигом $\gamma = \mathrm{tg}\alpha = \Delta l / a$.

При упругих деформациях угол α очень мал, поэтому оказывается:

$$\gamma = \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha. \qquad (2.17)$$

Угол α измеряется в радианах. В каждой точке куба возникает тангенциальное (касательное) упругое напряжение

$$\tau = F / S, \tag{2.18}$$

где S – площадь верхней грани.

Из опыта следует, что

$$\gamma = \tau / G, \tag{2.19}$$

где G – модуль сдвига. Он численно равен касательному напряжению, при котором угол α был бы равен 45^{o}, если бы подобные деформации были возможны.

Кручение – деформация стержня, вала и др., при которой относительно центральной оси происходит взаимный поворот друг относительно друг друга слоев, перпендикулярных данной оси, под действием сил, приложенных к концам стержня. Это иллюстрирует рис. 2.3, на котором изображен цилиндр, левое основание которого закреплено, а к правому приложена пара сил.

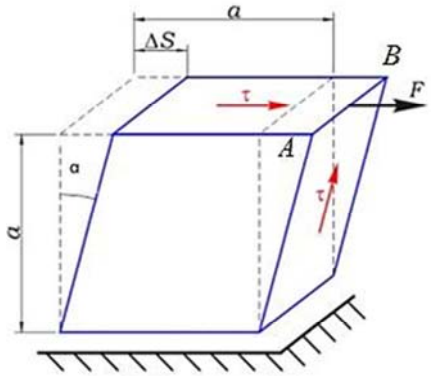


Рис. 2.2. Деформация сдвига

Деформацию кручения испытывают болты, винты, отвертки, валы и оси, на которых размещены шкивы, пружины или другие вращающиеся детали, все тела, передающие вращающий момент от двигателя к машине.

Если первоначально образующая цилиндра ad (рис. 2.3) была параллельна главной оси, то после приложения пары сил $\vec{F}_1 \vec{F}_2$ к правому торцу, она повернется на угол γ и установится в положение ad'. В этом положении момент, создаваемого возникшими силами упругости, уравновешивает момент внешних сил.

При этом тонкий слой, примыкающий к правому торцу, повернулся вместе с радиусом на угол φ. Для тонких слоев внутри цилиндра угол поворота будет равен $\varphi \cdot x / l$, где x – расстояние от данного слоя до левого торца, l – высота цилиндра.

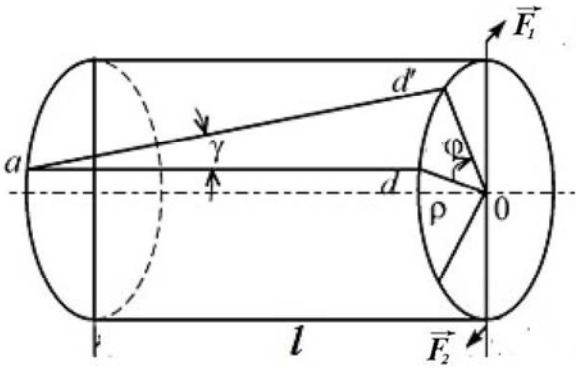


Рис. 2.3. Деформация кручения

Экспериментально установлено, что момент внешних сил M прямо пропорционален углу поворота незакрепленного торца:

$$M = D\varphi, \tag{2.20}$$

где D – коэффициент, называемый модулем кручения. Он зависит от материала, радиуса и длины стержня, и модуля сдвига G:

$$D = \frac{\pi G r^4}{2l}. \tag{2.21}$$

Изгиб – вид деформации, при котором происходит изменение кривизны центральной оси тела под действием внешних сил или температуры. Бруса, балки, стержни, рельсы, рычаги, заводные пружины механических часов, пружины часовых отсчетных механизмов, пружины в электромеханических измерительных приборах. Продольные волокна с выпуклой стороны удлиняются, испытывают деформацию растяжения, а с вогнутой стороны укорачиваются, испытывают деформацию сжатия (рис. 2.4).

Волокна срединного слоя сохраняют первоначальную длину и не подвергаются деформации. За меру деформации можно принять смещение середины тела или его конца. Это смещение называют стрелой прогиба.

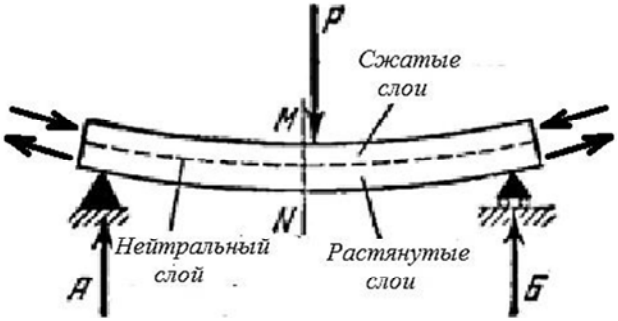


Рис. 2.4. Деформация изгиба

В технике часто используются тавровые и двутавровые балки (рис. 2.5). Примером последних служит рельс. В них удалена часть среднего слоя, который меньше растягивается и сжимается, и поэтому в меньшей степени противодействует изгибу. Это позволяет сэкономить материал и облегчить балку почти без ухудшения строительных качеств. Такая же цель достигается, при применении труб вместо стержней (например, у велосипедной рамы).

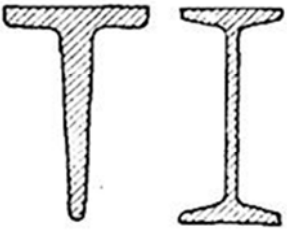


Рис. 2.5. Тавровая (*а*) и двутавровая (*б*) балки

Стрела прогиба балки прямоугольного сечения прямо пропорциональна нагрузке и кубу длины балки и обратно пропорциональна кубу толщины балки и первой степени ее ширины.

2.8. Силы трения

Силы трения – это тангенциальные силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному движению.

Различают трение внешнее и внутреннее. Под внутренним трением (или вязкостью) понимают трение, возникающее при перемещении частей одного и того же тела (обычно это движение слоев жидкости или газа). К внутреннему трению относится также и трение, возникающее при движении твердого тела в жидкости или газе. В этом случае слои среды, прилегающие к поверхности, вовлекают-

ся этим телом в движение с той же скоростью, которую имеет тело, и движущееся тело тормозится прилегающими слоями среды.

Трение, возникающее при соприкосновении поверхностей двух различных тел при их относительном движении или при попытке вызвать это движение, называется внешним трением (сухое трение). Строго говоря, внешнее трение наблюдается только для твердых тел без смазочной прослойки, так как только в этом случае имеется непосредственный контакт двух тел.

Внешнее трение в свою очередь подразделяется на: трение покоя, возникающее до начала движения; трение скольжения, возникающие при движении поверхностей двух соприкасающихся тел; трение качения, возникающее, когда одно тело катится по поверхности другого.

Силы внешнего трения возникают по нескольким причинам. Первой причиной возникновения сил трения является шероховатость поверхности тел. При соприкосновении тел микроскопические выступы на поверхности одного тела зацепляются за такие же выступы другого тела. При этом, если одно из тел движется по поверхности другого, выступы срезаются, для чего необходимо действие некоторой силы. Второй причиной является то, что в точках соприкосновения поверхностей проявляется действие межмолекулярных сил, между молекулами находящимися вблизи поверхности соприкосновения. В частности, вступающие в контакт неровности поверхности образуют «мостики сварки», и сила трения обусловлена сопротивлением разрушению этих мостиков. Третьей причиной является появление несимметричных деформаций (см. силу трения качения).

О существовании сил трения покоя, действующих на соприкасающиеся тела при их относительном покое, свидетельствует такой опытный факт. Для приведения в движение одного из соприкасающихся твердых тел к нему необходимо приложить в направлении движения внешнюю силу, превышающую некоторую определенную величину, характерную для конкретных соприкасающихся тел. Если внешняя сила недостаточно велика, то, несмотря на ее действие, тело остается в покое, так как эта сила уравновесится силой трения покоя.

Пусть некоторое тело покоится на горизонтальной поверхности, и нему приложена внешняя сила $\vec{F}$ (рис. 2.6), на него также действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Так как тело

находится в покое, то согласно 2-му закону Ньютона, векторная сумма всех внешних сил равна нулю, т. е.:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{f}_{\text{тр}} = 0.$$

Взяв проекции этих сил на направление возможного перемещения (вдоль плоскости соприкосновения, ось x), получим:

$$f_{\text{тр}} = F\cos\alpha.$$

Таким образом, сила трения покоя – неоднозначная величина: с изменением внешней силы F соответственно изменяется и сила трения покоя, которая равна горизонтальной составляющей внешней силы. Если на тело внешняя сила F не действует, то сила трения $f_{\text{тр}}$ также равна нулю. Но сила трения покоя может изменять свою величину лишь до некоторого максимального значения $f_{\text{тр. max}}$, и согласно опытному закону Амонтона и Кулона:

$$f_{\text{тр. max}} = \mu' N,$$

где μ' – коэффициент трения покоя. Для рассмотренного на рис. 2.6 примера: $f_{\text{тр. max}} = \mu'(mg - F\sin\alpha)$.

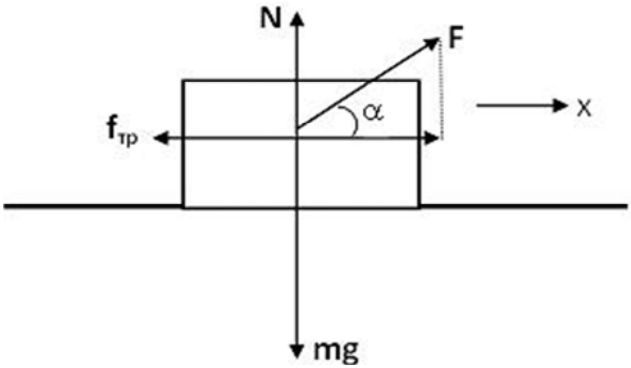
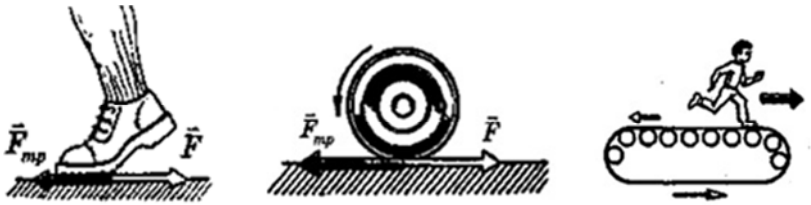


Рис. 2.6. Силы, действующие на покоящееся тело

Вследствие сил трения покоя возникает *явление застоя*. Движение тела по поверхности другого тела начинается не сразу, как только внешняя сила станет отличной от нуля, а когда горизонтальная составляющая внешней силы F окажется по величине больше $f_{\text{тр. max}}$. Это так называемое явление *застоя*. Оно ограничивает чувствительность и точность измерительных приборов с вращающейся подвижной системой. Для устранения явления застоя подвижные детали подвешиваются на упругих нитях.

Сила трения покоя играет важную роль. Именно благодаря ей люди имеют возможность передвигаться. Человек действует на поверхность Земли с силой $\vec{F}$ (рис. 2.7, *а*). Согласно 3-му закону Ньютона Земля действует на ногу человека с силой трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$. Сила тяги мотора, передаваемая на ведущие колеса, заставляет их вращаться (на рис. 2.7, *б* против часовой стрелки). Колеса действуют на Землю с силой $\vec{F}$. Препятствуя проскальзыванию, и возникает сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}} = -\vec{F}$, действующая на ведущие колеса и разгоняющая автомобиль. При этом $\vec{F}_{\text{тр}}$ не совершает работы, так как она проложена в точке, которая неподвижна относительно дороги. При движении автомобиля она исчезает в одной точке и сразу же появляется в соседней.



а *б* *в*

Рис. 2.7. Сила трение покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ при движении человека (*а*), автомобиля (*б*), беге по подвижной дорожке (*в*)

Сила трения покоя может совершать работу, причем как положительную, так и отрицательную. Книге, лежащей на столе поезда, набирающего скорость, сила трения покоя сообщает ту же скорость, что и у поезда, т. е. увеличивает кинетическую энергию

книги, совершая некоторую работу. Однако такая же по модулю, но противоположно направленная сила действует со стороны книги на стол, а значит, и на поезд в целом. Эта сила совершает точно такую же работу, только отрицательную. В результате полная работа двух сил трения равна нулю, и механическая энергия системы тел не изменяется.

При повороте автомобиля составляющая силы трения играет еще и роль центростремительной, так что полная сила трения покоя направленна под острым углом к скорости. При беге по подвижной дорожке (рис. 2.7, *в*) сила трения покоя также является движущей. Именно благодаря силе трения покоя тело, находящееся на ленте транспортера, приобретает скорость движения.

Гвоздь удерживается в доске, куда он забит, благодаря силе трения покоя. Благодаря силам трения покоя передается движение от ведущего шкива к ведомому с помощью ременной передачи.

Опыт показывает, что силы трения скольжения зависят от относительной скорости скольжения. Вначале с возрастанием относительной скорости υ величина сил трения скольжения $f_{тр}$ несколько уменьшается, а затем при дальнейшем возрастании υ, величина сил трения так же медленно начинает возрастать. Возрастание величины сил трения с уменьшением относительной скорости скольжения, после того как она уже стала достаточно малой, проявляется, например, при торможении поездов, трамваев и т. д., поэтому для более плавного уменьшения скорости тел торможение производится с несколькими перерывами. Однако величина сил трения скольжения изменяется с изменением относительной скорости настолько слабо, что часто ее считают не зависящей от относительной скорости.

Величина сил внешнего трения как при скольжении, так и при покое зависит от материалов тел, состояния их соприкасающихся поверхностей (от их шероховатости), а также от величины силы реакции N одного из тел на другое. Влияние указанных факторов на величины сил внешнего трения экспериментально исследовали Амонтон и Кулон. Они установили закон, выполняющийся для сил трения скольжения и для максимальной силы трения покоя. Суть этого закона: величина силы трения скольжения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей и пропорциональна силе реакции опоры:

$$f_{\text{тр}} = \mu N, \tag{2.22}$$

где μ – коэффициент трения скольжения, величина безразмерная, зависит от материалов соприкасающихся тел, состояния их поверхностей, величины относительной скорости. При соприкосновении достаточно гладких поверхностей необходимо учитывать вклад сил межмолекулярного взаимодействия.

На рис. 2.8 представлена зависимость силы трения от внешней силы. В области 0–1 действует сила трения покоя, а в области 1–2 имеем трение скольжения.

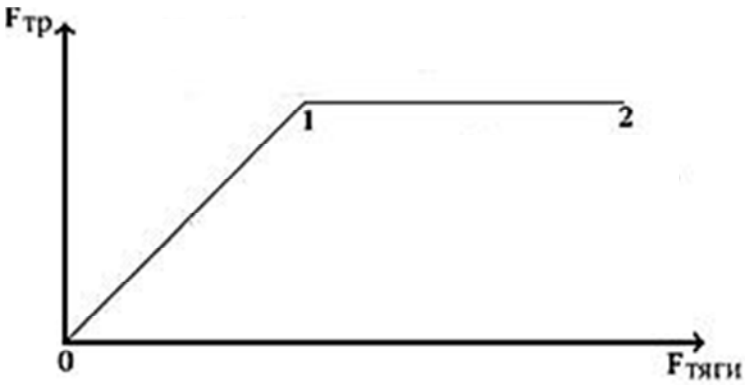


Рис. 2.8. Зависимость силы трения от внешней силы

При относительном скольжении тел, когда на одно из них подействует сила, перпендикулярная направлению движения, возникает *явление заноса*. Сила трения в этом направлении не действует, и сколь угодно малая подобная сила обязательно вызовет движение тела в направлении, перпендикулярном первоначальному. Так происходит с кузовом автомобиля при торможении. Вследствие явления заноса вращающиеся сверла легко входят в металл или дерево, не требуя больших усилий в направлении поступательного движения.

Опыт свидетельствует также о существовании сил трения, действующих на тела при их качении по поверхности других тел. Так, если цилиндрическое тело катится по горизонтальной поверхности и предоставлено самому себе, то с течением времени постепенно замедляется как его поступательное движение, так и вращение во-

круг своей оси. Качение тел замедляется благодаря действию на них сил трения качения со стороны поверхности, по которым они движутся. Пока тело не движется, деформации поверхности, на которой оно расположено, симметричны относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр масс тела. Сила реакции поверхности и сила тяжести действуют вдоль одной и той же вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести. При движении область поверхности впереди от указанной прямой деформируется сильнее. Поэтому точка приложения силы реакции смещается вперед.

Рассмотрим цилиндрическое тело, которое катится по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью поступательного движения центра масс υ с помощью горизонтально направленной силы $\vec{F}$ (рис. 2.9).

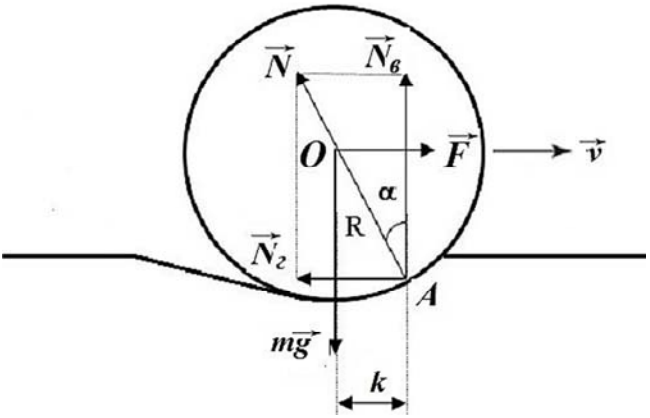


Рис. 2.9. Сила трения качения

На данном рисунке O – ось цилиндра, R – радиус цилиндра. Сила реакции опоры $\vec{N}$ разложена на вертикальную $\vec{N}_{\text{в}}$ и горизонтальную $\vec{N}_{\text{г}}$ составляющие, т. е. $\vec{N} = \vec{N}_{\text{в}} + \vec{N}_{\text{г}}$. Величина силы $\vec{F}$ подбирается такой, чтобы качение происходило равномерно, т. е. чтобы скорость поступательного движения оси цилиндра υ, а также скорость его вращения вокруг своей оси оставались постоянными. Тогда направление силы реакции опоры $\vec{N}$ должно проходить через ось цилиндра, так как только в таком случае данная сила не

создает момента относительно оси и угловая скорость вращения цилиндра окажется неизменной. Сила $\vec{N}_{\text{в}}$ уравновешивает силу тяжести: $\vec{N}_{\text{в}} = m\vec{g}$.

Горизонтальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}_{\text{г}}$ *и есть сила трения качения* $\vec{f}_{\text{тр}}$:

$$\vec{f}_{\text{тр}} = \vec{N}_{\text{г}}.$$

Из рис. 2.9 следует, что

$$f_{\text{тр}} = N \sin\alpha,$$

где $\sin\alpha = k / R$, k – расстояние от вертикального диаметра цилиндра до точки приложения силы реакции $\vec{N}$.

Тогда для силы трения качения получаем выражение:

$$f_{\text{тр}} = k\frac{N}{R}. \qquad (2.23)$$

Величину k называют коэффициентом трения качения. Коэффициент трения качения имеет размерность длины. При равномерном движении $f_{\text{тр}} = F$.

Так как всегда $k << R$, то сила трения качения меньше силы трения скольжения. Поэтому для уменьшения трения в различных механизмах используют подшипники качения. Для уменьшения силы трения между трущимися поверхностями вводят смазку. В этом случае, как показал русский инженер Н. П. Петров, мы имеем дело с внутренним трением скольжения, происходящим лишь между слоями жидкости. Для уменьшения силы трения используют и то обстоятельство, что коэффициент трения уменьшается с увеличением твердости. Поэтому, например, при изготовлении узлов часовых механизмов, прецизионных приборов и т. д., применяют в качестве опор, в которых укрепляются движущиеся части различных механизмов, такие материалы, как агат, рубин и др. Для них коэффици-

ент трения скольжения мал. Например, камни в ручных механических часах или в электромеханических измерительных приборах.

В ряде случаев, например, при торможении, необходимо увеличить силу трения. Для этого трущиеся детали изготавливают из одного материала, поскольку, как показывает опыт, коэффициент трения в данном случае больше, чем при наличии двух различных материалов.

2.9. Движение тела с переменной массой

Существует множество движений, при которых масса тела изменяется. Например, ракета или самолет, в которых работает двигатель, теряют в массе. Капля дождя, падая в воздухе, пересыщенном водяными парами, прибавляет в массе.

Подобное движение рассмотрим на примере ракеты. Она с высокой скоростью выбрасывает вещество (газы), воздействуя на него с большой силой. По третьему закону Ньютона с такой же по модулю, но противоположной по направлению силой, выбрасываемое вещество действует на ракету, сообщая ей ускорение в направлении, противоположном направлению вылета вещества. В этом состоит принцип реактивного движения. Конечно, необходимо принять во внимание и внешние силы $\vec{F}$, действующие на ракету.

Пусть $m(t)$ – масса ракеты в некоторый момент времени t, а $\vec{v}(t)$ – ее скорость в данный момент. Тогда ее импульс $\vec{p} = m(t)\vec{v}(t)$. Спустя время $\mathrm{d}t$ масса и скорость изменятся соответственно на $\mathrm{d}m$ и $\mathrm{d}\vec{v}$ $(\mathrm{d}m < 0)$. Импульс ракеты будет равен $(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})(m + \mathrm{d}m)$. Импульс газов, вылетевших из ракеты, равен $\mathrm{d}m_g \vec{v}_g$, где $\mathrm{d}m_g$ – масса газов, образовавшихся за время $\mathrm{d}t$, $\vec{v}_g$ – их скорость. Согласно (2.4) разность импульсов в моменты $t + \mathrm{d}t$ и t равна $\vec{F}\,\mathrm{d}t$, где $\vec{F}$ – векторная сумма внешних сил, действующих на ракету:

$$(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})(m + \mathrm{d}m) + \mathrm{d}m_g \vec{v}_g - m\vec{v} = \vec{F}\mathrm{d}t. \qquad (2.24)$$

После раскрытия скобок следует отбросить произведение $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}$ виду его малости по сравнению с другими членами. Кроме того,

следует учесть, что $\mathrm{d}m_g + \mathrm{d}m = 0,$ так что $\mathrm{d}m_g = -\mathrm{d}m.$ Скорость истечения газов из ракеты обозначим как $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_g - \vec{v}.$ Тогда (3.46) принимает вид:

$$m\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}}\mathrm{d}m + \vec{F}\mathrm{d}t. \qquad (2.25)$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{\text{отн}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \vec{F}. \qquad (2.26)$$

К внешней силе добавляется новый член $\vec{v}_{\text{отн}}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$ который называется реактивной силой. Это сила, с которой вылетающие газы действуют на ракету.

Уравнения (2.25) и (2.26) были получены российским механиком И. В. Мещерским и носят его имя.

Если на ракету не действуют внешние силы $(\vec{F} = 0),$ уравнение (2.25) принимает вид:

$$m\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}}\mathrm{d}m.$$

Предположим, ракета движется равномерно в направлении, противоположном скорости газовой струи $\vec{v}_{\text{отн}}.$ Спроектировав это уравнение на направление вектора $\vec{v},$ получим: $m\mathrm{d}v = -v_{\text{отн}}\mathrm{d}m.$ Так как $m\mathrm{d}v > 0,$ а $\mathrm{d}m < 0,$ то $v_{\text{отн}} > 0.$ Тогда

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} = -\frac{v_{\text{отн}}}{m}.$$

Предположим, что $v_{\text{отн}} = \text{const}.$ Тогда

$$v = -v_{\text{отн}}\int\frac{\mathrm{d}m}{m} = -v_{\text{отн}}\ln m + C.$$

Величину постоянной интегрирования найдем из начальных условий. Предположим, что в начальный момент скорость $v_0 = 0$, а масса $m = m_0$. Тогда предыдущее уравнение принимает вид: $0 = -v_{\text{отн}} \ln m_0 + C$, откуда следует: $C = v_{\text{отн}} \ln m_0$. В результате имеем:

$$v = v_{\text{отн}} \ln \frac{m_0}{m}$$

или

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}.$$

Это формула К. Э. Циолковского.

Вопросы к главе 2

1. Какая система отсчета называется инерциальной?
2. Сформулируйте первый и второй законы Ньютона.
3. Какие виды сил существуют в природе?
4. Какой физический смысл модуля Юнга?
5. Что такое состояние невесомости? Когда оно возникает?
6. Почему возникают силы трения?
7. В чем особенность силы трения покоя?
8. Что такое сила трения качения, коэффициент трения качания?

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

3.1. Закон сохранения импульса

Предположим, что система состоит из N частиц (материальных точек). Если на частицы системы не действуют внешние силы, система называется *замкнутой*.

Силу, действующую на частицу под номером i со стороны частицы под номером k, обозначим как $\vec{F}_{ik}$, а результирующую внешних сил, действующих на частицу под номером i, обозначим как $\vec{F}_i$.

Тогда согласно второму закону Ньютона, имеем систему уравнений:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + \vec{F}_{1k} + \ldots + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + \vec{F}_{2k} + \ldots + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_2,$$

...

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots \vec{F}_{ik} + \ldots + \vec{F}_{iN} + \vec{F}_i \ (k \neq i),$$

...

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_N}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + \vec{F}_{Nk} + \ldots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_N \ (k \neq N).$$

Здесь $\vec{p}_i$ – импульс i-й частицы. Если сложить все эти уравнения, то слева получим сумму производных от импульсов частиц, что равно производной по времени от суммарного импульса системы $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{p}_i$:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}.$$

Сумму внутренних сил в правой части можно представить в виде:

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \ldots + (\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki}) + \ldots + (\vec{F}_{N-1,N} + \vec{F}_{N,N-1}).$$

Согласно 3-му закону Ньютона, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, поэтому выражение в каждой скобке равно нулю, равна нулю и вся сумма. Поэтому справа в результате суммирования останется только сумма внешних сил, и мы получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \qquad (3.1)$$

Это значит, что производная по времени от полного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на тела системы. Это закон изменения полного импульса системы.

Если система замкнута, $\mathrm{d}\vec{P}/\mathrm{d}t = 0$. В данном случае $\vec{P} = \mathrm{const}$. *Суммарный импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным во времени. Это закон сохранения импульса системы.* Импульсы отдельных частиц в такой системе могут изменяться, однако суммарный импульс остается постоянным.

Данный закон связан с однородностью пространства – свойства пространства одинаковы во всех точках. Параллельный перенос замкнутой из одного места в другое не изменяет механических ее свойств, если при переносе сохранились взаимное расположение частиц и их скорости.

Из формулы (3.1) следует, что импульс остается постоянным и в том случае, если сумма внешних сил равна нулю.

Из формулы (3.1) следует, что если проекция суммы внешних сил на некоторое направление равна нулю, то проекция суммарного импульса на это направление сохраняется.

Особой точкой системы является ее центр масс *C*, радиус-вектор которого определяемый по формуле:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i. \qquad (3.2)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i. \qquad (3.3)$$

Скорость центра масс:

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{M}.$$

Отсюда следует:

$$\vec{P} = M\vec{v}_C. \tag{3.4}$$

Согласно 2-му закону Ньютона:

$$\frac{\mathrm{d}(M\vec{v}_C)}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}(\vec{v}_C)}{\mathrm{d}t} = M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \tag{3.5}$$

Из (3.5) следует, что под действием внешних сил центр масс системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы. Из этого же выражения следует, что центр масс замкнутой системы движется без ускорения, т. е. прямолинейно и равномерно. Поэтому *система отсчета, связанная с центром масс замкнутой системы, является ИСО*.

3.2. Работа силы. Скалярное произведение векторов

Универсальной мерой различных форм движения и взаимодействия является энергия. Различным формам движения соответствуют различные формы энергии: механическая, тепловая, электромагнитная, ядерная и др. Часто одна форма движения материи переходит в другую. Во всех случаях энергия, в некоторой форме отданная одним телом другому, равна энергии, полученной этим другим телом в соответствующей форме (которая может не совпадать с первоначальной).

Перед определением понятия работы познакомимся со скалярным произведением векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{A}$ *и* $\vec{B}$ *называется произведение модулей векторов на косинус угла между ними:*

$$\vec{A}\vec{B} = (\vec{A},\vec{B}) = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cos\alpha = AB\cos\alpha. \tag{3.6}$$

Если перемножаемые вектора поменять местами, то угол α заменится углом $-\alpha$. Но так как $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, то $\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A}$, т. е. скалярное произведение векторов не зависит от порядка сомножителей. Это свойство называют коммутативностью. Так как $A\cos\alpha = A_B$ и $B\cos\alpha = B_A$, то равенство (3.6) можно представить в виде:

$$\vec{A}\vec{B} = A_B B = B_A A. \tag{3.7}$$

В декартовой системе координат скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{A}\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \tag{3.8}$$

где A_x, A_y, A_z и B_x, B_y, B_z – проекции векторов на соответствующие координатные оси.

Количественной характеристикой обмена энергией между телами является работа силы.

При прямолинейном движении тела под действием постоянной силы $\vec{F}$ работа A силы равна:

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s = \vec{F}\vec{s}. \tag{3.9}$$

Здесь s – модуль вектора перемещения $\vec{s}$, F_s – проекция вектора силы на направление перемещения, α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$. Величина $A > 0$ если $\alpha < 90^o$ и $A < 0$ если $\alpha > 90^o$.

Выражение $\vec{F}\vec{s}$ представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{s}$.

Если перемножаемые скалярно вектора перпендикулярны друг другу, то $\alpha = 90^o$, и согласно формуле (3.6), скалярное произведение равно нулю.

3.3. Криволинейный интеграл. Мощность

В общем случае сила и перемещение могут изменяться и по величине, и по направлению, а перемещение может происходить по некоторой кривой L от точки A до точки B. В таком случае кривую делят на n небольших элементарных участков, каждый из которых можно считать прямолинейным (рис. 3.1).

На каждом таком элементарном участке под номером i силу F_i и угол α_i можно считать постоянными, а выполненная силой работа на данном участке:

$$\mathrm{d}A_i = F_i \mathrm{d}s_i \cos\alpha_i = \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{s}_i.$$

Если движение начинается в точке *1*, а заканчивается в точке *2*, то полная работа равна алгебраической сумме работ на всех участках:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}A_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathrm{d}s_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{s}_i. \qquad (3.10)$$

Точное значение работы получится, если число n взять как можно больше, в идеале $n \to \infty$.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F_i \mathrm{d}s_i \cos\alpha_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \mathrm{d}\vec{s}_i = \int_{1(L)}^{2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \qquad (3.11)$$

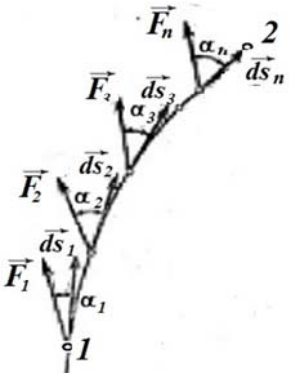


Рис. 3.1. К расчету работы на криволинейной траектории

Последнее выражение в математике называют криволинейным интегралом второго рода от вектора силы вдоль кривой L от точки *1* до точки *2*. Единица работы джоуль (Дж); 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н·м.).

Криволинейный интеграл второго рода вдоль замкнутой кривой L называется циркуляцией вектора вдоль этой кривой. Циркуляция обозначается как $\oint_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$.

Мощность N характеризует скорость совершения работы:

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

Если за время $\mathrm{d}t$ сила совершит работу $\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$, то мощность, развиваемая силой в данный момент:

$$N = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = N = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}, \qquad (3.12)$$

т. е. мощность равна скалярному произведению силы на скорость. Единица мощности – ватт (Вт); (1 Вт = 1 Дж /с).

Если задан график зависимости силы F от координаты x, то работа численно равна площади под кривой зависимости F от x (рис. 3.2).

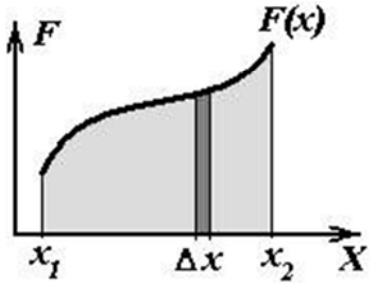


Рис. 3.2. Графический способ определения работы

3.4. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетической называется энергия, обусловленная механическим движением тела. Согласно второму закону Ньютона:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.$$

Обе части этого уравнения умножим скалярно на элементарное перемещение $\mathrm{d}\vec{s}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{s} = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \tag{3.13}$$

Так как $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\mathrm{d}t,$ то левая часть принимает вид $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\mathrm{d}t = m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v}.$ Так как $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2,$ то взяв дифференциал от обеих частей последнего равенства, получим: $\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v} = 2v\mathrm{d}v$ или

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = v\mathrm{d}v. \tag{3.14}$$

Тогда левая часть равенства примет вид: $mv\mathrm{d}v,$ а само равенство $mv\mathrm{d}v = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$ или

$$\mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}. \tag{3.15}$$

Если $\vec{F} = 0,$ то величина $\frac{mv^2}{2},$ называемая кинетической энергией $E_{\text{к}},$ остается постоянной. Если проинтегрировать уравнение (3.11) от начальной точки *1* до конечной *2*, получим:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = A_{12}, \tag{3.16}$$

где A_{12} – работа внешней силы на участке 1–2. Равенство (3.16) выражает теорему об изменении кинетической энергии частицы: *изменение кинетической энергии частицы за некоторый промежуток времени равно работе внешних сил над этой частицей за данный промежуток*.

3.5. Потенциальная энергия. Связь силы с потенциальной энергией

Потенциальной называется энергия, связанная с взаимным положением тел или частей одного и того же тела и определяемая характером сил взаимодействия между ними. Примером может служить потенциальная энергия тела, поднятого на некоторую высоту над поверхностью Земли или потенциальная энергия пружины в механических часах.

Взаимодействие тел или частей тела осуществляется посредством силовых полей. Эти поля называются *потенциальными*, а действующие в них силы *консервативными*, если совершаемая силами работа не зависит от того, по какой траектории тело перемещается из начальной точки в конечную, а зависит только от положения этих точек. Примером являются гравитационные силы, силы кулоновского взаимодействия и др. Примером неконсервативных сил (иначе называемых диссипативными) являются силы трения.

Покажем, что работа консервативных сил на замкнутом пути равна нулю. Отметим на замкнутом пути две произвольные точки *1* и *2* (рис. 3.3). Они выделяют два участка: I (от точки *1* к *2*) и II (от точки *2* к *1*). Работа на замкнутом пути равна сумме работ, выполненных на этих участках:

$$A = (A_{12})_{\mathrm{I}} + (A_{21})_{\mathrm{II}}. \qquad (3.17)$$

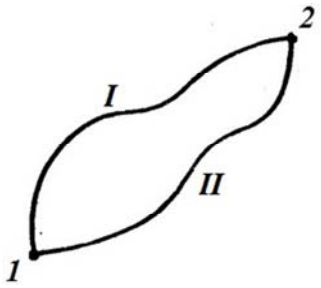


Рис. 3.3. К вычислению работы на замкнутой траектории

Изменение направления движения по участку II на противоположное приводит к замене всех элементарных перемещений $\mathrm{d}\vec{s}$ на $-\mathrm{d}\vec{s}$. В результате работа $\int \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}$ изменит знак на противоположный: $(A_{21})_{\mathrm{II}} = -(A_{12})_{\mathrm{II}}$. Тогда, произведя замену в выражении (3.17), получим:

$$A = (A_{12})_{\mathrm{I}} - (A_{12})_{\mathrm{II}}.$$

Последнее выражение равно нулю вследствие независимости работы от пути. Для консервативных сил это можно выразить так:

$$\oint \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = 0. \tag{3.18}$$

Циркуляция вектора консервативной силы равна нулю.

Поле, в любой точке которого направление силы, действующей на частицу, проходит через одну и ту же неподвижную точку, называемую центром, называется центральным. Эта сила может быть направлена к центру или от центра. Если поле не изменяется со временем, его называют стационарным.

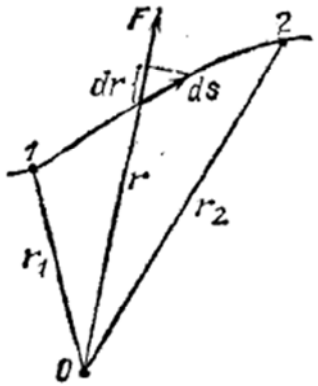


Рис. 3.4. Перемещение частицы в центральном поле

Определим работу, совершаемую в центральном стационарном поле над частицей. Модуль силы $F(r)$ в таком поле зависит только от расстояния до центра. Работа при элементарном перемещении $\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = F(r)\mathrm{d}s_F$, где $F(r)$ – модуль силы, $\mathrm{d}s_F$ – проекция вектора перемещения на направление силы (рис. 3.4). Данный рисунок выполнен для сил отталкивания частицы от центра, при этом $\mathrm{d}s_F = \mathrm{d}r$. В случае притяжения частицы к центру $\mathrm{d}s_F = -\mathrm{d}r$.

Поэтому для отталкивания $\mathrm{d}A = F(r)\mathrm{d}r$, для притяжения $\mathrm{d}A = -F(r)\mathrm{d}r$.

Работа на всем пути от начальной точки *1* до конечной *2* равна интегралу от $\mathrm{d}A$:

для случая отталкивания

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\mathrm{d}r \tag{3.19}$$

и для случая притяжения

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\mathrm{d}r. \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует, что работа в центральном поле не зависит от формы пути, а определяется только видом функции $F(r)$ и пределами интегрирования.

Тело, находящееся в потенциальном поле сил, обладает некоторой потенциальной энергией $E_{\text{п}}$. При его перемещении в таком поле выполненная над телом работа равна убыли его потенциальной энергии:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{\text{п}} \tag{3.21}$$

или при перемещении частицы из точки *1* в точку *2*:

$$A_{12} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}. \tag{3.22}$$

Здесь $E_{\text{п}1}$ и $E_{\text{п}2}$ – потенциальные энергии в точках *1* и *2*.

В случае перемещения вдоль одной оси *x*:

$$F_x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_{\text{п}}. \tag{3.23}$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$E_{\text{п}} = -\int F_x \mathrm{d}x + \text{const}. \tag{3.24}$$

Видно, что потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой постоянной. Работа определяется разностью потенциальных энергий в начальном и конечном состояниях, поэтому константа уничтожается. Величину ее определяют из соображений удобства. Например, для поля силы упругости за нуль $E_{\text{п}}$ принимают энергию в положении равновесия, а для гравитационных и электрических полей – энергию в бесконечно удаленной точке. При этом величина потенциальной энергии может быть и отрицательной по знаку, в то время как кинетическая энергия всегда положительна.

Силу можно выразить через потенциальную энергию. Предположим, что частица переместилась на бесконечно малое расстояние $\mathrm{d}x$ вдоль оси *x*. Работа сил поля над ней равна $F_x \mathrm{d}x$. С другой сто-

роны, работа равна убыли потенциальной энергии (3.21), откуда следует, что:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}.$$

Здесь записано $\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}$, а не $\frac{\mathrm{d}E_{\text{п}}}{\mathrm{d}x}$, так как $E_{\text{п}}$ может быть функцией координат y и z, которые мы считаем пока постоянными. Производная, вычисленная при таких условиях, называется частной. Аналогичным образом можно определить составляющие силы F_y и F_z:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}. \tag{3.25}$$

Тогда

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Вектор, составляющие которого по координатным осям $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где φ – скалярная функция координат x, y, z, называется градиентом функции φ, и обозначается:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}. \tag{3.26}$$

Направление вектора $\mathrm{grad}\varphi$ совпадает с направлением l, вдоль которого функция φ возрастает с наибольшей скоростью, а модуль его равен $\mathrm{d}\varphi / \mathrm{d}l$, т. е. скорости возрастания функции при перемещении вдоль оси l.

Выражение (3.26) можно рассматривать как результат действия на функцию φ дифференциального оператора:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3.27)$$

который называется *оператором Гамильтона* или *оператором набла*. Градиент функции φ можно представить в виде:

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi.$$

Тогда для $\vec{F}$ получаем:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}E_{\text{п}} \quad \text{или} \quad \vec{F} = -\nabla E_{\text{п}}. \qquad (3.28)$$

Консервативная сила равна минус градиенту потенциальной энергии.

3.6. Закон сохранения механической энергии

Предположим, имеется замкнутая система из n частиц, в которой действуют только консервативные силы. Согласно второму закону Ньютона, для всех частиц выполняются уравнения:

$$m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1; \quad m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2; \ \ldots; \ m_n\frac{\mathrm{d}\vec{v}_n}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_n.$$

Здесь $\vec{v}_i$ – скорость i-й частицы, $\vec{F}_i$ – суммарная консервативная сила, действующая на эту частицу. Перемещение каждой частицы за бесконечно малый промежуток времени $\mathrm{d}t$ можно выразить как $\mathrm{d}\vec{s}_i = \vec{v}_i\mathrm{d}t$. Умножив левые части исходных уравнений на $\vec{v}_i\mathrm{d}t$, а правые – на $\mathrm{d}\vec{s}_i$, получим:

$$m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t}\vec{v}_1\mathrm{d}t = \vec{F}_1\mathrm{d}\vec{s}_1; \quad m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}\vec{v}_2\mathrm{d}t = \vec{F}_2\mathrm{d}\vec{s}_2; \ \ldots; \ m_n\frac{\mathrm{d}\vec{v}_n}{\mathrm{d}t}\vec{v}_n\mathrm{d}t = \vec{F}_n\mathrm{d}\vec{s}_n.$$

или с учетом (3.15):

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_1v_1^2}{2}\right) = \vec{F}_1\mathrm{d}\vec{s}_1; \quad \mathrm{d}\left(\frac{m_2v_2^2}{2}\right) = \vec{F}_2\mathrm{d}\vec{s}_2; \ \ldots; \ \mathrm{d}\left(\frac{m_nv_n^2}{2}\right) = \vec{F}_n\mathrm{d}\vec{s}_n.$$

Величины $\frac{m_i v_i^2}{2}$ представляют собой кинетические энергии $\mathrm{d}E_{\mathrm{к}i}$ частиц, а $\vec{F}_i \mathrm{d}\vec{s}_i$ – работу консервативных частиц $\mathrm{d}A_i$ над ними. Учитывая это, просуммируем последние уравнения и получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}E_{\mathrm{к}i} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}A_i. \qquad (3.29)$$

Величина $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}E_{\mathrm{к}i}$ представляет собой изменение полной кинетической энергии системы $\mathrm{d}E_{\mathrm{к}}$, а $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}A_i$ – суммарную работу консервативных сил над частицами системы $\mathrm{d}A$, тогда $\mathrm{d}E_{\mathrm{к}} = \mathrm{d}A$. Согласно (3.21), $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{\mathrm{п}}$, и $\mathrm{d}E_{\mathrm{к}} = -\mathrm{d}E_{\mathrm{п}}$. Тогда $\mathrm{d}E_{\mathrm{к}} + \mathrm{d}E_{\mathrm{п}} = 0$, или $\mathrm{d}(E_{\mathrm{к}} + E_{\mathrm{п}}) = 0$. Отсюда получаем, что

$$E_{\mathrm{к}} + E_{\mathrm{п}} = \mathrm{const}. \qquad (3.30)$$

Равенство (3.30) отражает закон сохранения механической энергии: *в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется.*

Если частица притягивается к центру поля, работа на произвольной траектории от точки *1* до точки *2* определяется формулой (3.20). Так как она равна убыли потенциальной энергии (3.21, 3.22), то

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\mathrm{d}r = E_{\mathrm{п}1} - E_{\mathrm{п}2}. \qquad (3.31)$$

При гравитационном притяжении:

$$F(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2};$$

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\mathrm{d}r = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathrm{d}r = G\frac{m_1 m_2}{r_2} - G\frac{m_1 m_2}{r_1}. \qquad (3.32)$$

Из формул (3.31) и (3.32) следует, что для гравитационных сил потенциальная энергия взаимодействия:

$$E_{\text{п}} = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{3.33}$$

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени. При отсутствии полей, изменяющихся со временем, все моменты времени равноправны.

3.7. Момент импульса. Момент силы. Момент пары сил

Моментом импульса $\vec{L}$ некоторой материальной точки (частицы) относительно заданной точки (центра) называется векторное произведение радиус-вектора данной частицы $\vec{r}$ относительно центра на импульс $\vec{p}$ этой частицы:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]. \tag{3.34}$$

Модуль момента импульса:

$$L = rp\sin\alpha, \tag{3.35}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

В декартовой системе $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, а $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$, тогда

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} z & x \\ p_z & p_x \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(yp_z - zp_y) + \vec{j}\,(zp_x - xp_z) + \vec{k}\,(xp_y - yp_x). \tag{3.36}$$

Моментом импульса относительно некоторой оси называется проекция момента импульса, определенного относительно произвольной точки на данной оси, на эту ось.

Моментом $\vec{N}$ некоторой силы относительно заданной точки (центра) называется векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы $\vec{r}$ относительно центра на силу $\vec{F}$:

$$\vec{N} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{3.37}$$

Модуль момента силы:

$$N = rF\sin\alpha, \tag{3.38}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Величина $r\sin\alpha$ называется плечом силы.

В декартовой системе $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, тогда

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(yF_z - zF_y) + \vec{j}\,(zF_x - xF_z) + \vec{k}\,(xF_y - yF_x). \tag{3.39}$$

Две равные по модулю и противоположные по направлению силы, линии действия которых не совпадают, называются *парой сил*. Расстояние d между параллельными прямыми, вдоль которых действуют силы, называется *плечом пары*. Суммарный момент пары относительно некоторой точки O равен:

$$\vec{N} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right],$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы точек приложения сил относительно данной точки.

Так как $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, а $\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_2$, то

$$\vec{N} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] - \left[\vec{r}_2, \vec{F}_1\right] = \left[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_{21}, \vec{F}_1\right], \qquad (3.40)$$

где $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – вектор, проведенный из точки *2* в точку *1* (рис. 3.5).

Как видно, момент пары сил не зависит от положения точки, относительно которой он определяется. Вектор $\vec{N}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат силы. Так как $r_{21}\sin\alpha = d$, то модуль момента равен произведению модуля любой из сил на плечо пары.

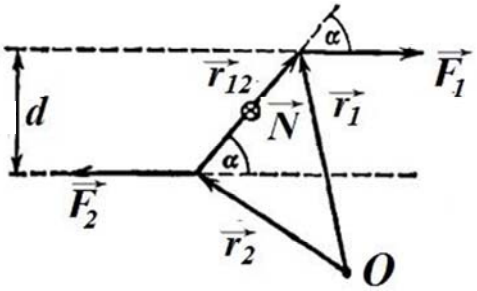


Рис. 3.5. Момент пары сил

Моментом силы относительно оси z называется проекция момента силы, определенного относительно произвольной точки O на указанной оси, на эту ось (рис. 3.6).

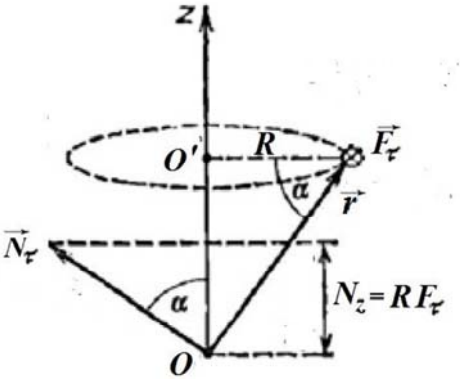


Рис. 3.6. Момент силы относительно оси

Вращение относительно оси вызывают только такие силы, момент которых относительно этой оси отличен от нуля. Подобная сила $\vec{F}_\tau$ на рис. 3.6 перпендикулярна плоскости рисунка. Иначе говоря, линия действия подобной силы и ось являются скрещенными прямыми, угол между которыми равен 90^o. Момент силы относительно точки O равен $N = F_\tau r$ а момент относительно оси $N_z = F_\tau r \cos\alpha = F_\tau R.$ Как видно, N_z не зависит от положения точки O. Сила же, параллельная оси или направленная вдоль радиуса, дает момент, перпендикулярный оси, проекция которого на ось равна нулю.

3.8. Закон изменения момента импульса. Закон сохранения момента импульса

Продифференцируем выражение (3.34) по времени:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right]. \qquad (3.41)$$

Величина $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ представляет собой скорость частицы, которая параллельна $\vec{p}$. Поэтому $\left[\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{p}\right] = 0.$ Величина $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ согласно 2-му закону Ньютона представляет собой силу $\vec{F},$ действующую на частицу, а $\left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ равно моменту $\vec{N}$ силы. Тогда (3.41) принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}. \qquad (3.42)$$

Производная от импульса частицы равна моменту силы, действующей на эту частицу. Это закон изменения момента импульса частицы.

Очевидно, что если момент силы, действующей на частицу, равен нулю, момент импульса остается неизменным. Это закон сохранения момента импульса частицы.

Примером движения с сохранением момента импульса является движение планет вокруг Солнца. Сила гравитационного притяжения, играющая роль центростремительной, направлена от центра планеты к центру Солнца, а радиус-вектор $\vec{r}$ центра планеты – в противоположном направлении. Угол α между векторами равен 180°, $\sin\alpha = 0$. Поэтому и момент гравитационной силы равен нулю и момент импульса планеты $\vec{L}$ остается постоянным как по модулю, так и по направлению. Так как $\vec{L} \perp \vec{r}$, то движение планеты происходит в одной и той же плоскости. Правда, эти плоскости для различных планет несколько различаются.

В замкнутой системе моменты сил создают внутренние силы. Но силы взаимодействия двух любых частиц равны по модулю и противоположны по направлению $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Они создают равные по модулю, но противоположные по направлению моменты, а суммарный момент, создаваемый каждой парой сил, равен нулю. Поэтому и суммарный момент $\vec{N}_{\text{внутр}}$, создаваемый всеми внутренними силами, равен нулю:

$$\vec{N}_{\text{внутр}} = \sum_i \vec{N}_{i\,\text{внутр}} = 0. \qquad (3.43)$$

Здесь $\vec{N}_{i\,\text{внутр}}$ – момент, создаваемый отдельной внутренней силой.

Равенство нулю суммарного момента внутренних сил означает, что *полный момент импульса замкнутой системы материальных точек сохраняется. Это закон сохранения момента импульса.* Он связан с изотропностью пространства.

Момент импульса системы материальных точек равен векторной сумме моментов отдельных точек:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i.$$

Дифференцирование по времени дает:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}. \qquad (3.44)$$

Для каждой из частиц в соответствии с (3.42) можно написать:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{N}_{i\,\text{внутр}} + \vec{N}_{i\,\text{внеш}}. \qquad (3.45)$$

Здесь $\vec{N}_{i\,\text{внутр}}$ и $\vec{N}_{i\,\text{внеш}}$ – суммарные моменты внутренних и внешних сил, действующих на частицу под номером *i*. Подставив (3.45) в (3.44), получим:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{N}_{i\,\text{внутр}} + \sum_i \vec{N}_{i\,\text{внеш}}.$$

С учетом (3.43), получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{N}_{i\,\text{внеш}}. \qquad (3.46)$$

Это закон изменения момента импульса системы материальных точек.

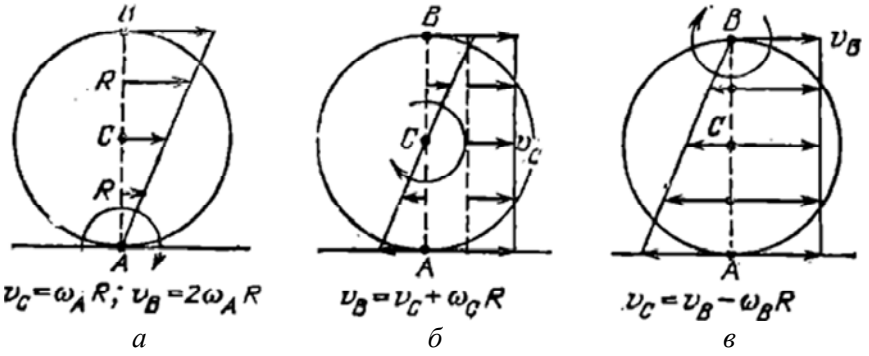
Вопросы к главе 3

1. В каких случаях выполняется закон сохранения импульса?
2. Что такое центр масс системы тел? Как он движется под действием внешних сил?
3. Что такое скалярное произведение векторов?
4. Что такое работа силы?
5. Что такое криволинейный интеграл на примере работы силы на криволинейной траектории?
6. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии.
7. Какие силы называются консервативными?
8. Что такое градиент скалярной величины?
9. Как связана сила с потенциальной энергией?
10. В каком случае полная механическая энергия системы сохраняется?
11. Что такое момент импульса, момент силы, момент пары сил?
12. По какому закону изменяется момент импульса материальной точки? Когда он сохраняется?

4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Плоское движение твердого тела

Плоским называется движение твердого тела, при котором все его точки движутся в параллельных плоскостях. Примером является качение однородного цилиндра по горизонтальной плоскости. Подобное движение можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений. Вариантов подобного разбиения существует бесконечное множество. Три возможных варианта представлены на рис. 4.1. Для них различной является скорость поступательного движения. А вот угловая скорость вращательного движения оказывается одинаковой.



а *б* *в*

Рис. 4.1. Варианты представления плоского движения:
а – поворот относительно точки *A*; *б* – движение со скоростью, равной скорости центра масс и вращение относительно оси, проходящей через этот центр;
в – движение со скоростью, равной скорости точки *B* и вращение относительно оси, проходящей через эту точку

Примем за начало координат некоторую точку тела *O*. Пусть скорость поступательного движения равна $\vec{v}_n$, а $\vec{r}$ – радиус-вектор некоторой точки относительно точки *O*. Тогда скорость точки относительно неподвижной системы координат согласно формуле (1.32) будет:

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]. \qquad (4.1)$$

Особенно удобным оказывается описание движения тела, если в качестве точки O взять центр масс тела. Тогда скорость любой точки тела будет равна сумме скорости поступательного движения центра масс $\vec{v}_C$ и вращательного относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 4.1, *б*). В случае цилиндра модули скоростей на его границе и скорости центра масс равны. В верхней точке B эти скорости совпадают по направлению, так что скорость равна $2\vec{v}_C$. А вот в нижней точке A эти скорости противоположны, так что суммарная скорость оказывается равной нулю – эта точка на мгновенье останавливается. Это заметно при наблюдении движения велосипедного колеса – при определенных скоростях его нижние спицы хорошо видны по отдельности, в то же время как верхние уже неразличимы.

Элементарное перемещение твердого тела при плоском движении всегда можно представить как поворот вокруг оси, называемой мгновенной осью вращения. Эта ось может проходить как внутри, так и вне тела. На рис. 4.1, *а* данная ось проходит по линии касания тела и горизонтальной плоскости. Эта линия перемещается по плоскости, так и по поверхности цилиндра.

4.2. Движение центра масс твердого тела

Если твердое тело разбить на большое количество очень малых (элементарных) масс, то его можно представить как совокупность множества материальных точек, расстояния между которыми не изменяются. В таком случае для него справедливы результаты, полученные для системы материальных точек. Например, радиус-вектор его центра тяжести $\vec{r}_C$ можно представить в виде:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \Delta \vec{r}_i}{M}. \qquad (4.2)$$

Здесь Δm_i – элементарная масса под номером i, $\vec{r}$ – радиус-вектор этой массы, M – масса тела, n – число элементарных масс. Казалось бы, эта формула будет тем точнее, тем больше n. Однако

объем *i*-й массы нельзя устремлять к нулю, его можно уменьшать только до тех пор, пока не начнет сказываться атомная структура вещества тела. Такой объем называют физически малым, и именно он фигурирует в выражении:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\iiint_V \rho \vec{r}\,\mathrm{d}V. \tag{4.3}$$

Здесь $\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ – плотность вещества тела в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Если тело однородно, т. е. плотность $\rho = \mathrm{const}$, ее можно вынести за знак интеграла, и тогда

$$\vec{r}_C = \frac{1}{V}\iiint_V \vec{r}\,\mathrm{d}V. \tag{4.4}$$

Так как тело можно представить как систему множества материальных точек, как и для нее, для тела справедливо уравнение:

$$M\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i, \tag{4.5}$$

где $\vec{F}_i$ – внешние силы, действующие на тело. Как видно, центр масс тела под действием внешних сил движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела.

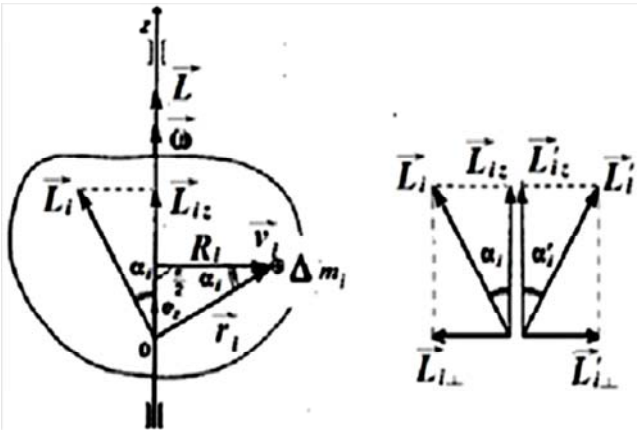
4.3. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент импульса твердого тела

Разобьем симметричное твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси *z*, совпадающей с осью симметрии, на элементарные массы Δm_i. Определим момент импульса $\vec{L}_i$ некоторой такой массы относительно некоторой точки *O*, расположенной на данной оси. Согласно формуле (3.34)

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i\right].$$

Данный вектор расположен перпендикулярно $\vec{r}_i$ (рис. 4.2). На этом рисунке R_i – расстояние от данной массы до оси вращения (радиус вращения), α_i – угол между радиусом и радиус-вектором $\vec{r}_i$. Под таким же углом расположится вектор $\vec{L}_i$ по отношению к оси вращения. Модуль $\vec{L}_i$:

$$\Delta L_i = r_i \Delta m_i v_i = r_i \Delta m_i \omega R_i. \qquad (4.6)$$



а *б*

Рис. 4.2. *а* – к определению момента импульса;
б – к сложению моментов импульса

Здесь ω – модуль вектора угловой скорости. Скорость данной элементарной массы направлена за плоскость рисунка. Тогда скорость симметрично расположенной относительно оси элементарной массы $\Delta m'_i$ будет направлена к нам, а ее момент импульса $\Delta \vec{L}'_i$ расположится симметрично моменту $\vec{L}_i$ под таким же углом α'_i к оси (рис. 4.2, *б*). При этом $\Delta L'_i = L_i$.

Полный момент импульса тела будет равен векторной сумме моментов импульсов всех элементарных масс. Рассмотрим сумму векторов $\vec{L}_i + \Delta \vec{L}'_i$ для симметрично расположенных масс. Каждый из этих векторов можно разложить на составляющие, параллельные оси

и перпендикулярные ей: $\vec{L}_i = \vec{L}_{i\|} + \vec{L}_{i\perp}$; $\vec{L}'_i = \vec{L}'_{i\|} + \vec{L}'_{i\perp}$ (рис. 4.2, *б*). Как видно, векторы $\vec{L}_{i\perp}$ и $\vec{L}'_{i\perp}$ противоположны друг другу, и при суммировании дадут нуль. Поэтому суммарный вектор $\vec{L}$ будет совпадать по направлению с осью вращения и направлением вектора $\vec{\omega}$. Соответственно, при суммировании следует учесть только параллельные составляющие векторов $\vec{L}_i$, равные $L_{i\|} = r_i \Delta m_i \omega R_i \cos\alpha_i$. Так как $r_i \cos\alpha_i = R_i$, то для модуля вектора $\vec{L}$ получим, опуская знак $\|$, следующее выражение:

$$L = \sum_i \Delta m_i \omega R_i^2 = \omega \sum_i \Delta m_i R_i^2. \tag{4.7}$$

Величина

$$J = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \tag{4.8}$$

называется моментом инерции твердого тела.

В случае вращения симметричного тела относительно оси симметрии равенство (4.7) справедливо и в векторном виде:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \tag{4.9}$$

4.4. Момент инерции. Теорема Штейнера

Момент инерции – это неотъемлемое свойство тела, такое же, как и масса. Тело обладает моментом инерции независимо от того, вращается оно или покоится. Для уточнения величины J суммирование в выражении (4.9) должно быть заменено на интегрирование:

$$J = \int R^2 \mathrm{d}m. \tag{4.10}$$

С учетом $\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$ последнее равенство принимает вид:

$$J = \iiint_V \rho R^2 \mathrm{d}V. \tag{4.11}$$

Как будет показано, J определяет динамические свойства тел при вращательном движении. Из выражений (4.9) и (4.10) следует, что момент инерции определяется распределением массы относительно оси вращения.

Определение величины J в общем случае представляет собой сложную задачу. Задача упрощается, если тело оказывается однородным и симметричным. Для примера рассчитаем величину J относительно оси симметрии для однородного цилиндра.

Для этого разобьем цилиндр на множество трубок радиуса R с тонкими стенками размером $\mathrm{d}R$. Масса трубки $\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}s \cdot H$, где $\mathrm{d}s$ – площадь поперечного сечения трубки, равная $2\pi R \cdot \mathrm{d}R$, H – высота цилиндра, ρ – плотность материала. Все точки данной трубки находятся на расстоянии R от оси симметрии. Тогда момент инерции трубки равен $\mathrm{d}J = \mathrm{d}m \cdot R^2 = 2\pi\rho HR\,\mathrm{d}R\,R^2 = 2\pi\rho HR^3\mathrm{d}R$. Тогда

$$J = \int_0^r 2\pi\rho HR^3 dR = 2\pi\rho H\frac{r^4}{4} = \pi r^2 H\rho\frac{r^2}{2} = \frac{mr^2}{2}. \qquad (4.12)$$

Здесь r – радиус цилиндра, m – его масса. Так как J не зависит от H, то формула (4.12) справедлива и для тонкого диска. Для шара относительно любого его диаметра $J = \frac{2mr^2}{5}$. Для тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через его центр, $J = \frac{1}{12}ml^2$, где l – его длина. Для обруча относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, $J = mr^2$, так как вся его масса находится на расстоянии от такой оси, равном радиусу r обруча.

Ось вращения может не совпадать с осью симметрии тела. Тогда величина момента инерции возрастает. Ее величину можно определить в случае, если ось вращения параллельна оси симметрии, но не совпадает с ней, с помощью теоремы Штейнера.

Пусть обе эти оси перпендикулярны плоскости рисунка (рис. 4.3). Ось C проходит через центр масс, а ось O параллельна ей и находится на расстоянии d.

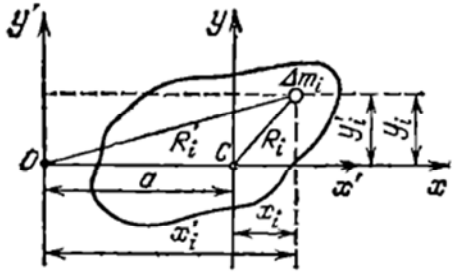


Рис. 4.3. К теореме Штейнера

Введем две системы координат x, y и x', y' с началами в точках C и O, в которых оси пересекают плоскость рисунка. При таком выборе систем координат координаты некоторой элементарной массы Δm_i будут x_i, y_i и x_i', y_i'. При этом $x_i' = x_i + d$, $y_i' = y_i$. Тогда момент инерции этой массы относительно оси O равен:

$$J_{oi} = \Delta m_i (R'_i)^2 = \Delta m_i \left[(x_i')^2 + (y_i')^2 \right] = \Delta m_i \left[(x_i + d)^2 + y_i^2 \right] =$$

$$= \Delta m_i x_i^2 + 2\Delta m_i x_i + \Delta m_i d^2 + \Delta m_i y_i^2 = \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) + \Delta m_i d^2 + 2\Delta m_i x_i$$

или

$$J_{oi} = \Delta m_i x_i^2 + 2\Delta m_i x_i + \Delta m_i d^2 + \Delta m_i y_i^2 =$$
$$= \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) + \Delta m_i d^2 + 2\Delta m_i x_i,$$

а момент инерции тела:

$$J_o = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i \Delta m_i d^2 + 2\sum_i \Delta m_i x_i.$$

Первое слагаемое представляет собой момент инерции тела относительно оси C. Во втором слагаемом величину d^2 можно вынести за знак суммы, а $\sum_i \Delta m_i$ равна массе тела m, тогда оно равно md^2. Сумма в третьем слагаемом равна x_C – координате центра масс. При нашем выборе систем координат $x_C = 0$, и третье слагаемое обращается в нуль. Тогда

$$J_o = J_C + md^2. \qquad (4.13)$$

Это и есть теорема Штейнера: *момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*

4.5. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Для твердого тела, как и для системы материальных точек, справедливо уравнение (3.42), согласно которому сумма моментов внешних сил равна производной от момента импульса по времени:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}. \tag{4.14}$$

Это и есть основное уравнение динамики вращательного движения. Так как согласно (4.9) $\vec{L} = J\vec{\omega},$ то в случае, когда в процессе движения момент инерции J не изменяется, то закон принимает вид:

$$J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{N}. \tag{4.15}$$

Так как $\mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t = \vec{\varepsilon},$ где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, то данный закон используется и в виде:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{N}. \tag{4.16}$$

Формулы (4.14), (4.15) и (4.16) в различной форме выражают основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

При отсутствии момента внешних сил из (4.15) следует, что момент импульса сохраняется. Это подтверждается опытом, который можно провести с человеком, находящимся на скамье Жуковского (рис. 4.4, *а*, *б*). Предположим, человек держит на вытянутых руках гантели.

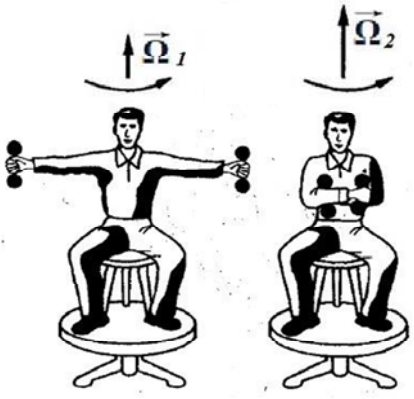


Рис. 4.4. Человек на скамье Жуковского: с разведенными в стороны руками (*а*) и со сведенными (*б*)

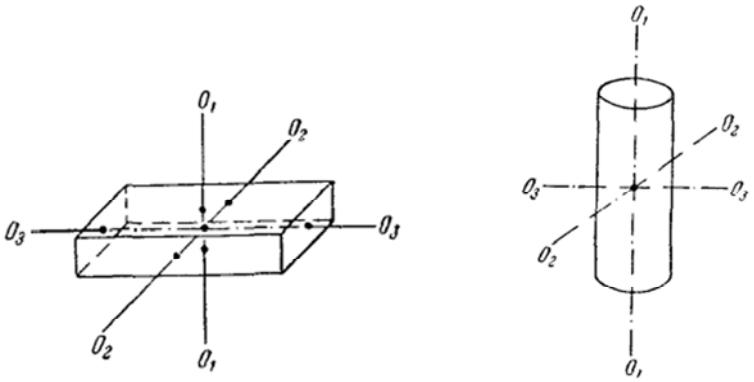
Приведем скамью во вращение с некоторой скоростью Ω_1. Если после этого человек прижмет гантели к себе, суммарный момент инерции уменьшится. Так как внешние силы отсутствуют, момент импульса сохраняется: $J_2\Omega_2 = J_1\Omega_1$, и угловая скорость вращения увеличивается: $\Omega_2 > \Omega_1$. Точно также для увеличения скорости вращения уменьшают момент инерции фигуристы и гимнасты.

Если некоторое тело привести во вращение вокруг произвольной оси, а затем предоставить его самому себе, то ось вращения изменит свое направление. Чтобы удержать произвольно взятую ось в неизменном положении, необходимо приложить к ней определенную силу.

Однако существуют оси вращения, положение которых не изменяется при отсутствии внешних сил. Такие оси называются *свободными осями вращения*. Можно доказать, что для любого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, которые могут быть свободными осями. Их называют *главными осями инерции тела*.

Для однородного параллелепипеда главными осями будут оси, O_1O_1, O_2O_2, и O_3O_3, проходящие через центры противоположных граней (рис. 4.5, *а*). У тел с осевой симметрией, например, у однородного цилиндра, одной из главных осей инерции является ось симметрии (рис. 4.5, *б*), а в качестве двух других могут быть две перпендикулярные к ней и между собой оси, проходящие через центр масс.

Таким образом, у тел с осевой симметрией фиксирована только одна главная ось. У тела с центральной симметрией, т. е. у шара, плотность которого зависит только от расстояния от центра, главными осями могут быть три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр. Поэтому ни одна из осей не фиксирована.



а *б*

Рис. 4.5. Главные оси инерции: *а* – параллелепипеда; *б* – цилиндра

Для данного тела устойчивым оказывается вращение относительно осей, для которых момент инерции максимален или минимален. Вращение относительно оси, для которой момент инерции имеет промежуточное значение, будет неустойчивым: при малейшем отклонении оси возникнут силы, приводящие к увеличению отклонения. При отклонении от устойчивой оси возникают силы, возвращающие ось к исходному направлению.

Если имеется внешнее воздействие, например, стержень подвешен на нити, прикрепленной к его концу, устойчивым оказывается только вращение относительно оси, для которой момент инерции максимален. Эта ось проходит перпендикулярно стержню через его центр (рис. 4.6, *а*). Аналогичная картина наблюдается при вращении диска, подвешенного на прикрепленной к его краю нити (рис. 4.6, *б*).

а *б*

Рис. 4.6. Вращение подвешенных на нити: *а* – стержня; *б* – диска

4.6. Кинетическая энергия вращающегося тела

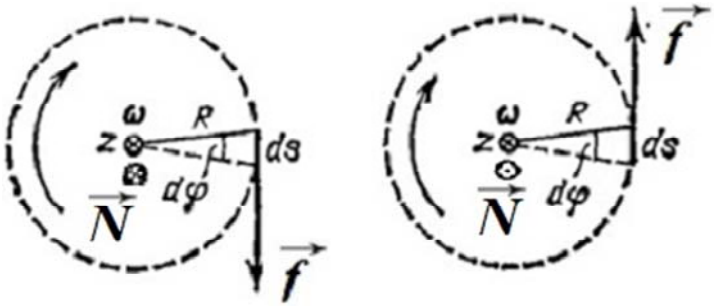
Предположим, что тело вращается относительно неподвижной оси с угловой скоростью ω. Тогда кинетическая энергия элементарной массы Δm_i равна $\Delta E_{ki} = \Delta m_i v_i^2 / 2$. Если учесть $v_i = \omega R_i$, где R_i – радиус вращения, то $\Delta E_{ki} = \Delta m_i \omega^2 R_i^2 / 2$. Тогда

$$E_k = \sum_i \Delta m_i \omega^2 R_i^2 / 2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i \Delta m_i R_i^2$$

или

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (4.17)$$

Определим работу, совершаемую внешними силами, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z. Ограничимся простейшим случаем, когда сила направлена по касательной к окружности, по которой перемещается точка приложения силы (рис. 4.7).



а *б*

Рис. 4.7. К вычислению работы внешней силы:
а – направление силы и перемещения совпадают;
б – эти направления противоположны

В этом случае сила $\vec{f}$ и вектор перемещения точки приложения силы $\mathrm{d}\vec{s}$ действуют вдоль одной прямой (т. е. они коллинеарные). Работа при бесконечно малом перемещении $\mathrm{d}A = f_s \mathrm{d}s = f_s R \mathrm{d}\varphi$, где

f_s – проекция силы на направление перемещения, R – радиус точки приложения силы, $\mathrm{d}\varphi$ – угол поворота. Если сила действует в том же направлении, что и перемещение (рис. 4.7, *а*), то $f_s = f$ и $\mathrm{d}A = fR\mathrm{d}\varphi$. Если же сила действует противоположно перемещению (рис. 4.7, *б*), то $f_s = -f$ и $\mathrm{d}A = -fR\mathrm{d}\varphi$. Оба эти случая описываются одной формулой:

$$\mathrm{d}A = N_z \mathrm{d}\varphi. \tag{4.18}$$

Здесь N_z – проекция момента силы относительно центра окружности на ось z. В общем случае направление силы произвольно. Вектор силы можно разложить на 3 составляющие: $\vec{f}_{\parallel}$, $\vec{f}_R$ и $\vec{f}_s$, где $\vec{f}_{\parallel}$ направлена параллельно оси, $\vec{f}_R$ – по радиусу к оси и $\vec{f}_s$, коллинеарную перемещению. Силы $\vec{f}_{\parallel}$ и $\vec{f}_R$ перпендикулярны перемещению, поэтому их работа равна нулю. Равны нулю и моменты этих составляющих относительно оси z. Поэтому формула (4.18) справедлива и в этом случае. При выбранных на рис. 4.6 направлениях перемещения направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и оси z совпадают. Поэтому в формуле (4.18) величину N_z можно заменить на N_ω:

$$\mathrm{d}A = N_\omega \mathrm{d}\varphi. \tag{4.19}$$

4.7. Кинетическая энергия тела при его плоском движении

Плоское движение тела можно представить как суперпозицию поступательного движения со скоростью $\vec{v}_o$ некоторой его точки O и вращательного движения относительно оси, проходящей через эту точку с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Пусть радиус-вектор некоторой элементарной массы Δm_i относительно точки O будет $\vec{r}_i$. Тогда скорость этой массы будет равна:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_o + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right].$$

Кинетическая энергия данной массы:

$$E_{ki} = \frac{\Delta m_i \left(\vec{v}_o + [\vec{\omega}, \vec{r}_i] \right)^2}{2} = \frac{\Delta m_i \left(v_o^2 + 2\vec{v}_o [\vec{\omega}, \vec{r}_i] + [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 \right)}{2}.$$

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий отдельных элементарных масс:

$$E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i \left(v_o^2 + 2\vec{v}_o [\vec{\omega}, \vec{r}_i] + [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 \right)}{2}.$$

Эту сумму разобьем на три слагаемых, вынося постоянные величины за знак суммы:

$$E_k = \frac{1}{2} v_o^2 \sum_i \Delta m_i + \vec{v}_o \sum_i \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2. \qquad (4.20)$$

Так как $\sum_i \Delta m_i = m$, где m – масса, то первое слагаемое равно $mv_o^2/2$. Квадрат вектора равен квадрату его модуля, поэтому $[\vec{\omega}, \vec{r}_i]^2 = \omega^2 (r_i \sin \alpha_i)^2$. Выражение в скобках равно R_i – радиусу вращения относительно оси. Тогда третье слагаемое равно $\frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{\omega^2 J_o}{2}$, где J_o – момент инерции относительно оси вращения. Используя свойство дистрибутивности векторного произведения, второе слагаемое представим в виде:

$$\vec{v}_o \sum_i \Delta m_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \vec{v}_o \left[\vec{\omega}, \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \right] = \vec{v}_o [\vec{\omega}, \vec{r}_C],$$

где $\vec{r}_C$ – радиус-вектор центра масс относительно точки O.

В первое слагаемое входят величины, характеризующие только поступательное движение, в третье – только вращательное. Во второе слагаемое входят величины, характеризующие как поступательное, так и вращательное движения.

Если в качестве точки O взять центр масс, то $\vec{r}_C = 0,$ и второе слагаемое обращается в нуль. В результате формула (4.20) упрощается:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}. \qquad (4.21)$$

Таким образом, если плоское движение тела представить как поступательное движение со скоростью, равной скорости центра масс и вращательное движение относительно оси, проходящей через центр масс, то выражение для кинетической энергии приобретает наиболее простой вид, разделяясь на кинетическую энергию только поступательного и только вращательного движений. В этом преимущество данного варианта описания плоского движения твердого тела.

В таблице 4.1 сопоставлены формулы для поступательного и вращательного движений.

Таблица 4.1

Формулы для поступательного и вращательного движений

Поступательное движение	**Вращательное движение**
$\vec{v}$ – скорость	$\vec{\omega}$ – угловая скорость
$\dot{\vec{v}} = \vec{a}$ – линейное ускорение	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$ – угловое ускорение
m – масса	J – момент инерции
$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс	$L_z = J\vec{\omega}$ – момент импульса
$\vec{F}$ – сила	$\vec{N}$ – момент силы
$\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t = \vec{F}$ – сила	$\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{N}$ – момент силы
$m\vec{a} = \vec{F}$ – закон поступательного движения	$J\beta_z = N_z$ – закон вращательного движения
$E_k = mv^2/2$ – кинетическая энергия	$E_k = J\omega^2/2$ – кинетическая энергия
$\mathrm{d}A = F_s\mathrm{d}s$ – работа	$\mathrm{d}A = N_\omega \mathrm{d}\varphi$ – работа
$P = F_v\mathrm{d}v$ – мощность	$P = N_\omega d\omega$ – мощность

4.8. Гироскопы. Гироскопический эффект

Гироскопом (или волчком) называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии. Эту ось мы будем называть осью гироскопа. Ось гироскопа является одной из главных осей инерции (свободной осью). Момент импульса гироскопа в таком случае направлен вдоль оси и равен $\vec{L} = J\vec{\omega}$. Рассмотрим горизонтально ориентированный уравновешенный гироскоп (центр тяжести которого находится над точкой опоры). Так как момент силы тяжести для него равен нулю, то согласно закону сохранения момента импульса $\vec{L} = J\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const}}$, т. е. направление его оси вращения не изменяет положения в пространстве.

При попытке вызвать поворот оси гироскопа наблюдается явление, называемое **гироскопическим эффектом**. Суть эффекта: **под действием силы *F*, приложенной к оси вращающегося гироскопа, эта ось перемещается в направлении, параллельном моменту силы**. Например, при действии вертикальной силы, ось гироскопа поворачивается в горизонтальной плоскости. На первый взгляд это кажется противоестественным.

Гироскопический эффект объясняется следующим образом (рис. 4.8). Момент $\vec{N}$ силы $\vec{F}$ направлен перпендикулярно его оси, т. к. $\vec{N} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра масс гироскопа в точку приложения силы.

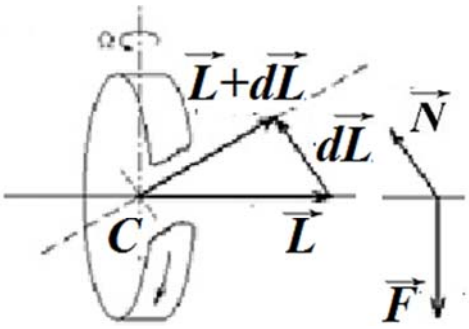


Рис. 4.8. Гироскопический эффект

За время $\mathrm{d}t$ момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $\mathrm{d}\vec{L} = \vec{N}\mathrm{d}t$ (в соответствии с основным законом вращательного движения), направленное в том же направлении, что и $\vec{N}$ и станет равным $\vec{L} + \mathrm{d}\vec{L}$. Направление вектора $\vec{L} + \mathrm{d}\vec{L}$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа. Таким образом, ось гироскопа повернется в плоскости перпендикулярной силе $\vec{F}$ на некоторый угол $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}L / L = N\mathrm{d}t / L$ с угловой скоростью:

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{N}{L}. \tag{4.22}$$

Угловая скорость поворота оси гироскопа Ω называется угловой скоростью прецессии, а такое вращательное движение оси гироскопа **прецессией.**

Из формулы (4.22) следует

$$N = \Omega L.$$

Векторы $\vec{N}, \vec{L}, \vec{\Omega}$ взаимно перпендикулярны, поэтому можно записать:

$$\vec{N} = \left[\vec{\Omega}, \vec{L}\right]. \tag{4.23}$$

Эта формула получена, когда векторы $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{\Omega}$ взаимно перпендикулярны, однако можно доказать, что она справедлива и в общем случае.

Отметим, что данные рассуждения и вывод формул справедлив в том случае, когда угловая скорость вращения гироскопа $\omega >> \Omega$.

Для гироскопов часто используется так называемый карданов подвес (рис. 4.9). Ось вращения гироскопа O_1O_2 закреплена во внутреннем кольце и может свободно вращаться вокруг перпендикулярной к ней горизонтальной оси a_1a_2, проходящей через точки соединения внутреннего и внешнего колец. Последняя может вращаться относительно вертикальной оси b_1b_2, проходящей через точки соединения внешнего кольца с подставкой. Это обеспечивает возмож-

ность поворота оси гироскопа в любом направлении. Все три оси пересекаются в центре инерции гироскопа. Если привести гироскоп в быстрое вращение, то его ось сохранит свое направление независимо от поворота подставки.

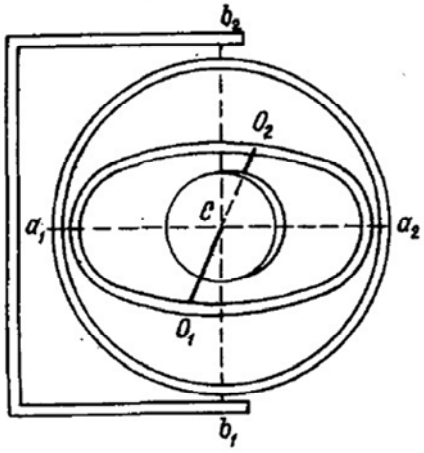


Рис. 4.9. Карданов подвес

Из формулы (4.22) следует, что скорость прецессии Ω прямо пропорциональна N и обратно пропорциональна моменту импульса гироскопа L. Если время действия силы мало, момент импульса L достаточно велик, то скорость прецессии Ω будет мала. Поэтому кратковременное действие сил практически не приводит к изменению ориентации оси вращения гироскопа в пространстве. Для ее изменения следует прикладывать силы в течение длительного времени.

Описанные выше свойства гироскопа нашли себе разнообразные практические применения. Одно из первых применений свойства гироскопов нашли в нарезном оружии. После вылета из ствола орудия на снаряд действует сила сопротивления воздуха, момент которой может опрокинуть снаряд и изменить его ориентацию относительно траектории беспорядочным образом, что отрицательно влияет на дальность полета и точность попадания в цель. Винтовые нарезы в стволе орудия сообщают вылетающему снаряду быстрое вращение вокруг его оси. Снаряд превращается в гироскоп и внешний момент силы сопротивления воздуха вызывает лишь прецессию его оси вокруг направления касательной к траектории снаряда. При этом сохраняется определенная ориентация снаряда в пространстве.

Другим важным применением гироскопов являются различные гироскопические приборы: гирогоризонт, гирокомпас и т. д. Уравновешенные гироскопы также применяются для поддержания заданного направления движения самолета (автопилот). Для этого крепление гироскопа осуществляют на карданной подвеске, которая уменьшает действие внешних моментов сил, возникающих при ма-

невре самолета. Благодаря этому ось гироскопа сохраняет свое направление в пространстве независимо от движения самолета. При отклонении направления движения самолета от направления, заданного осью гироскопа, возникают автоматические команды, возвращающие к заданному направлению.

Описанное поведение гироскопа также положено в основу прибора, называемого гироскопическим компасом (гирокомпасом). Этот прибор представляет собой гироскоп, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Под влиянием суточного вращения Земли ось гирокомпаса устанавливается в такое положение, при котором угол между его осью и осью вращения Земли оказывается минимальным. В этом положении ось гирокомпаса оказывается в меридиональной плоскости, т. е. указывает точно на географический север. Гироскопический компас выгодно отличается от компаса с магнитной стрелкой тем, что в его показания не надо вносить поправки на так называемое магнитное склонение (связанное с несовпадением географического и магнитного полюсов Земли), а также не надо принимать мер для компенсации воздействия магнитных наводок от корпуса и оборудования судна.

Так как Земля по форме не является шаром, а скорее ближе к эллипсоиду, а ось вращения Земли не перпендикулярна плоскости орбиты, то точка приложения силы притяжения к Солнцу не совпадает с центром Земли и она создает момент относительно оси вращения, который стремится повернуть ось относительно перпендикуляра к плоскости орбиты. Происходит прецессия оси.

Из формулы (4.22) следует, что при $N = 0$ ось гироскопа будет сохранять неизменное положение в пространстве.

Силы, приложенные к связям, удерживающим ось (обычно это подшипники), равны внешним силам, действующим на ось, и противоположны им. Эти силы называют *гироскопическими*. Например, пусть на ось гироскопа O_1O_2 (рис. 4.10) со стороны подшипников действует пара сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, момент которой $\vec{N}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Для удобства конец вектора момента импульса $\vec{L}$ совмещен с нижним концом оси. Тогда этот конец, как и нижний конец оси, будут перемещаться в направлении, параллельном $\vec{N}$, т. е. к нам. Противоположный верхний конец оси будет перемещаться в противоположном направлении, т. е. перпен-

дикулярно плоскости рисунка по направлению от нас. При этом ось оказывает давление на подшипники с гироскопическими силами $\vec{F}_{1g} = -\vec{F}_1$ и $\vec{F}_{2g} = -\vec{F}_2$.

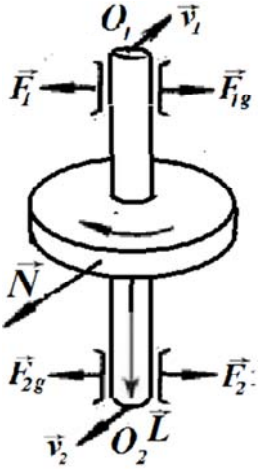


Рис. 4.10. Гироскопические силы

Вопросы к главе 4

1. Как можно представить элементарное перемещение твердого тела?

2. Как движется центр масс твердого тела?

3. Что такое момент импульса твердого тела? Приведите формулу, связывающую эту величину с угловой скоростью.

4. Что такое момент инерции твердого тела?

5. Сформулируйте теорему Штейнера.

6. Приведите две формулы основного закона динамики вращательного движения твердого тела.

7. В каком случае кинетическая энергия при плоском движении приобретает наиболее простой вид?

8. Какова аналогия между физическими величинами, описывающими динамику поступательного и вращательного движения?

9. Что такое гироскоп? В чем состоит гироскопический эффект? Где применяются гироскопы?

5. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

5.1. Силы инерции

Законы Ньютона и законы сохранения выполняются только в ИСО. В неинерциальных системах отсчета (НИСО) они уже не выполняются. Пусть к потолку вагона на нити подвешен шар массой m. При поступательном движении вагона с ускорением $\vec{a}$ относительно Земли нить отклонится от вертикального положения на угол α (рис. 5.1).

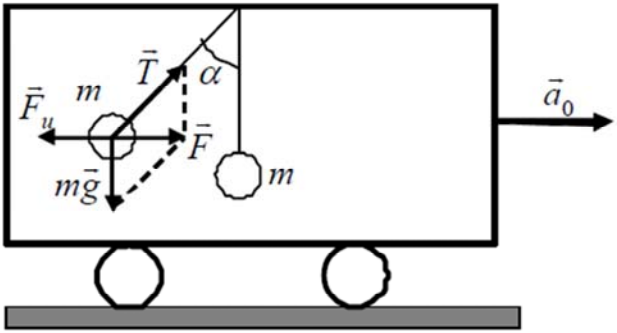


Рис. 5.1. Шар в движущемся с ускорением вагоне

Величина α определяется из условия: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{g}$.

В ИСО, связанной с Землей, такое поведение понятно. Сила $\vec{F}$, которая является равнодействующей силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения отклонившейся нити $\vec{T}$, обеспечивает шару ускорение $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}. \qquad (5.1)$$

В то же время относительно НИСО, связанной с движущимся вагоном, шар покоится, хотя векторная сумма сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ не равна нулю. Конечно, если к данным силам добавить силу, называемую силой инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F} = -m\vec{a}, \qquad (5.2)$$

равную по модулю равнодействующей, но противоположной ей по направлению, суммарная сила окажется равной нулю, и ускорение шара в НИРС $\vec{a}'$ будет равно нулю. При этом второй закон Ньютона выполняется уже и в поступательно движущихся НИСО. Закон в таком виде справедлив и в случаях, когда $\vec{a}' \neq 0$, т. е. *если тело движется ускоренно относительно НИСО: произведение массы тела на его ускорение относительно поступательно движущейся НИСО равно векторной сумме всех сил взаимодействия плюс сила инерции.* В нашем случае:

$$m\vec{a}' = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{ин}}.$$

Это впервые установил французский физик Д'Аламбер. Поэтому приведенное утверждение называют *принципом Д'Аламбера*.

В случае произвольной поступательно движущейся НИСО второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}. \qquad (5.3)$$

Здесь $\vec{F}$ – равнодействующая сил, обусловленных действием тел друг на друга, $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение НИСО относительно ИСО.

Сила инерции – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена действием какого-либо тела, а обусловлена только ускоренным движением системы отсчета.

Поэтому в НИСО не выполняется третий закон Ньютона.

Действию силы инерции подвергаются пассажиры транспорта. При его торможении сила инерции толкает их вперед, а при ускоренном разгоне – назад.

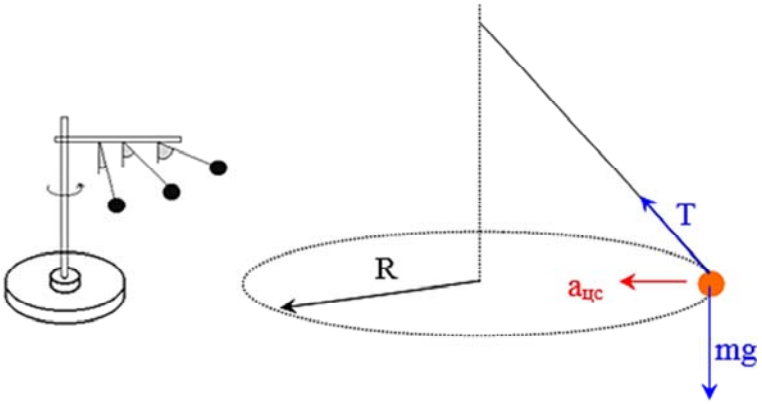
Силы инерции исчезают в ИСО. Данные силы изменяются при переходе из одной СО в другую.

Для любого тела, находящегося в НИСО, силы инерции являются внешними. Поэтому НИСО не являются замкнутыми, и в них не выполняются законы сохранения импульса, энергии, момента импульса. Сила инерции определяется не ускорением тела, а ускорением самой системы.

5.2. Центробежная сила инерции

Предположим, имеется диск, который равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг перпендикулярной ему оси, которая проходит через его центр. Перпендикулярно к оси закреплен тонкий стержень. К нему на разных расстояниях от оси на нитях подвешены шарики с одинаковой массой m.

Когда диск начнет вращаться, шарики отклоняются от вертикали на некоторый угол, тем больший, чем дальше от оси расположен шарик (рис. 5.2, *а*).



а *б*

Рис. 5.2. Вращение шариков:
а – положение шариков при вращении диска;
б – силы, действующие на шарик

В ИСО, которая связана, например, с помещением, где установлен диск, происходит равномерное вращение каждого шарика по окружности радиусом R (расстояние от центра масс вращающегося шарика до оси вращения, рис. 5.2, *б*). Второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{a}_n = \vec{T} + m\vec{g},$$

где $\vec{a}_n$ – нормальное или центростремительное ускорение;

$\vec{T}$ – сила натяжения нити.

Угол α отклонения нити снова можно найти из треугольника сил: $\mathrm{tg}\alpha = a_n / g = \omega^2 R / g$.

Углы отклонения нитей маятников будут тем больше, чем больше угловая скорость вращения ω и чем больше расстояние R от центра шарика до оси вращения диска.

Относительно нашей НИСО, которая связана с вращающимся диском, шарик покоится, что возможно, если силы $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ уравновешиваются силой

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -(\vec{T} + m\vec{g}) = -m\vec{a}_n,$$

так как никакие другие силы на шарик не действуют. Эта сила называется центробежной силой инерции (рис. 5.3).

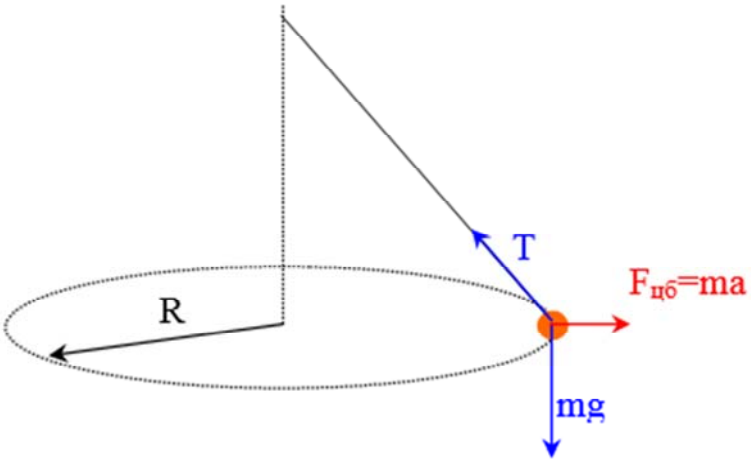


Рис. 5.3. К определению центробежной силы инерции

Как видно, центробежная сила инерции направлена по горизонтали от оси вращения.

Таким образом, в нашей НИСО второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{цб}}.$$

В случае произвольной НИСО центробежная сила инерции:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -m\vec{a}_n = -m\omega^2 R\vec{n}, \tag{5.4}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по радиусу к оси вращения.

В данном случае второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{цб}}, \tag{5.5}$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на тело, а $\vec{F}_{\text{цб}}$ определяется по формуле (5.4).

На практике действие центробежных сил инерции испытывают, например, пассажиры в движущемся автобусе на поворотах, летчики при выполнении фигур высшего пилотажа, дети на карусели. Центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах, в режиме отжима в стиральных машинах и т. д., где они достигают очень больших значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (винтов самолетов, роторов и т. д.) используются специальные механизмы для уравновешивания центробежных сил инерции.

Из формулы (5.4) следует, что центробежная сила инерции, которая действует на тела во вращающихся системах отсчета и которая направлена в сторону радиуса от оси вращения, зависит от угловой скорости вращения ω системы отсчета и радиуса R, но при этом не зависит от скорости тела относительно вращающихся систем отсчета. Значит, центробежная сила инерции действует во вращающихся системах отсчета на все тела, которые удалены от оси вращения на конечное расстояние, при этом не имеет значения, покоятся ли они в этой системе отсчета (как мы предполагали до сих пор) или движутся относительно нее с некоторой скоростью.

На тело, находящееся на поверхности Земли, действует центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{цб}}$. Результирующая этой силы с силой гравитационного притяжения дает силу тяжести:

$$m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{цб}}, \tag{5.6}$$

по направлению которой устанавливается отвес (рис. 5.4).

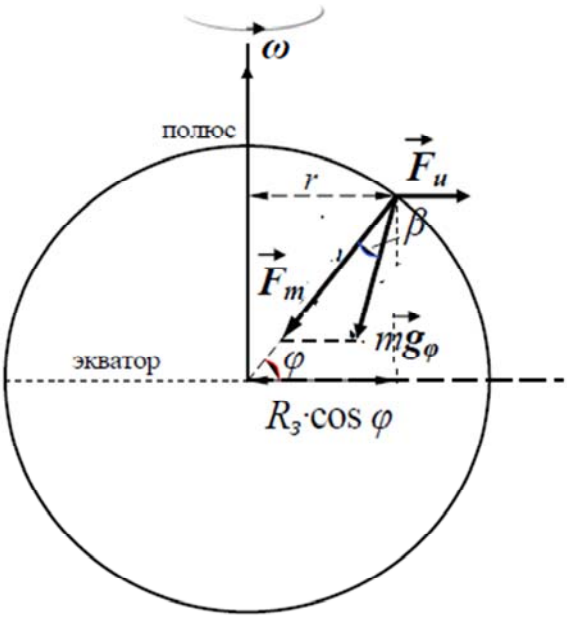


Рис. 5.4. К определению силы тяжести

Вес тела $\vec{P} = -m\vec{g}$, если тело не движется ускоренно относительно Земли.

Так как угловая скорость суточного вращения Земли небольшая, то угол β между направлениями силы тяжести $m\vec{g}$ и силы гравитационного взаимодействия $\vec{F}_g$ мал. Величину угла β можно оценить, исходя из теоремы синусов:

$$\frac{F_{\text{цб}}}{\sin\beta} = \frac{mg}{\sin\varphi},$$

откуда следует

$$\sin\beta = \sin\varphi\frac{F_{\text{цб}}}{mg} = \sin\varphi\frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 R_З \sin 2\varphi}{2g},$$

где $R_З = 6380$ км – радиус Земли;

ω – угловая скорость вращения Земли;

φ – географическая широта;

r – радиус вращения тела относительно оси вращения Земли.

Так как $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6,28}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5}$ рад/с, то

$$\sin\beta = 0,0018 \sin 2\varphi. \qquad (5.7)$$

Пусть $\vec{g}_0 = G\dfrac{M_З}{R_З^3}\vec{R}$ – ускорение, сообщаемое телу силой гравитационного притяжения (среднее ускорение свободного падения). Здесь G – гравитационная постоянная, $M_З$ – масса Земли, $\vec{R}$ – радиус-вектор тела относительно центра Земли. При $R = R_З$ величина $g_0 = 9,810$ м/с^2.

С учетом ускорения, обусловленного центробежной силой инерции, ускорение свободного падения в данной точке $\vec{g}_\varphi$ отличается от $\vec{g}_0$:

$$\vec{g}_\varphi = \vec{g}_0 + \omega^2\vec{r}, \qquad (5.8)$$

где $\vec{r}$ – вектор, проведенный вдоль радиуса вращения тела по направлению от оси вращения Земли перпендикулярно данной оси. Нигде, кроме полюсов, $\vec{g}_\varphi$ не совпадает по направлению с $\vec{g}_0$.

На экваторе $\omega^2\vec{r}$ направлен против $\vec{g}_0$, поэтому для экватора $g = g_0 - \omega^2 R_З$ и численно $g_{экв} = 9,780$ м/с^2. Это на 0,3 % меньше g_0. На полюсах $\vec{r} = 0$ и должно было быть $g_п = 9,810$ м/с^2. Однако на самом деле $g_п = 9,832$ м/с^2. Это связано с тем, что Земля несколько сплюснута у полюсов и полярные радиусы несколько меньше.

По мере передвижения от экватора к полюсу величина g плавно возрастает от $g_{экв} = 9,780$ м/с^2 до $g_п = 9,832$ м/с^2.

5.3. Сила Кориолиса

Предположим, что частица массой m движется равномерно по окружности относительно вращающейся НИСО. Плоскость, в которой расположена окружность (рис. 5.5) перпендикулярна оси вращения, а скорость частицы относительно вращающейся СО обозначим как v'.

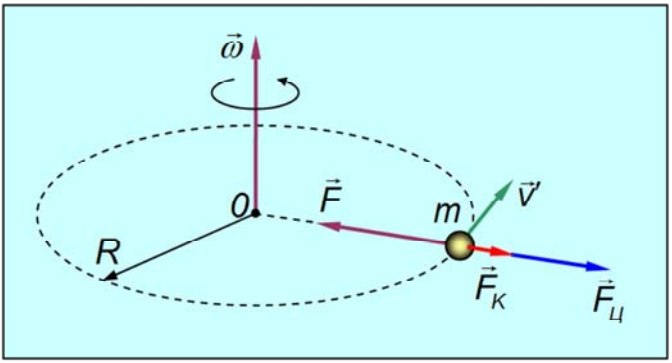


Рис. 5.5. К выводу силы Кориолиса

Предположим, что направление $\vec{v}'$ совпадает с направлением $\left[\vec{\omega}, \vec{R}\right]$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости, $\vec{R}$ – радиус-вектор частицы относительно центра окружности, описываемой частицей. Иначе говоря, $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$.

В таком случае модуль скорости частицы относительно ИСО будет

$$v = v' + \omega R.$$

В ИСО центростремительное ускорение:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{(v' + \omega R)^2}{R}\vec{n}, \qquad (5.9)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, проведенный от частицы к оси вращения перпендикулярно ей. В данной системе частица может двигаться по окружности со скоростью $v = v' + \omega R$, на нее должна действовать

направленная к центру окружности сила $\vec{F}$, (например, натяжение нити) или векторная сумма сил, причем величина этой силы (или суммы сил) $\vec{F} = m\vec{a}_n$, или, раскрывая скобки в (5.9),

$$\vec{F} = m\vec{a}_n = m\frac{(v')^2}{R}\vec{n} + 2v'\omega\vec{n} + \omega^2 R\vec{n}.$$

Так как $\frac{(v')^2}{R}\vec{n} = \vec{a}_n'$ – ускорение частицы в НИСО, то

$$\vec{F} = m\vec{a}_n' + 2mv'\omega\vec{n} + m\omega^2 R\vec{n},$$

откуда следует

$$m\vec{a}_n' = \vec{F} - 2mv'\omega\vec{n} - m\omega^2 R\vec{n}.$$

Учитывая (5.4), получим, что $-m\omega^2 R\vec{n}$ – центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{цб}}$. Учитывая, что $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$, и вектор $[\vec{v}', \vec{\omega}]$ направлен против $\vec{n}$, получаем, что $-m2v'\omega\vec{n} = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$. Эту величину называют Кориолисовой силой:

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]. \qquad (5.10)$$

Можно показать, что формула (5.10) справедлива при любой ориентации вектора $\vec{v}'$.

Из определения векторного произведения следует, что $\vec{F}_K \perp \vec{\omega}$, т. е. $\vec{F}_K$ лежит в плоскости, перпендикулярной $\vec{\omega}$. Если $\vec{v}' \| \vec{\omega}$, сила Кориолиса не возникает. Вторая особенность связана с тем, что $\vec{F}_K \perp \vec{v}'$ и поэтому не изменяет модуля $\vec{v}'$ и не совершает работы над частицей. Она может только изменить направление вектора $\vec{v}'$.

Сила Кориолиса оказывает влияние на движение тел по земной поверхности или вблизи нее.

Так, при свободном падении тела отклоняются к востоку в обоих полушариях. Оно максимально на экваторе и равно нулю на полюсах.

Сила Кориолиса поворачивает плоскость колебаний маятника, что заметно при его достаточно большой длине. Впервые это продемонстрировал французский физик Фуко. Примеры приведены на рис. 5.6.

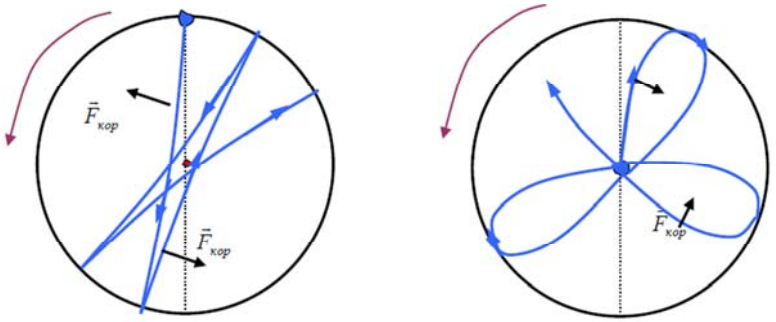


Рис. 5.6. Движение маятника:
а – маятник отпущен из максимально отклоненного положения;
б – по находящемуся в положении равновесия маятнику нанесен удар

Движущиеся тела: вода в реках, снаряды и др. отклоняются в северном полушарии вправо по ходу движения, а в южном – влево. В артиллерии вводят поправку на деривацию (так называют это отклонение). В северном полушарии правые берега рек размываются сильнее. Здесь же сильнее изнашивается правый рельс.

На экваторе при выстреле вдоль него на восток $\vec{F}_K$ приподнимает снаряд кверху, а при выстреле на запад – прижимает к Земле.

Вопросы к главе 5

1. Когда проявляется сила инерции? Чему она равна?
2. Почему в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения?
3. В каких системах возникает центробежная сила инерции? Чему она равна?
4. Чему равна сила тяжести? Как она изменяется с изменением географической широты?
5. В каких случаях проявляется сила Кориолиса? Приведите ее формулу и примеры действия этой силы.

6. ГИДРОМЕХАНИКА

6.1. Линии и трубки тока. Уравнение неразрывности

Молекулы газа слабо связаны друг с другом. Поэтому они заполняют весь представленный им объем.

В отличие от них, молекулы жидкости значительно сильнее взаимодействуют между собой. Жидкости принимают только форму сосуда, в который они помещены, сохраняя объем.

Несмотря на значительное различие в свойствах, между газами и жидкостями, в некоторых механических явлениях их поведение описывается одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому имеется раздел механики, называемый ***гидромеханикой***, который изучает равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и с обтекаемыми ими твердыми телами. В нем реализуется единый подход к исследованию жидкостей и газов.

Часто отвлекаются от молекулярного строения и рассматривают и жидкости, и газы, как сплошные среды, заполняющие определенный объем. Если плотность и давление газов зависят от условий, в которых они содержатся, то сжимаемостью жидкостей во многих случаях можно пренебречь и считать их плотность постоянной.

Жидкости оказывают давление на дно и стенки сосудов. В одной горизонтальной плоскости гидростатическое давление, согласно закону Паскаля, одинаково по всем направлениям и равно $\rho g h$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, h – высота столба жидкости.

Течение жидкости графически изображается в виде линий тока, проведенных таким образом, что касательные к линиям тока совпадают с направлением скорости течения жидкости в данной точке. Линии проводят таким образом, чтобы их плотность была пропорциональна скоростям течения жидкости. Линии тока можно визуализировать, растворив в прозрачной жидкости заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют трубкой тока. Если форма и расположение трубок тока, а также модули и направления скоростей частиц жидкости не изменяются с течением времени, течение называется стационарным.

Рассмотрим некоторую трубку тока (рис. 6.1). Пусть S_1 и S_2 – два сечения, перпендикулярные скоростям $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в местах расположения данных сечений.

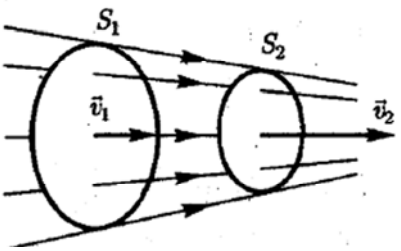


Рис. 6.1. К выводу уравнения неразрывности

За время $\mathrm{d}t$ через первое сечение пройдет объем жидкости, равный $S_1 v_1 \mathrm{d}t$, а через второе сечение за это же время пройдет объем $S_2 v_2 \mathrm{d}t$. Так как жидкость несжимаема, эти объемы равны: $S_1 v_1 \mathrm{d}t = S_2 v_2 \mathrm{d}t$, откуда следует уравнение неразрывности:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (6.1)$$

6.2. Уравнение Бернулли

При течении реальной жидкости между отдельными слоями возникают силы, называемые силами внутреннего трения, которые тормозят движение. Однако в некоторых случаях они оказывают незначительное действие на движение жидкости и ими можно пренебречь. Такая воображаемая жидкость, у которой отсутствует внутреннее трение, называется идеальной жидкостью. Известный американский физик Р. Фейнман назвал такую жидкость «сухой водой».

Выделим в потоке идеальной жидкости трубку тока (рис. 6.2), внутри которой жидкость движется слева направо. Рассмотрим массу жидкости M, находящуюся между сечениями S_1 и S_2. Пусть в месте сечения S_1 скорость течения $\vec{v}_1$, давление p_1 и высота, на которой расположено сечение, h_1, а в месте расположения сечения S_2 скорость $\vec{v}_2$, давление p_2 и высота h_1.

Пусть за короткий промежуток времени $\mathrm{d}t$ жидкость переместилась от сечения S_1 к сечению S_1' и от сечения S_2 к сечению S_2'. Сечение S_1 переместится на расстояние l_1, а сечение S_2 – на расстояние l_1. Эти перемещения малы, так что скорости частиц внутри объемов между S_1 и S_1', а также между S_2 и S_2' остаются посто-

янными и равными соответственно v_1 и v_2. Согласно уравнению непрерывности, объемы жидкостей между S_1 и S_1' (объем V_1) и между S_2 и S_2' (объем V_2) одинаковы:

$$S_1 v_1 \mathrm{d}t = S_1 l_1 = V_1 = S_2 v_2 \mathrm{d}t = S_2 l_2 = V_2 = V. \qquad (6.2)$$

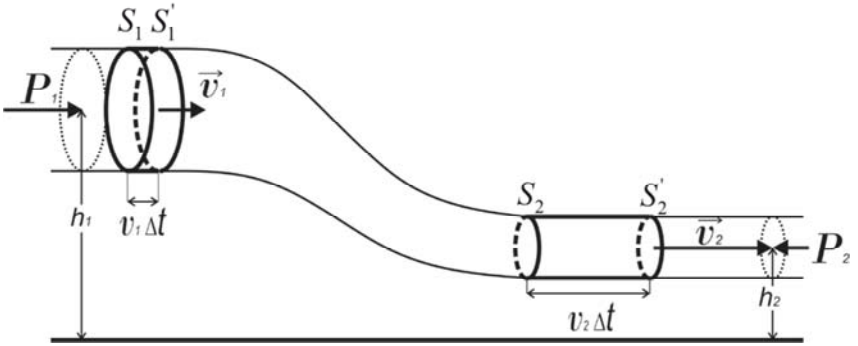


Рис. 6.2. К выводу формулы Бернулли

Соответственно, и массы жидкостей в этих объемах равны. Обозначим их m.

Масса жидкости M потеряет энергию, которой она обладала в объеме V_1, но приобретет энергию в объеме V_2. Давление p_1 и сила F_1 направлена по течению, а давление p_2 и сила F_2 – против. Поэтому работа этих сил:

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2. \qquad (6.3)$$

Данная работа равна разности полных энергий в объемах V_1 и V_2:

$$A = E_2 - E_1. \qquad (6.4)$$

Энергии жидкостей в объемах V_1 и V_2 равны сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1; \tag{6.5}$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2; \tag{6.6}$$

$$p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1.$$

Так как $m = \rho V$, где ρ – плотность жидкости, и учитывая формулу (6.2), получаем:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 - \frac{\rho v_1^2}{2} - \rho g h_1,$$

откуда следует

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Так как трубка тока и сечения выбирались произвольно, то можно записать:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}. \tag{6.7}$$

Выражение (6.7) носит название уравнение Бернулли по имени швейцарского физика, который впервые его получил. Оно отражает закон сохранения энергии для стационарного (установившегося) течения жидкости. Уравнение хорошо выполняется и для реальных жидкостей, в которых внутреннее трение невелико.

Слагаемое $\rho g h$ представляет собой *гидростатическое* давление. Величина p называется *статическим* давлением, это давление, оказываемое жидкостью на поверхность обтекаемого ею тела. Величина $\frac{\rho v^2}{2}$ представляет собой динамическое давление.

Из уравнения Бернулли следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе с различным поперечным сечением давление выше там, где скорость меньше, т. е. там, где поперечное сечение больше.

Скорость жидкости входит в формулу для динамического давления. Поэтому уравнение Бернулли позволяет определять скорость течения.

Поместим в жидкость изогнутую трубку с входным отверстием, ориентированным навстречу потоку (рис. 6.3). Такую трубку называют трубкой Пито. Непосредственно перед отверстием скорость равна нулю, поэтому согласно уравнению Бернулли, давление здесь выше, чем давление p в невозмущенном объеме на величину $\rho v^2/2$. Поэтому манометр, соединенный с трубкой Пито, покажет давление $p + \rho v^2/2,$ которое называется полным.

Введем в поток изогнутую трубку с закрытым концом и боковыми отверстиями (рис. 6.4). Она называется зонд. Скорость жидкости вблизи отверстий, а, соответственно, и давление, мало отличаются от данных величин в невозмущенном потоке. Поэтому манометр, присоединенный к трубке, покажет статическое давление.

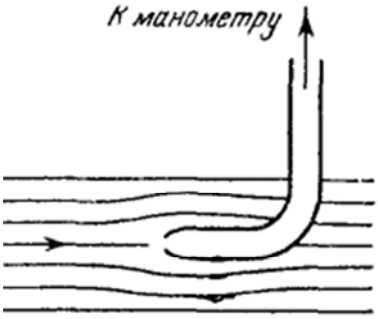


Рис. 6.3. Трубка Пито

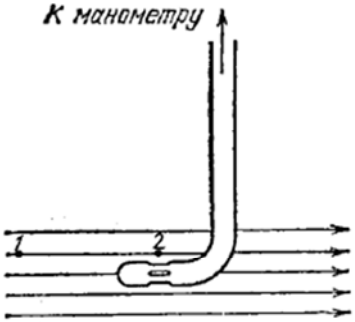


Рис. 6.4. Зонд

Немецкий ученый Прандтль соединил трубку Пито с зондом (рис. 6.5). Такая трубка называется трубка Пито–Прандтля. Если ее выходы присоединить к манометру, измеряющему разность давлений (он называется дифференциальный манометр), то он покажет разность полного и статического давлений, т. е. динамическое дав-

ление $\rho v^2/2$. Зная плотность жидкости и динамическое давление, можно определить скорость жидкости.

Уменьшение статического давления в точках, где скорость выше, лежит в основе устройства водоструйного насоса (рис. 6.6). Струя воды подается в трубку, которая открыта в атмосферу, так что давление в верхней широкой части трубки равно атмосферному. Оно уменьшается в месте, где трубка сужается, так как там, согласно уравнению неразрывности, скорость течения выше. Это давление устанавливается и в сосуде, из которого откачивается воздух. Он соединен с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается водой, вытекающей с большой скоростью из узкого конца. Таким путем можно откачать воздух из сосуда до давления 100 мм ртутного столба (13,3 кПа).

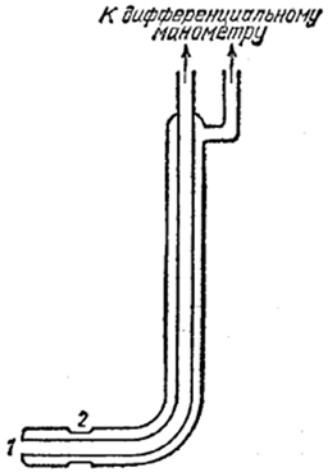


Рис. 6.5. Трубка Пито–Прандтля

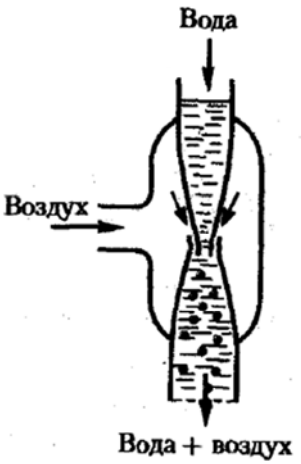


Рис. 6.6. Водоструйный насос

6.3. Формула Торичелли

С помощью формулы Бернулли можно определить скорость, с которой жидкость вытекает через отверстие в сосуде.

Предположим, имеется цилиндрический сосуд (рис. 6.7), наполненный жидкостью, внизу которого имеется узкое отверстие, расположенное ниже уровня жидкости в сосуде.

Рассмотрим два сечения. Одно из них (S_1) находится на уровне свободной поверхности, а второе (S_2) – на уровне выхода жидкости из сосуда. Применим уравнение Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

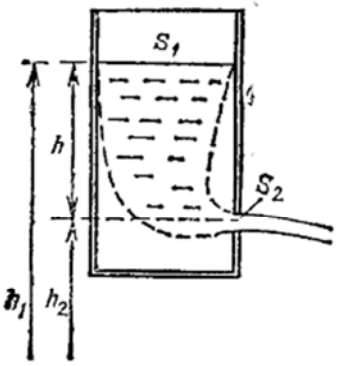


Рис. 6.7. Истечение жидкости из сосуда

Если давления p_1 и p_2 на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, то уравнение принимает вид:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Из уравнения неразрывности следует, что $v_2 / v_1 = S_1 / S_2$. Если $S_1 >> S_2$, слагаемым $\frac{\rho v_1^2}{2}$ можно пренебречь. Тогда $\rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$ или $\frac{v_2^2}{2} = g h_1 - g h_2 = g(h_1 - h_2) = gh$, где h – высота сечения S_1 относительно S_2. Отсюда следует

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Эта формула называется формулой Торичелли.

6.4. Вязкость жидкости. Ламинарный и турбулентный режимы течения. Число Рейнольдса

Как уже отмечалось выше, всякой жидкости присуща вязкость. Это свойство жидкости или газа оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении реальной жидкости между ее слоями действуют силы вяз-

кости (силы внутреннего трения), направленные по касательной к соответствующим слоям. Слой, движущийся быстрее, ускоряет соседний слой, движущийся медленнее. Наоборот, более медленный слой тормозит более быстрый.

Величина сил вязкости тем больше, чем больше площадь поверхности рассматриваемого слоя, и зависит от того, как быстро изменяется скорость движения при переходе от одного слоя к соседнему, т. е. как быстро изменяется скорость в направлении x, перпендикулярном направлению движения жидкости.

Предположим, некоторый слой движется со скоростью $\vec{v}_1$, а параллельный ему слой, находящийся на расстоянии, равном Δx, со скоростью $\vec{v}_2$ (рис. 6.8). Пусть $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

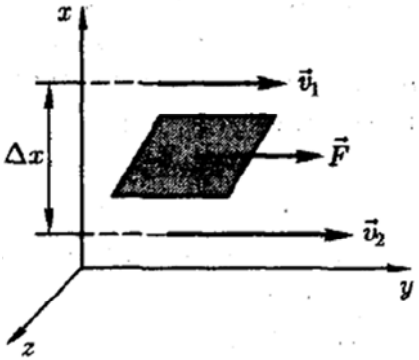


Рис. 6.8. К определению силы вязкости

Отношение $\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ называется градиентом скорости и показывает, как быстро изменяется скорость при переходе от одного слоя к другому в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоев.

Таким образом, для силы вязкости имеем:

$$F = \eta \left|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right| S. \qquad (6.8)$$

где η – динамическая вязкость (или просто вязкость). Ее размерность – паскаль-секунда (Па·с). 1 Па·с – динамическая вязкость среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости 1 м/с на 1 м, возникает сила вязкости, равная 1 Н на 1 м^2 касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м^2).

Жидкость отличается от идеальной тем сильнее, чем больше ее вязкость. Вязкость жидкостей зависит от температуры, она уменьшается с ростом последней. Этим жидкости отличаются от газов, у которых вязкость усиливается при росте температуры.

Уникальное свойство жидкого гелия было открыто российским физиком П. Л. Капицей. При T = 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Течение жидкости может быть двух типов. Ламинарным или слоистым называется течение, при котором каждая тонкая трубка тока скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними. В случае турбулентного или вихревого течения вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости.

Ламинарное течение происходит при небольших скоростях течения. Внешний слой жидкости, примыкающий к трубе, в результате сильного взаимодействия с атомами материала трубы прилипает к ней и остается неподвижным. Скорость последующих слоев постепенно возрастает, она достигает максимума на оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скорости, перпендикулярные границам слоев. Они могут переходить из одного слоя в другой. При удалении от поверхности трубы скорость частиц быстро растет, затем изменяется медленно. У поверхности трубы часто возникают вихри. В середине трубы скорость почти не изменяется.

Профиль скорости при ламинарном течении параболический, а при турбулентном отличен от него (рис. 6.9).

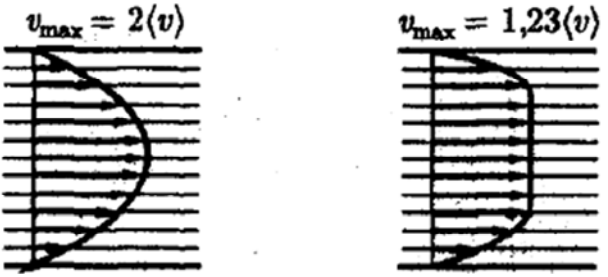


Рис. 6.9. Профили скоростей при ламинарном (*а*) и турбулентном (*б*) течениях

Характер течения определяется числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho < v > d}{\eta} = \frac{< v > d}{\nu},$$

где ρ – плотность жидкости;

$\langle v \rangle$ – средняя по сечению скорость течения;

d – характерный размер, например, диаметр трубы;

$\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ – кинематическая вязкость.

Ламинарное течение происходит до значений $\mathrm{Re} \sim 1000$. В интервале $1000 \le \mathrm{Re} \le 2000$ происходит переход от ламинарного к турбулентному, а при $\mathrm{Re} = 2300$ течение турбулентно.

6.5. Формула Пуазейля

Изучая ламинарное течение жидкости по трубе, Пуазейлю удалось определить закон, по которому распределена скорость течения вдоль радиуса, перпендикулярного к оси.

Выделим в трубе круглого сечения радиуса R, по которой происходит ламинарное стационарное течение жидкости, цилиндрик радиусом r и длиной l (рис. 6.10). Оси трубы и цилиндрика совпадают. Так как течение стационарное, жидкость в объеме цилиндрика движется без ускорения и векторная сумма сил, действующих на него, равна нулю.

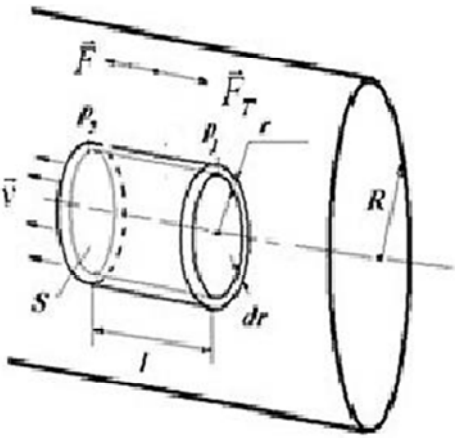


Рис. 6.10. К выводу формулы Пуазейля

В направлении движения действует сила $F = \pi r^2 p_2$, а в противоположном $F = \pi r^2 p_1$. Результирующая сила давления равна:

$$F = \pi r^2 (p_1 - p_2). \tag{6.9}$$

На боковую поверхность цилиндра в направлении против движения в соответствии с формулой (6.8) действует сила:

$$F_T = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2\pi r l, \tag{6.10}$$

где $2\pi r l$ – площадь боковой поверхности цилиндра;

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ – значение производной на расстоянии r от оси трубы.

Приравняв (6.9) и (6.10), получим дифференциальное уравнение:

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2\pi r l.$$

После разделения переменных получим:

$$\mathrm{d}v = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r \mathrm{d}r.$$

После интегрирования получим:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \tag{6.11}$$

Постоянную C найдем из условия, что на стенке трубы (т. е. при $r = R$) скорость должна обращаться в нуль. Тогда $C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2$. Подставив это значение в (6.11), получим:

$$v = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} (R^2 - r^2). \tag{6.12}$$

На оси трубы $(r = 0)$ скорость:

$$v_0 = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \qquad (6.13)$$

С учетом (6.13) формулу (6.12) можно переписать так:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Из этой формулы видно, что скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону.

Теперь можно вычислить поток жидкости, т. е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени. Для этого разобьем сечение трубы на узкие кольца шириной $\mathrm{d}r$. Площадь такого кольца радиусом r равна $2\pi r \mathrm{d}r$. Поток жидкости через кольцо:

$$\mathrm{d}Q = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r \mathrm{d}r.$$

Чтобы получить поток через все сечение, последнее выражение нужно проинтегрировать от нуля до радиуса трубы:

$$Q = \int_0^R \left[v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) 2\pi r \right] \mathrm{d}r.$$

Вынося общий множитель, получим:

$$Q = v_0 2\pi \left(\int_0^R r \mathrm{d}r - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right).$$

Так как

$$\int_0^R r \mathrm{d}r = \frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \frac{R^2}{2}; \qquad \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{R^4}{4},$$

то

$$Q = 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right).$$

Окончательно имеем:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi R^4}{8\eta l}. \qquad (6.14)$$

Это формула Пуазейля.

6.6. Движение тел в жидкостях и газах

Изучение сил, действующих на тела, движущиеся в жидкостях и газах, является очень важной задачей, так как бурно развиваются авиация и мореплавание.

На тело, движущееся в газе или жидкости, действуют две силы. Одна из них – ***лобовое сопротивление*** $\vec{R}_x$ – направлена в сторону против движения тела (или в направлении обтекающего потока). Вторая – ***подъемная сила*** $\vec{R}_y$ – направлена перпендикулярно первой (рис. 6.11).

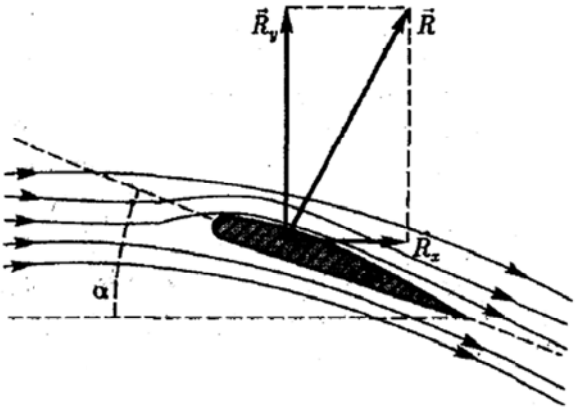


Рис. 6.11. Силы, действующие на тело, движущееся в потоке газа или жидкости

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, подъемная сила отсутствует и действует только лобовое сопротивление. В идеальной жидкости при равномерном движении отсутствовало бы и оно.

Картина изменяется в вязкой жидкости. В области, соприкасающейся с поверхностью тела, образуется пограничный слой, движущийся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц, и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекающей формы (хвостовая часть плавно не утончается), то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом образуется течение жидкости (газа), направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны.

Лобовое сопротивление можно значительно уменьшить, подобрав такую форму тела, которая не приводит к завихрениям.

Для крыла самолета требуется как можно большая подъемная сила при малом лобовом сопротивлении. Это достигается при малых углах атаки α (рис. 6.11).

Вопросы к главе 6

1. Что отражает уравнение неразрывности?
2. Приведите уравнение Бернулли. Что оно отражает?
3. В чем заключается вязкость жидкости?
4. Чем определяется сила вязкости?
5. Какие существуют два типа течения жидкости?
6. Что определяет число Рейнольдса?
7. Что определяет формула Пуазейля? Для какого вида течения жидкости она справедлива?
8. Какие силы действуют на тело, движущееся в потоке газа или жидкости?

7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

7.1. Преобразования Галилея

Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему K (с координатами x, y, z), которую будем считать неподвижной, и систему K' (с координатами x', y', z') (рис. 7.1), движущуюся относительно K равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{u} = \text{const}$.

В начальный момент времени начала координат O и O' этих систем совпадают. В произвольный момент времени t: $\vec{r} = \vec{u}t$. Для произвольной точки A имеем: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t$. Или в проекциях на оси координат:

$$x = x' + u_x t;\ \ y = xy + u_y t;\ \ z = z' + u_z t.$$

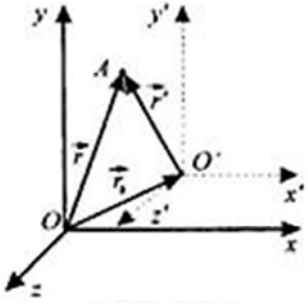


Рис. 7.1. Положение точки A в системе K и K'

Эти соотношения называются ***преобразованиями координат Галилея.*** Продифференцировав их по времени, получим правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета, поэтому к преобразованиям Галилея можно добавить еще одно соотношение:

$$t = t'.$$

Ускорение в системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково, так как:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}' + \vec{u})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{dt} = \vec{a}',$$

так как $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0.$

Это и служит доказательством **принципа относительности Галилея**: в классической механике, при скоростях тел значительно меньших, чем скорость света ($v << c$), ***законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета***.

Таким образом, из соотношения для ускорений вытекает подтверждение механического принципа относительности: уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой не изменяются, т. е. являются **инвариантными** по отношению к преобразованиям координат. Галилей обратил внимание, что никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно. Например, сидя в каюте корабля, движущегося равномерно и прямолинейно, мы не можем определить, покоится корабль или движется, не выглянув в окно.

7.2. Опыт Майкельсона–Морли

Классическая механика Ньютона прекрасно описывает движение макротел, движущихся с малыми скоростями ($v << c$). Однако возникли затруднения при попытках применить механику Ньютона к объяснению распространения света. Если источник и приемник света движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, то, согласно классической механике, измеренная скорость должна зависеть от относительной скорости их движения. Американский физик А. Майкельсон (1852–1913) в 1881 г., а затем в 1887 г. совместно с Е. Морли (американский физик, 1838–1923) пытался обнаружить движение Земли относительно эфира (эфирный ветер) – **опыт Майкельсона–Морли**, применяя интерферометр, названный впоследствии интерферометром Майкельсона (рис. 7.2). В интерферометре луч от источника раздваивался, часть его шла параллельно скорости Земли, часть перпендикулярно.

После отражения от зеркал лучи встречались в одной точке и создавали интерференционную картину. Никакой разницы во времени прохождения обоих путей обнаружено не было.

Опыт повторили через полгода, когда Земля в своем орбитальном движении повернула в противоположную сторону. Результат оказался тем же.

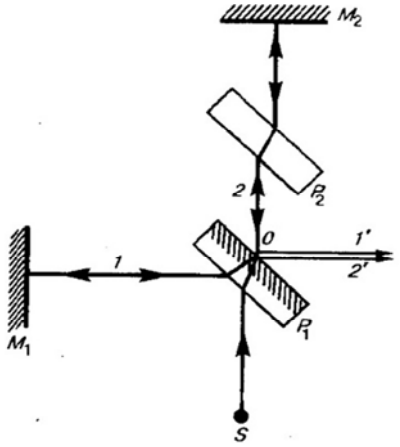


Рис. 7.2. Интерферометр Майкельсона

Обнаружить эфирный ветер Майкельсону не удалось, как, впрочем, не удалось его обнаружить и в других многочисленных опытах. Опыты показывали, что скорости света в двух движущихся друг относительно друга системах равны. Это противоречило правилу сложения скоростей классической механики.

Одновременно было показано противоречие между классической теорией и уравнениями Дж. К. Максвелла (английский физик, 1831–1879), лежащими в основе понимания света как электромагнитной волны.

Для объяснения этих и некоторых других опытных данных необходимо было создать новую механику, которая, объясняя эти факты, содержала бы ньютоновскую механику как предельный случай для малых скоростей ($v << c$).

Это и удалось сделать А. Эйнштейну, который пришел к выводу о том, что мирового эфира – особой среды, которая могла бы быть принята в качестве абсолютной системы, – не существует. Существование постоянной скорости распространения света в вакууме находилось в согласии с уравнениями Максвелла.

7.3. Постулаты Эйнштейна

В основе специальной теории относительности лежат **постулаты Эйнштейна**, сформулированные им в 1905 г.

I. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны* по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. Принцип инвариантности скорости света: *скорость света в вакууме* не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и *одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Первый постулат Эйнштейна, являясь обобщением механического принципа Галилея *на любые физические процессы,* утверждает, что физические законы инвариантны по отношению к выбору инерциальной системы отсчета, а уравнения, описывающие эти законы, одинаковы по форме во всех инерциальных системах отсчета. Согласно этому постулату, все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны, т. е. явления (механические, электродинамические, оптические и др.) во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково.

Согласно второму постулату Эйнштейна, *постоянство скорости света – фундаментальное свойство природы,* которое констатируется как опытный факт.

Специальная теория относительности потребовала отказа от привычных представлений о пространстве и времени, принятых в классической механике, поскольку они противоречили принципу постоянства скорости света. Потеряло смысл не только абсолютное пространство, но и абсолютное время.

Постулаты Эйнштейна и теория, построенная на их основе, установили новый взгляд на мир и новые пространственно-временные представления, такие, например, как относительность длин и промежутков времени, относительность одновременности событий. Эти и другие следствия из теории Эйнштейна находят надежное экспериментальное подтверждение, являясь тем самым обоснованием постулатов Эйнштейна – обоснованием специальной теории относительности.

7.4. Преобразования Лоренца

Анализ явлений в инерциальных системах отсчета, проведенный А. Эйнштейном на основе сформулированных им постулатов, показал, что классические преобразования Галилея несовместимы с ними и, следовательно, должны быть заменены преобразованиями, удовлетворяющими постулатам теории относительности.

Для доказательства этого вывода рассмотрим две инерциальные системы отсчета: K (с координатами x, y, z) и K' (с координатами x',

y', z'), движущуюся относительно K (вдоль оси x) со скоростью v = const (рис. 7.3). Пусть в начальный момент времени $t = t' = 0$, когда начала координат O и O' совпадают, излучается световой импульс по направлению оси x. Согласно второму постулату Эйнштейна, скорость света в обеих системах одна и таже и равна c. Поэтому если за время t в системе K сигнал дойдет до некоторой точки A (рис. 7.3), пройдя расстояние $x = ct$, то в системе K' координата светового импульса в момент достижения точки A $x' = ct'$. где t' – время прохождения светового импульса от начала координат до точки A в системе K'. Вычитая, получаем $x' - x = c(t' - t)$. Так как $x' \neq x$ (система K' перемещается по отношению к системе K), то $t' \neq t$, т. е. отсчет времени в системах K и K' различен – *отсчет времени имеет относительный характер* (в классической физике считается, что время во всех инерциальных системах отсчета течет одинаково, т. е. $t = t'$).

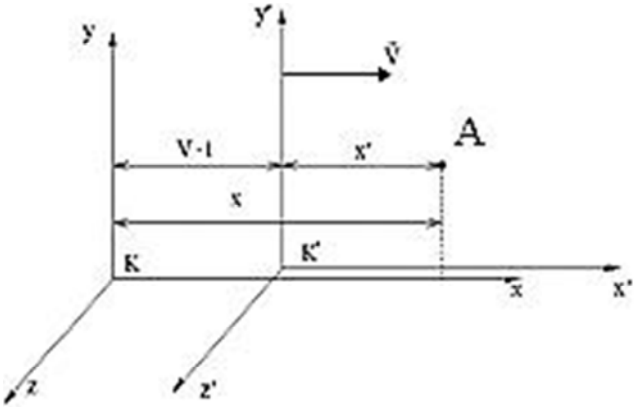


Рис. 7.3. Системы отсчета K и K'

Эйнштейн показал, что в теории относительности классические преобразования Галилея, описывающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, необходимо заменить преобразованиями Лоренца, удовлетворяющими постулатам Эйнштейна.

Эти преобразования предложены Лоренцем в 1904 г., еще до появления теории относительности, как преобразования, относительно которых уравнения Максвелла ковариантны (то есть, которые не

меняют вида законов электродинамики и оптики при переходе к другой системе отсчета).

Получим преобразования Лоренца. В общем случае преобразование координат и времени от системы K к системе K', в нашем случае, выглядят следующим образом:

$$x = f_1(x', t'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = f_2(x', t').$$

Из однородности времени и пространства и для выполнения первого постулата следует, что эти зависимости должны быть линейными.

Начало координат системы K точка O имеет координату $x = 0$ в системе K и $x' = -vt'$ в системе K'. Т. е., выражение должно обращаться в нуль одновременно с координатой x. Для этого они должны быть связаны соотношением:

$$x = a(x' + vt'). \tag{7.1}$$

Аналогично, начало координат O' системы K' имеет координату $x' = 0$ в системе K' и $x = vt$ в системе K. Отсюда следует, что:

$$x' = a(x - vt). \tag{7.2}$$

Из равноправия систем K и K' вытекает, что коэффициент пропорциональности a в обоих случаях один и тот же.

Для нахождения коэффициента a используем второй постулат (одинаковость скорость света в различных системах отсчета). Пусть отсчет времени начался с того момента, когда их начала координат совпадают, и в момент времени $t = t' = 0$ в направлении осей x и x' посылается короткий световой импульс, который произведет вспышку света на экране с координатой x в системе K в момент времени t, и с координатой x' в системе K' в момент времени t'. Тогда $x = ct$, $x' = ct'$, и подставим эти значения в формулы (7.1), (7.2). Получим:

$$ct = a(ct' + vt' = a(c + v)t';$$

$$ct' = a(ct - vt) = a(c - v)t.$$

Перемножив оба уравнения, придем к уравнению:

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2).$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (7.3)$$

Подстановка в (7.2) приводит к формуле:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (7.4)$$

Формула (7.4) позволяет по известным значениям x и t найти значения x'. Чтобы получить формулу, позволяющую по известным значениям x и t найти значения t', исключим из (7.1), (7.2) координату x' и выразим t'. В результате получим:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, собрав все это вместе, можно записать:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (7.5)$$

Это и есть **преобразования Лоренца** для перехода из системы отсчета K к системе отсчета K'. При переходе из K' в K путем аналогичных преобразований получаются следующие формулы:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (7.6)$$

Из сравнения уравнений (7.5), (7.6) вытекает, что они симметричны и отличаются лишь знаком при скорости v.

Из преобразований Лоренца следует, что при малых скоростях (по сравнению со скоростью c), т. е. когда $\frac{v}{c} << 1$, они переходят в классические преобразования Галилея, которые являются, следовательно, предельным случаем преобразований Лоренца. При $v > c$ выражения (7.5), (7.6) для x, t, x', t' теряют физический смысл (становятся мнимыми). Это находится, в свою очередь, в соответствии с тем, что движение со скоростью, бóльшей скорости распространения света в вакууме, невозможно.

Существует форма преобразований Лоренца при произвольной ориентации осей координат для случая параллельных осей, но с произвольно направленной скоростью, и др.

7.5. Следствия из преобразований Лоренца

1. Четырехмерное пространство-время. Из преобразований Лоренца следует, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, в то время как в рамках преобразований Галилея эти величины считались независимыми, абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Таким образом, теория Эйнштейна оперирует не с трехмерным пространством, к которому присоединяется понятие времени, а рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

2. Одновременность событий в разных системах отсчета. Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. В системе K' им соответствуют координаты x_1' и x_2' и моменты времени t_1' и t_2'. Если *события*

в системе K происходят в одной точке ($x_1 = x_2$) и *являются одновременными* ($t_1 = t_2$), то согласно преобразованиям Лоренца (7.5):

$$x_1' = x_2'; \qquad t_1' = t_2'.$$

т. е. *эти события являются одновременными и пространственно совпадающими для любой инерциальной системы отсчета.*

Если *события в системе K происходят не в одном месте* ($x_1 \neq x_2$), *но одновременны* ($t_1 = t_2$), *то в системе K′*, согласно преобразованиям Лоренца (7.5):

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

получается $x_1' \neq x_2'$ и $t_1' \neq t_2'$.

Таким образом, в системе K' эти события, *оставаясь пространственно разделенными, оказываются и неодновременными.* Знак разности $t_2' - t_1'$ определяется знаком выражения v, ($x_1 - x_2$), поэтому в различных точках системы отсчета K' (при разных v) разность $t_2' - t_1'$ будет различной по величине и может отличаться по знаку. Следовательно, в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Сказанное, однако, не относится к причинно-следственным событиям, так как можно показать, что порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

3. Длительность событий в разных системах отсчета. Пусть в некоторой точке (с координатой x), покоящейся относительно системы K, происходит событие, длительность которого (разность показаний часов в конце и начале события) $\tau = t_2 - t_1$, где индексы 1 и 2 соответствуют началу и концу события. Длительность этого же события в системе K':

$$\tau' = t_2' - t_1', \tag{7.7}$$

причем началу и концу события, согласно (7.5), соответствуют:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.8}$$

Подставляя (7.8) в (7.7), получаем:

$$\tau' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.9}$$

Из соотношения (7.9) вытекает, что $\tau < \tau'$, т. е. *длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.* Этот результат может быть еще истолкован следующим образом: интервал времени τ', отсчитанный по часам в системе K', с точки зрения наблюдателя в системе K, продолжительнее интервала τ, отсчитанного по его часам. Следовательно, *часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов,* т. е. ход часов замедляется в системе отсчета, относительно которой часы движутся. На основании относительности понятий «неподвижная» и «движущаяся» системы соотношения для τ и τ' обратимы. Из формулы (7.9) следует, что замедление хода часов становится заметным лишь при скоростях, близких к скорости распространения света в вакууме.

В связи с обнаружением релятивистского эффекта замедления хода часов в свое время возникла проблема «парадокса часов» (иногда рассматривается как «парадокс близнецов»), вызвавшая многочисленные дискуссии. Представим себе, что осуществляется фантастический космический полет к звезде, находящейся на расстоянии 500 световых лет (расстояние, на которое свет от звезды до Земли доходит за 500 лет), со скоростью, близкой к скорости света ($\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}001$). По земным часам полет до звезды и обратно про-

длится 1000 лет, в то время как для системы корабля и космонавта в нем такое же путешествие займет всего 1 год. Таким образом, космонавт возвратится на Землю в $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ раз более молодым, чем его брат-близнец, оставшийся на Земле. Это явление, получившее название **парадокса близнецов**, в действительности парадокса здесь не содержит. Дело в том, что принцип относительности утверждает равноправность не всяких систем отсчета, а только инерциальных. Неправильность рассуждения состоит в том, что системы отсчета, связанные с близнецами, не эквивалентны: земная система инерциальна, а корабельная – неинерциальна, поэтому к ним принцип относительности неприменим.

Релятивистский эффект замедления хода часов является совершенно реальным и получил экспериментальное подтверждение при изучении нестабильных, самопроизвольно распадающихся элементарных частиц в опытах с π-мезонами. Среднее время жизни покоящихся π-мезонов (по часам, движущимся вместе с ними) составляет $\tau \approx 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ с. Следовательно, π-мезоны, образующиеся в верхних слоях атмосферы (на высоте ≈ 30 км) и движущиеся со скоростью, близкой к скорости *c,* должны были бы проходить расстояния $c\tau \approx 6{,}6$ м, т. е. не могли бы достигать земной поверхности, что противоречит действительности. Объясняется это релятивистским эффектом замедления хода времени. Для земного наблюдателя срок жизни π-мезона:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

а путь этих частиц в атмосфере:

$$v\tau' = \frac{\beta c\tau}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.

Так как $\beta \approx 1$, то $v\tau' >> c\tau$.

4. Длина тел в разных системах отсчета. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K'. Длина стержня в системе K' будет $l'_0 = x'_2 - x'_1$, где x'_1 и x'_2 – не изменяющиеся со временем t' координаты начала и конца стержня, а индекс 0 показывает, что в системе отсчета K' стержень покоится. Определим длину этого стержня в системе K, относительно которой он движется со скоростью v. Для этого необходимо измерить координаты его концов x_1 и x_2 в системе K *в один и тот же момент времени* t. Их разность $l = x_2 - x_1$ и определяет длину стержня в системе K. Используя преобразования Лоренца (7.5), получим:

$$l'_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

т. е.

$$l = l'_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \qquad (7.10)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$.

Таким образом, длина стержня, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше длины, измеренной в системе, относительно которой стержень покоится.

Из выражения (7.10) следует, что линейный размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчета, уменьшается в направлении движения в $\sqrt{1 - \beta^2}$ раз, т. е. так называемое **лоренцево сокращение длины** *тем больше, чем больше скорость движения*. Из второго и третьего уравнений преобразований Лоренца (7.5) следует, что

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1; \qquad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

т. е. *поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Таким образом, линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится*.

5. Релятивистский закон сложения скоростей. Рассмотрим движение материальной точки в системе K', в свою очередь движущейся относительно системы K со скоростью v. Определим скорость этой же точки в системе K. Если в системе K движение точки в каждый момент времени t определяется координатами x, y, z, а в системе K' в момент времени t' – координатами x', y', z', то

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};\quad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};\quad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t};\quad u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t};\quad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t};\quad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}$$

представляют собой соответственно проекции на оси x, y, z и x', y', z' вектора скорости рассматриваемой точки относительно систем K и K'.

Согласно преобразованиям Лоренца (7.6), и учитывая, что $\beta = \frac{v}{c}$:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\beta^2}};\quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y';\quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z';\quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Произведя соответствующие преобразования, получаем **релятивистские законы сложения скоростей** специальной теории относительности при переходе от системы K' к системе K:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}};\quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}};\quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \qquad (7.11)$$

А при переходе от системы K к системе K':

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}};\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}};\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu'_x}{c^2}}. \qquad (7.12)$$

Можно убедиться в том, что если скорости v, u' и u малы по сравнению со скоростью c, то формулы (7.11) и (7.12) переходят

в закон сложения скоростей в классической механике (преобразования Галилея). Таким образом, законы релятивистской механики в предельном случае для малых скоростей (по сравнению со скоростью распространения света в вакууме) переходят в законы классической физики, которая, следовательно, является частным случаем механики Эйнштейна для малых скоростей.

6. Интервал между событиями. Преобразования Лоренца и следствия из них приводят к выводу об относительности длин и промежутков времени, значение которых в различных системах отсчета разное. В то же время относительный характер длин и промежутков времени в теории Эйнштейна означает относительность отдельных компонентов какой-то реальной физической величины, не зависящей от системы отсчета, т. е. являющейся *инвариантной* по отношению к преобразованиям координат. В четырехмерном пространстве Эйнштейна, в котором каждое событие характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, t), такой физической величиной является **интервал** между двумя событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (7.13)$$

где $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – расстояние между точками трехмерного пространства, в которых эти события произошли. Интервал между двумя событиями s_{12} одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца.

Обобщая полученные результаты, можно сделать вывод, что интервал, определяя пространственно-временные соотношения между событиями, является инвариантом при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Инвариантность интервала означает, что, несмотря на относительность длин и промежутков времени, течение событий носит объективный характер и не зависит от системы отсчета.

Теория относительности, таким образом, сформулировала новое представление о пространстве и времени. Пространственно-временные отношения являются не абсолютными величинами, как утверждала механика Галилея–Ньютона, а относительными. Следовательно, представления об абсолютном пространстве и времени являются

несостоятельными. Кроме того, инвариантность интервала между двумя событиями свидетельствует о том, что пространство и время органически связаны между собой и образуют единую форму существования материи – пространство-время. Пространство и время не существуют вне материи и независимо от нее.

Дальнейшее развитие теории относительности (**общая теория относительности** или **теория тяготения**) показало, что свойства пространства-времени в данной области определяются действующими в ней полями тяготения. При переходе к космическим масштабам геометрия пространства-времени не является евклидовой (т. е. не зависящей от размеров области пространства-времени), а изменяется от одной области к другой в зависимости от концентрации масс в этих областях и их движения.

7.6. Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Масса движущихся частиц зависит от их скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (7.14)$$

где m_0 – масса покоя частицы, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчета, относительно которой частица находится в покое;

c – скорость света в вакууме;

m – масса частицы в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v. Следовательно, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчета.

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца. Основной закон динамики Ньютона:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца, если в нем справа стоит производная по времени *от релятивистского импульса*.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\right) \tag{7.15}$$

или

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}, \tag{7.16}$$

где

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}. \tag{7.17}$$

представляет собой **релятивистский импульс** материальной точки.

Уравнение (7.16) внешне совпадает с основным уравнением ньютоновской механики. Однако физический смысл его другой: справа стоит производная по времени *от релятивистского импульса*, определяемого формулой (7.17). Таким образом, уравнение (7.15) инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Следует учитывать, что ни импульс, ни сила не являются инвариантными величинами. Более того, в общем случае ускорение не совпадает по направлению с силой.

В силу *однородности пространства* в релятивистской механике выполняется **закон сохранения релятивистского импульса:** релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени. Часто вообще не оговаривают, что рассматривают релятивистский импульс, так как если тела движутся со скоростями, близкими к c, то можно использовать только релятивистское выражение для импульса.

Анализ формул (7.15), (7.16) и (7.17) показывает, что при скоростях, значительно меньших скорости c, уравнение (7.16) переходит

в основной закон классической механики. Следовательно, условием применимости законов классической (ньютоновской) механики является условие $v << c$. Законы классической механики получаются как следствие теории относительности для предельного случая $v << c$ (формально переход осуществляется при $c \to \infty$). Таким образом, *классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (по сравнению со скоростью света в вакууме).

Экспериментальное доказательство зависимости массы от скорости (7.14) является подтверждением справедливости специальной теории относительности.

7.7. Закон взаимосвязи массы и энергии

Найдем кинетическую энергию релятивистской частицы. Раньше было показано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}. \tag{7.18}$$

Учитывая, что $\mathrm{d}r = v\mathrm{d}t$, и подставив в (7.1) выражение (7.14), получаем:

$$\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right)\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right) = v\mathrm{d}v\frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} +$$

$$+ v^2\mathrm{d}v\frac{\frac{m_0 v}{c^2}}{\left(\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\right)^3} = \frac{m_0 v\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\right)^3} = \mathrm{d}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right).$$

Таким образом, получили:

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right) = c^2\mathrm{d}m, \tag{7.19}$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению ее массы.

Так как кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а ее масса равна массе покоя m_0, то, проинтегрировав (7.19), получим:

$$T = mc^2 \tag{7.20}$$

или кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1\right). \tag{7.21}$$

Выражение (7.21) при скоростях $v << c$ переходит в классическое:

$$T = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

А. Эйнштейн обобщил положение (7.19), предположив, что оно справедливо не только для кинетической энергии частицы, но и для полной энергии, а именно любое изменение массы Δm сопровождается изменением полной энергии частицы:

$$\Delta E = c^2 \Delta m. \tag{7.22}$$

Отсюда А. Эйнштейн пришел к универсальной зависимости между полной энергией тела E и его массой m:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}. \tag{7.23}$$

Уравнение (7.23), равно как и (7.22), выражает *фундаментальный закон природы* – **закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии:** полная энергия системы равна произведению

ее массы на квадрат скорости света в вакууме. Отметим, что в полную энергию E не входит потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

Из уравнения (7.23), учитывая выражение (7.20), можно записать, что покоящееся тело ($T = 0$) также обладает энергией:

$$m = \frac{E}{c^2},$$

называемой **энергией покоя**. В классической механике энергия покоя E_0 не учитывается, считая, что при $v = 0$ энергия покоящегося тела равна нулю.

В силу *однородности времени* в релятивистской механике, как и в классической, выполняется **закон сохранения энергии**: полная энергия замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Из формул (7.23) и (7.17) найдем релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом частицы:

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + p^2c^2. \qquad (7.27)$$

Возвращаясь к уравнению (7.23), отметим еще раз, что оно имеет *универсальный характер.* Оно применимо ко всем формам энергии, т. е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она ни была, связана масса:

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad (7.28)$$

и, наоборот, со всякой массой связана энергия (7.23).

Чтобы охарактеризовать прочность связи и устойчивость системы каких-либо частиц (например, атомного ядра как системы из протонов и нейтронов), вводят понятие энергии связи. **Энергия связи системы** равна работе, которую необходимо затратить, чтобы разложить эту систему на составные части (например, атомное ядро – на протоны и нейтроны). Энергия связи системы:

$$E_{\text{св}} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i}c^2 - M_0c^2, \qquad (7.29)$$

где m_{0i} – масса покоя i-й частицы в свободном состоянии;

M_0 – масса покоя системы, состоящей из n частиц.

Закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии блестяще подтвержден экспериментом о выделении энергии при протекании ядерных реакций. Он широко используется для расчета энергетических эффектов при ядерных реакциях и превращениях элементарных частиц.

Рассматривая выводы специальной теории относительности, видим, что она, как и любые крупные открытия, потребовала пересмотра многих установившихся и ставших привычными представлений. Масса тела не остается постоянной величиной, а зависит от скорости тела; длина тел и длительность событий не являются абсолютными величинами, а носят относительный характер; наконец, масса и энергия оказались связанными друг с другом, хотя они и являются качественно различными свойствами материи.

Основной вывод теории относительности сводится к тому, что пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи – пространство-время. Только поэтому пространственно-временной интервал между двумя событиями является абсолютным, в то время как пространственные и временные промежутки между этими событиями относительны. Следовательно, вытекающие из преобразований Лоренца следствия являются выражением объективно существующих пространственно-временных соотношений движущейся материи.

Вопросы к главе 7

1. В чем физическая сущность механического принципа относительности?
2. В чем заключается правило сложения скоростей в классической механике?
3. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?
4. В чем заключаются основные постулаты специальной теории относительности?

5. Зависит ли от скорости движения системы отсчета скорость тела, скорость света?

6. Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

7. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?

8. Какие следствия вытекают из специальной теории относительности для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчета?

9. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

10. В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей?

11. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона классической механики?

12. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии.

8. ГРАВИТАЦИЯ

8.1. Закон всемирного тяготения

Гравитацией (или тяготением) называют универсальное взаимодействие (притяжение) между любыми видами материи.

В 1768 г. Исаак Ньютон установил закон всемирного тяготения, формулируемый следующим образом.

Две материальные точки с массами m_1 и m_2 притягивают друг друга с силой, пропорциональной массам этих точек и обратно пропорциональной расстоянию r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (8.1)$$

Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной. Силы притяжения направлены вдоль прямой, соединяющей материальные точки (рис. 8.1).

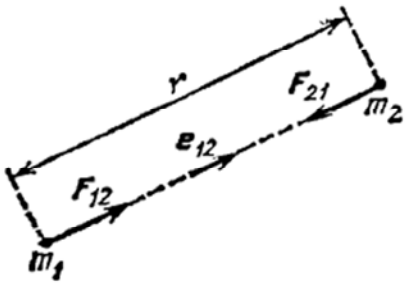


Рис. 8.1. Взаимодействие материальных точек

Сила притяжения $\vec{F}_{12}$, действующая на первую точку со стороны второй, может быть представлена в векторном виде:

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12}. \qquad (8.2)$$

Здесь $\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, проведенный от первой материальной точки ко второй.

Величина G впервые была определена в опыте, поставленном британским физиком Г. Кавендишем в 1798 году. В дальнейшем значение этой величины уточнялось и сейчас принято считать:

$$G = 6,6720 \cdot 10^{-11}\,\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

В случае протяженных тел необходимо разбить эти тела на элементарные массы, которые можно считать материальными точками (рис. 8.2).

Вначале определим силу, с которой тело B притягивает элементарную массу Δm_x тела A. Для этого необходимо просуммировать $\vec{F}_{xi}$ по всем элементарным массам тела B. Далее производится суммирование по всем элементарным массам тела A. Для более точного результата суммирование следует заменить интегрированием.

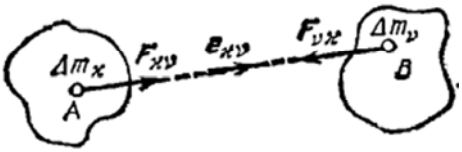


Рис. 8.2. К взаимодействию протяженных тел

В случае однородных шаров задача упрощается. Сила взаимодействия определяется по формуле (8.2), где в качестве r принимают расстояние между центрами шаров.

8.2. Космические скорости

Первой космической скоростью v_1 называется скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно двигалось по круговой орбите вокруг Земли. В данном случае гравитационная сила, действующая на тело со стороны Земли, является центростремительной:

$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv_1^2}{R}. \tag{8.3}$$

Здесь M – масса Земли; m – масса тела; R – радиус описываемой телом окружности. Высота полета обычно не превышает 500 км, что очень мало по сравнению с радиусом Земли, равным 6 400 км. Поэтому можно считать, что в $R = 6\,370$ км. Чтобы определить величину GM, воспользуемся тем, что сила тяжести тела мало отличается от гравитационной: $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$, откуда следует

$$GM = gR^2. \tag{8.4}$$

Подставив это значение в (8.2), получим:

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Второй космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно вышло из области земного притяжения. Начальная кинетическая энергия должна быть равной работе внешних сил по перемещению тела с поверхности Земли в бесконечность:

$$\frac{mv_2^2}{2} = A_{R\infty}.$$

Данная работа равна:

$$A_{R\infty} = \int_R^\infty G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{R}. \qquad (8.5)$$

Подставив это значение в (8.4) и используя (8.3), получим:

$$v_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\, v_1 = 11{,}2 \cdot 10^3 \text{ м/с} \approx 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Величина v_2 не зависит от направления, в котором производится запуск тела с Земли.

Третьей космической скоростью называют скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы. Ее можно определить, если в формуле (8.5) под M понимать массу Солнца ($M = 1{,}97 \cdot 10^{30}$ кг), а под R – радиус Земной орбиты ($R = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ м).

Тогда получаем: $v_3 = \sqrt{2GM / R} = 4{,}2 \cdot 10^4$ м/с $= 42$ км/с. Такую скорость необходимо было бы сообщить телу, если бы Земля была неподвижной относительно Солнца. Но так как скорость ее движения относительно Солнца равна 30 км/с, то при запуске в направлении движения относительно Солнца $v_3 = 42 - 30 = 12$ км/с, а при запуске в противоположном направлении $v_3 = 42 + 30 = 72$ км/с.

Эти значения не учитывают притяжения тела к Земле. При учете данного фактора в зависимости от направления запуска v_3 находится в интервале от 17 км/с до 73 км/с.

8.3. Гравитационное поле

Гравитационное взаимодействие осуществляется посредством гравитационного поля. Всякое тело создает вокруг себя гравитационное поле – изменяет свойства окружающего пространства. Поле проявляет себя таким образом, что на помещенное в него другое тело действует сила.

Гравитационное поле характеризуется векторной величиной:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{8.6}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на тело, масса которого равна m. Величина называется напряженностью гравитационного поля. В случае поля Земли, пренебрегая центробежной силой инерции, величина данной напряженности равна ускорению свободного падения.

Согласно (8.2), сила, действующая на тело массой со стороны Земли, равна:

$$\vec{F} = G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r.$$

Напряженность гравитационного поля Земли $\vec{g}$ равна данной силе, деленной на массу тела:

$$\vec{g} = G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r. \tag{8.7}$$

По формуле (3.33) определяется потенциальная энергия гравитационного взаимодействия. Если в ней одну из масс заменить на массу Земли M, а вторую массу – массой тела m, то для взаимной потенциальной энергии Земли и тела массой m, находящегося от центра Земли на расстоянии, равном r, получаем формулу:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}. \tag{8.8}$$

Вопросы к главе 8

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Как определяется сила гравитационного взаимодействия в случае протяженных тел?
3. Что такое первая космическая скорость? Из какого условия она определяется?
4. Что такое вторая космическая скорость? Из какого условия она определяется?
5. Что такое третья космическая скорость? Из какого условия она определяется?
6. Как осуществляется гравитационное взаимодействие?

9. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

9.1. Статистическая физика и термодинамика

Для описания процессов, проходящих в микроскопических телах (телах, состоящих из большого числа атомов или молекул), существуют два метода – статистический и термодинамический.

Статистическая физика (молекулярная физика) – раздел физики, изучающий свойства макроскопических тел, исходя из свойств частиц, образующих тело, и взаимодействия между этими частицами.

В основе статистической физики лежат три положения:

1. Любое тело, находящееся в жидком, твердом или газообразном состоянии, состоит из мельчайших частиц – молекул или атомов. Молекула – мельчайшая частица вещества, сохраняющая его химические свойства. Атом – мельчайшая частица вещества, которая при химических реакциях не делится.

2. Молекулы находятся в состоянии непрерывного хаотического движения. Характер этого движения зависит от агрегатного состояния вещества. Интенсивность движения растет с ростом температуры. В газах молекулы совершают поступательное движение (многоатомные молекулы совершают также вращательное и колебательное движение). Траектория молекулы в газе представляют собой ломаную линию, причем в точках излома происходит столкновение с другой молекулой или со стенкой сосуда. В жидкостях молекулы совершают колебание относительно некоторого положения равновесия в течение времени τ, называемого временем оседлости. Спустя это время молекулы перескакивают в другое положение равновесия. Таким образом, их движение в жидкостях представляет собой сочетание колебательного движения и перескоков. В твердых телах атомы или ионы колеблются относительно некоторых точек – узлов кристаллической решетки. Узлы расположены в пространстве периодически.

3. Между молекулами действуют силы притяжения и отталкивания. На расстоянии между центрами молекул порядка от двух до десяти радиусов преобладают силы притяжения (это расстояние порядка от 0,2 до 1 нанометра). На расстоянии менее двух радиусов преобладают силы отталкивания.

Опытными обоснованиями этих трех положений являются многочисленные физические явления: диффузия, броуновское движе-

ние, теплопроводность, сопротивляемость газов при сжатии и т. п. Прилипание остатков пищи к стенкам посуды также обусловлено проявлением сил притяжения между молекулами стенок и пищи. Вода, находящаяся между данными молекулами, ослабляет силы притяжения между этими молекулами в 81 раз (это величина диэлектрической проницаемости воды). При испарении воды данные силы возрастают во столько же раз.

Статистическая физика истолковывает свойства тел, непосредственно наблюдаемые на опыте (например, давление газа), как суммарный, усредненный результат действия отдельных молекул. Число молекул огромно. Так, в 1 см³ воздуха при t = 20 ºС и p = 1 атм. содержится $n = 3 \cdot 10^{19}$ см³ молекул. Описать движение каждой молекулы невозможно. Но это и не нужно, так, как в огромной совокупности молекул проявляются качественно новые закономерности, которые называются статистическими. Эти закономерности не проявляются в системах с малым числом частиц и изучаются теорией вероятности. Именно аппарат этой теории и использует статистическая физика. Поэтому результаты носят вероятностный характер.

Термодинамика изучает свойства макроскопических тел и протекающие в них процессы, не вникая в микроскопическую структуру тел. Под телом в термодинамике понимают вещество, занимающее определенный объем. Форма, цвет, внешний вид значение не имеют.

В основе термодинамики лежат три фундаментальных закона, полученных обобщением огромного числа опытных фактов. Эти законы называют началами термодинамики.

Подходя к изучению свойств веществ и происходящих в них процессов с разных точек зрения, статистическая физика и термодинамика взаимно дополняют друг друга.

9.2. Состояние термодинамической системы. Процесс

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, способных обмениваться энергией между собой и с окружающими телами. Примером может служить вода в стакане, в которой плавает лед и окружающий газ, включающий пары воды. В отдельных случаях система может состоять из одного тела.

Термодинамическая система может находится в различных состояниях, отличающихся температурой, давлением, объемом, плот-

ностью и т. п. Такие величины, характеризующие состояние тела, называются *параметрами состояния*.

Данные величины не всегда имеют одно и то же значение для всей системы. Например, при нагревании твердого тела температура слоев, расположенных близко к поверхности, долгое время остается более высокой, чем температура внутренних слоев. Тело нельзя характеризовать одной температурой. Если хотя бы один параметр системы не имеет определенного значения, состояние системы называется *неравновесным*.

Если же все параметры системы имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени, состояние системы называется *равновесным*.

Если термодинамическая система не обменивается с окружающей средой ни энергией, ни веществом, система называется *замкнутой*.

Если замкнутую систему, первоначально находившуюся в неравновесном состоянии, предоставить самой себе, то она с течением времени перейдет в равновесное состояние. Подобный переход называют *процессом релаксации* или просто *релаксацией*. Время, за которое величина первоначального отклонения какого-либо параметра от равновесного значения уменьшается в *e* раз, называется временем релаксации по данному параметру. Временем релаксации системы считают время релаксации для того параметра, для которого оно максимально по сравнению с остальными.

Переход системы из одного состояния в другое называется *термодинамическим процессом*. При этом равновесное состояние системы всегда нарушается.

Рассмотрим сосуд, в котором находится газ, закрытый поршнем, способным перемещаться. Если поршень начать вдвигать внутрь сосуда, в прилегающих к нему слоях газа поднимется давление. При этом равновесие массы газа нарушится. Чем быстрее будет перемещаться поршень, тем сильнее будет нарушение равновесного состояния. Напротив, если поршень перемещать медленно, отклонения от равновесного состояния будут значительно меньше, и значения давления в разных точках объема газа будут различаться незначительно.

В пределе при бесконечно малой скорости перемещения поршня давление газа в различных точках объема будет отличаться на столь малую величину, что его можно считать одинаковым во всех точках

объема в любой момент времени. И состояние газа в любой момент времени можно считать равновесным.

Бесконечно медленный процесс окажется состоящим из последовательности равновесных состояний. Такой процесс называют *равновесным* или *квазистатическим.*

Конечно, реальные процессы протекают с конечной скоростью. Однако их можно считать равновесными, если они протекают так медленно, что отклонения значений параметров от равновесных пренебрежимо малы.

При изменении направления протекания равновесного процесса на противоположное система будет проходить через те же равновесные состояния, что и при прямом ходе процесса, но в обратном порядке. Поэтому равновесные процессы называют также *обратимыми*.

Следует иметь в виду, что не всякий медленный процесс обязательно будет обратимым. В качестве примера можно привести медленную пластическую деформацию.

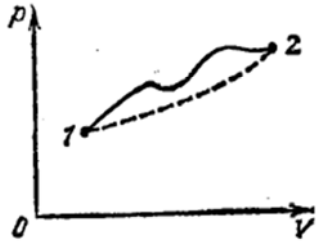


Рис. 9.1. Равновесный (сплошная линия) и неравновесный (пунктир) процессы

На графике (рис. 9.1), например, в координатах p и V или T и V равновесное состояние обозначается в виде точки, а равновесный процесс – в виде сплошной линии. Неравновесные состояния и процессы так изображать нельзя. Неравновесный процесс, протекающий между двумя равновесными состояниями, изображается штриховой линией.

Процесс, в ходе которого после множества изменений система возвращается в исходное состояние, называется *циклическим процессом* или просто *циклом*. На графике он изображается в виде замкнутой кривой.

9.3. Молекулярно-кинетические представления

Как отмечалось выше, каждое тело состоит из мельчайших частиц – молекул. Они находятся в состоянии непрерывного хаотического движения, называемого тепловым.

Первое доказательство существования теплового движения молекул было получено Броуном в 1827 году – так называемое броунов-

ское движение. Оно заключается в том, что очень мелкие, видимые только в микроскоп взвешенные в жидкости твердые частицы, всегда находятся в состоянии непрерывного движения, обусловленного ударами молекул жидкости.

Атомное строение вещества было предложено еще в древней Греции. Однако это было только гениальное предвидение. Значительную роль в развитии атомно-молекулярных представлений сыграли работы М. В. Ломоносова.

Относительной атомной массой A_r называется отношение массы атома данного элемента к 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C.

Относительной молекулярной массой M_r называется отношение массы молекулы данного вещества к 1/12 массы атома изотопа углерода ^{12}C. Как следует из их определения, A_r и M_r являются безразмерными величинами.

Атомной единицей массы (а. е. м., обозначим ее $m_{\text{ат}}$) называется масса, равная 1/12 массы атома изотопа ^{12}C. Величину $m_{\text{ат}}$ определим чуть ниже.

Тогда масса атома равна $A_r \cdot m_{\text{ат}}$, а масса молекулы: $M_r \cdot m_{\text{ат}}$.

Молем вещества называется количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов, электронов или др.), равное числу атомов в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C.

Постоянной Авогадро называется число частиц N_A, содержащихся в моле вещества. На основании опытных данных установлено, что

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \qquad (9.1)$$

Молярной массой M называют массу одного моля. Она равна произведению постоянной Авогадро на массу молекулы:

$$M = N_A \cdot M_r \cdot m_{\text{ат}}. \qquad (9.2)$$

Размерность молярной массы кг/моль.

Для изотопа ^{12}C молярная масса $M = 0{,}012$ кг/моль, а масса атома $12m_{\text{ат}}$. Подставив эти значения в (9.2), получим:

$$0,012 \text{ кг/моль} = N_A \text{ (моль}^{-1}) \cdot 12 \cdot m_{\text{ат}} \text{(кг)};$$

$$m_{\text{ат}}\text{(кг)} = \frac{0,001 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{N_A \text{ моль}^{-1}} = \frac{0,001 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}; \qquad (9.3)$$

$$m_{\text{ат}} = 1,66053 \cdot 10^{-27} \text{ кг (931,57 МэВ)}. \qquad (9.4)$$

Подставив в (9.2) значение $m_{\text{ат}}$(кг) из (9.3), получим:

$$M = N_A \cdot M_r \cdot \frac{0,001 \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{N_A \text{ моль}^{-1}},$$

откуда следует

$$M = 0,001 \cdot M_r \text{ (кг/моль)} \quad \text{или} \quad M = M_r \text{ (г/моль)}.$$

В случае смеси газов молярная масса:

$$M = \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{\nu_1 + \nu_1 + ... + \nu_n},$$

где m_n – масса компоненты под номером n, а ν_n – количество молей данной компоненты.

Зная число Авогадро, можно оценить размеры молекул. Для этого следует использовать данные по жидкостям или твердым телам, так как в них молекулы расположены «вплотную» друг к другу.

Для воды молярный объем $V_m = 0,018 \cdot 10^{-6}$ м^3. Тогда объем, приходящийся на одну молекулу:

$$V_0 = \frac{V_m}{N_A} = \frac{0,018 \cdot 10^{-6}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 30 \cdot 10^{-30} \text{м}^3.$$

Тогда примерные линейные размеры молекулы:

$$\sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{м} = 0,3 \text{ нм}.$$

Примерно такие размеры имеют другие молекулы, состоящие из небольшого числа атомов.

9.4. Уравнение состояния идеального газа

Параметры, характеризующие состояние тела, не являются независимыми друг от друга, а определенным образом связаны друг с другом. Уравнением состояния тела называется соотношение, связывающее параметры этого тела.

В наиболее простом случае равновесное состояние тела описывается давлением p, температурой T и объемом V. Это относится и к газам. Уравнение, связывающее эти 3 параметра, называют *уравнением состояния газа*. В общем виде это уравнение представляют так:

$$F(p, T, V) = 0, \tag{9.5}$$

где $F(p, T, V)$ – некоторая функция данных параметров.

Идеальным газом называют модель газа, в которой пренебрегают размерами молекул газа и их взаимодействием. Учитываются только упругие столкновения молекул, подобные упругим столкновениям шаров. Модель идеального газа хорошо работает при не очень высоких давлениях порядка нескольких атмосфер. При более высоких давлениях приходится вводить поправки на конечный размер молекул и их взаимодействие.

Температура обычно в быту и в технике определяется по шкале, предложенной Цельсием. Единица этой шкалы называется градусом Цельсия (^{o}C). В физике используется термодинамическая температура T, которая более удобна и имеет ясный физический смысл. Как будет показано в § 9.9, термодинамическая температура прямо пропорциональна средней энергии поступательного движения молекул газа. Единица термодинамической температуры – кельвин (К) – является одной из основных единиц системы СИ. Термодинамическая температура (T) и температура по шкале Цельсия (t) связаны формулой:

$$T = t + 273{,}15. \tag{9.6}$$

Температура, равная 0 К, называется абсолютным нулем температуры, ему соответствует $t = -273{,}15^{\circ}$ С.

Опытным путем были установлены три газовых закона. Первый из них – закон Бойля–Мариотта – гласит, что при постоянной температуре произведение давления на объем остается постоянным:

$$pV = \text{const}. \tag{9.7}$$

Согласно закону Гей–Люссака, при постоянном давлении:

$$V = V_0(1 + \alpha_V t), \tag{9.8}$$

где V – объем газа при температуре t по шкале Цельсия;

V_0 – объем при $t = 0^{\circ}$ С;

$\alpha_V = 1/273$ град$^{-1}$ – термический коэффициент объема.

Согласно закону Шарля, при постоянном объеме:

$$p = p_0(1 + \alpha_P t), \tag{9.9}$$

где p – давление газа при температуре t по шкале Цельсия;

p_0 – давление при $t = 0^{\circ}$ С;

$\alpha_P = 1/273$ град$^{-1}$ – термический коэффициент давления.

Как видно, $\alpha_V = \alpha_P = 1/273$ град$^{-1}$, поэтому в дальнейшем будем обозначать их одним символом $\alpha = 1/273$ град$^{-1}$.

Уравнение состояния удобнее получать, если в (9.8) и (9.9) перейти от температуры по шкале Цельсия к температуре по термодинамической шкале, представив первую в виде:

$$t = T - \frac{1}{\alpha}.$$

Если в формулы (9.8) и (9.9) подставим данное значение для t, законы Гей–Люссака и Шарля примут вид:

$$V = V_0 \alpha T; \tag{9.10}$$

$$p = p_0 \alpha T. \tag{9.11}$$

Пусть исходные параметры газа будут p_1, T_1, V_1. Проведем процесс при $p = \text{const}$ (рис. 9.2).

Для исходного состояния: $V_1 = V_0 \alpha T_1$, для конечного: $V_1' = V_0 \alpha T_2$. Тогда $V_1' = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$. Теперь проведем изотермический процесс при температуре T_2, получим: $p_1 V_1' = p_2 V_2$. Подставив сюда величину V_1' из предыдущего равенства, получим: $p_1 V_1 \dfrac{T_2}{T_1} = p_2 V_2$ или $\dfrac{p_1 V_1}{T_1} = \dfrac{p_2 V_2}{T_2}$. В результате получаем, что

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \tag{9.12}$$

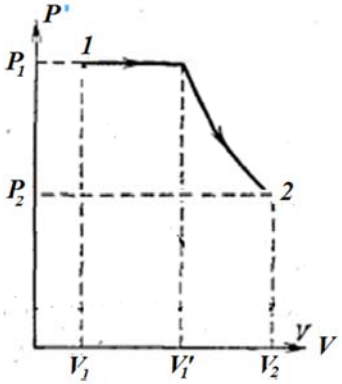


Рис. 9.2. Процессы для вывода уравнения состояния идеального газа

Это и есть уравнение состояния идеального газа. Его впервые сформулировал Клапейрон в 1834 г. Чтобы определить величину const, воспользуемся следующими экспериментальными данными. Обозначим ее значение для одного моля через R. Величину R называют универсальной газовой постоянной. При *нормальных условиях*, т. е. при $p = 1\,\text{атм} = 1{,}013 \cdot 10^5\,\text{Па}$, температуре $T = 273{,}15\,\text{К}$, согласно закону Авогадро, один моль газа занимает объем $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$. Тогда получаем, что

$$R = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3}}{273{,}15} = 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \tag{9.13}$$

Универсальная газовая постоянная имеет следующий физический смысл. Это работа, совершаемая 1 молем идеального газа при его изобарическом нагреве на 1 К.

Уравнение (9.12) для 1 моля имеет вид:

$$\frac{pV_m}{T} = R$$

или

$$pV_m = RT. \tag{9.14}$$

Чтобы получить уравнение для произвольной массы газа, умножим обе части уравнения (9.14) на число молей ν. Тогда слева в (9.14) будет объем газа и получаем:

$$pV = \nu RT \tag{9.15}$$

или

$$pV = \frac{m}{M}RT, \tag{9.16}$$

где m – масса газа;

M – молекулярная масса.

Уравнение в виде (9.16) называют уравнением Клапейрона–Менделеева.

Учитывая, что $m = m_0 N$; $M = m_0 N_A$ и подставляя эти величины в (9.16), получаем, что $pV = \frac{m_0 N}{m_0 N_A}RT = \frac{N}{N_A}RT$ или $p = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A}T$. Отношение $\frac{N}{V} = n$, где n – концентрация молекул (число их в единице объема). Величина

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \tag{9.17}$$

называется постоянной Больцмана. Она играет в физике важную роль.

Таким образом, мы получаем вторую форму уравнения состояния идеального газа:

$$p = nkT. \tag{9.18}$$

9.5. Число ударов молекул о стенку сосуда. Принцип детального равновесия

При движении молекулы ударяют по стенке сосуда, в котором они находятся. Так возникает давление на стенку. Для расчета давления первоначально определим число ударов о единицу площади за единицу времени. Для решения данной задачи сделаем несколько упрощающих предположений.

1. Давление газа не зависит от формы сосуда. Поэтому мы выберем наиболее удобную для расчетов форму в виде прямоугольного параллелепипеда.

2. Предположим, что отражение от стенки происходит по зеркальному закону, а модуль скорости остается после удара неизменным.

3. При равновесии газа все направления движения молекул равновероятны. Для упрощения расчетов будем считать, что молекулы движутся только вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, параллельных ребрам параллелепипеда. При этом вдоль каждого из трех таких направлений молекулы движутся в двух взаимно противоположных направлений. Поэтому по направлению движения к некоторой конкретной грани вдоль оси x будет двигаться только $N/6$ молекул, где N – общее число молекул в сосуде.

Предположим, что все молекулы движутся с одинаковой скоростью, равной их средней скорости $<v>$. Если площадь грани $\mathrm{d}S$, то за небольшой промежуток времени $\mathrm{d}t$ о грань ударятся 1/6 часть молекул, находящихся в объеме параллелепипеда с основанием площадью $\mathrm{d}S$ и выстой $<v>\mathrm{d}t$. Число таких молекул будет $\mathrm{d}N = n<v>\mathrm{d}t\mathrm{d}S/6$, где n – число молекул в единице объема или концентрация молекул. Тогда число ударов о единицу площади за единицу времени:

$$\nu = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S} = n<v>/6. \tag{9.19}$$

При выводе данной формулы мы предполагали, что молекулы движутся свободно, не сталкиваясь друг с другом. На самом деле это не так. Например, среднее расстояние, которое пролетает молекула кислорода при нормальном атмосферном давлении составляет порядка 10^{-7} метра. Однако в нашем случае столкновения можно не принимать во внимание. Дело в том, что если в результате столкновений некоторое число молекул изменит свою скорость и будет двигаться параллельно двум другим ребрам параллелепипеда (назовем эти направления y и z), то одновременно такое же количество молекул, ранее двигавшихся вдоль этих двух ребер, в результате столкновений начнут двигаться вдоль оси x.

Это связано с *принципом детального равновесия*. Согласно ему, *любой процесс в равновесной макроскопической системе протекает со скоростью, равной скорости обратного ему процесса*.

9.6. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории для давления

При отражении от стенки молекула изменяет направление скорости на противоположное, при этом модуль ее, как отмечалось выше, остается прежним. Поэтому изменение импульса, обусловленное действием стенки, будет равно: $-m<v>-(m<v>)=-2m<v>$. За время $\mathrm{d}t$ от площади $\mathrm{d}S$ отразится $\mathrm{d}N=\nu \mathrm{d}S\mathrm{d}t$ молекул.

Изменение их импульса будет равно $\Delta p=-2m<v>\nu \mathrm{d}S\mathrm{d}t=$ $=-mn<v>^2\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t/3$.

Согласно выражению (2.4), $\Delta p/\mathrm{d}t=-mn<v>^2\,\mathrm{d}S/3$ представляет собой силу, с которой стенка действует на молекулы. Согласно 3-му закону Ньютона молекулы действуют на стенку с силой $F=mn<v>^2\,\mathrm{d}S/3$ и создают на нее давление $p=F/\mathrm{d}S$, что равно:

$$p=\frac{mn<v>^2}{3}. \tag{9.20}$$

Более точный расчет, учитывающий, что скорости молекул не одинаковы по модулю, а также, что молекулы движутся не только

перпендикулярно к граням, а под различными углами к ним, дает более точное выражение:

$$p = \frac{mn < v^2 >}{3}. \qquad (9.21)$$

Преобразуем последнюю формулу к виду $p = \frac{2}{3} n \frac{m < v^2 >}{2}$. Так как $\frac{m < v^2 >}{2}$ представляет собой среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы $\overline{\varepsilon}_{\text{п}}$, то получаем, что

$$p = \frac{2}{3} n \overline{\varepsilon}_{\text{п}}.$$

Если обе части последнего равенства умножить на объем, то слева получим $\frac{2}{3} E_{\text{п}}$, где $E_{\text{п}}$ – энергия поступательного движения молекул, находящихся в объеме V:

$$pV = \frac{2}{3} E_{\text{п}}. \qquad (9.22)$$

9.7. Средняя энергия молекул

Приравнивая левые части ранее полученных формул (9.18) и (9.21):

$$p = nkT \quad \text{и} \quad p = \frac{2n\overline{\varepsilon}_{\text{п}}}{3},$$

получим формулу для средней энергии поступательного движения молекул газа:

$$\overline{\varepsilon}_{\text{п}} = \frac{3}{2} kT. \qquad (9.23)$$

Как видно из последней формулы, термодинамическая температура прямо пропорциональна средней энергии поступательного движения молекул газа. В жидкостях и твердых телах молекулы уже не движутся поступательно, а совершают другие виды движений, что будет рассмотрено ниже. Важно, что средняя энергия поступательного движения молекул не зависит от их массы.

Если $\overline{\varepsilon}_{\text{п}}$ выразить в традиционной форме как среднюю кинетическую энергию и приравнять с (9.23):

$$m\frac{< v^2 >}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

то получим выражение для среднего значения квадрата скорости:

$$< v^2 > = \frac{3kT}{m}. \qquad (9.24)$$

Умножив числитель и знаменатель на постоянную Авогадро N_A, получим:

$$< v^2 > = \frac{3RT}{M}. \qquad (9.25)$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса.

Корень квадратный из среднего значения квадрата скорости называется средней квадратичной скоростью $v_{\text{кв}}$:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (9.26)$$

Двух- и многоатомные молекулы могут совершать еще и вращательное и колебательное движения. Этим видам движения соответствует энергия, определяемая законом равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых величин, с помощью которых однозначно задается положение системы в пространстве.

Положение материальной точки можно определить по ее трем декартовым координатам x, y, z, или по координатам с сферической системе координат $r, \varphi, \theta,$ или по трем координатам в других системах координат. Поэтому материальная точка имеет три степени свободы.

Положение абсолютно твердого тела можно определить, если заданы три координаты его центра масс $x_C, y_C, z_C,$ а также три угла $\varphi, \theta_C, \psi,$ определяющие ориентацию тела в пространстве (рис. 9.3).

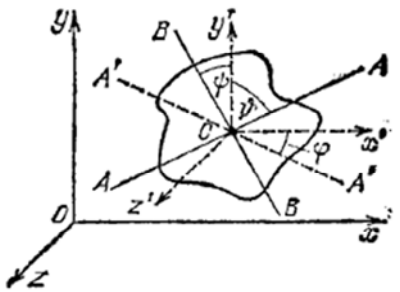


Рис. 9.3. Способ определения положения твердого тела в пространстве

При поступательном движении изменяются только координаты x_C, y_C, z_C. Поэтому соответствующие степени свободы называют поступательными. Если координаты центра масс неизменны, то могут изменяться только углы φ, θ, ψ. При этом происходит только вращение тела, поэтому эти степени свободы называют вращательными. Таким образом, абсолютно твердое тело имеет три поступательных и три вращательных степени свободы.

Система из двух материальных точек, расстояние между которыми l неизменно (жесткая связь), обладает пятью степенями свободы, так как каждая жесткая связь уменьшает число степеней свободы на единицу. Действительно, должна выполняться формула:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2. \qquad (9.27)$$

Тогда по заданным пяти координатам шестая определится из (9.27). Для такой системы три степени свободы будут поступательными, а две вращательными. Величина l может изменяться, что обусловлено колебаниями точек (упругая связь). В этом случае сис-

тема из двух точек имеет 3 поступательных, 2 вращательных и одну колебательную степень свободы.

Вообще система, состоящая из N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет $3N$ степеней свободы. Из них 3 будут поступательными, соответствующими координатам центра масс, и три вращательными. Остальные $3N-6$ будут колебательными. Если точки расположены на одной прямой, вращательных степеней свободы будет 2, а колебательных $3N-5$.

Экспериментально установлено, что при определении числа степеней свободы молекулы атомы можно принимать за материальные точки. Очевидно, что одноатомные молекулы имеют только три поступательные степени свободы.

Двухатомные молекулы имеют три поступательные и две вращательные степени свободы. Это относится к жестким молекулам, у них 5 степеней свободы, так как колебательная степень свободы отсутствует, расстояние между атомами строго фиксировано. У упругих добавляется еще и колебательная степень, итого получается 6 степеней.

При любом количестве степеней свободы молекул три из них всегда поступательные. При этом они равноправны, и на каждую поступательную степень приходится одна и таже энергия, в соответствии с формулой (9.23), равная $\frac{kT}{2}$.

Согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы, на каждую из них (не только на поступательную) приходится кинетическая энергия, равная $\frac{kT}{2}$.

При колебательном движении тело или частица обладает двумя видами энергии: кинетической и потенциальной. При этом доказывается, что средние значения этих энергий одинаковы и равны $\frac{kT}{2}$. Поэтому среднее значение колебательной степени свободы равно kT.

Из закона равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы и отмеченной особенности колебательного движения следует, что средняя энергия молекулы:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT, \tag{9.28}$$

где i – число степеней свободы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колебат}}. \qquad (9.29)$$

Отметим, что полученные результаты соответствуют законам классической физики. Они становятся приближенными и нарушаются, когда проявляются квантовые эффекты. Подробнее этот вопрос обсуждается в главе 10.

Вопросы к главе 9

1. Назовите три положения, лежащие в основе статистической физики.
2. Что лежит в основе термодинамики?
3. Какой процесс называется равновесным? Как равновесные процессы изображаются на графиках?
4. Что называется относительной атомной и относительной молекулярной массой?
5. Что такое атомная единица массы?
6. Что такое число Авогадро?
7. Как приблизительно определяются размеры молекул?
8. Сформулируйте уравнение Клапейрона–Менделеева.
9. Какой физический смысл универсальной газовой постоянной?
10. Приведите вторую форму уравнения состояния идеального газа. Назовите все величины, входящие в него.
11. Сформулируйте принцип детального равновесия для системы, находящейся в состоянии равновесия.
12. Приведите основное уравнение молекулярно-кинетической теории для давления.
13. Чему равна средняя энергия поступательного движения молекул?
14. Приведите формулу для средней квадратичной скорости молекул.
15. Что такое число степеней свободы? Какие степени свободы имеют одноатомная и двухатомная молекулы?
16. Сформулируйте закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

10. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

10.1. Внутренняя энергия термодинамической системы

Внутренняя энергия любого тела состоит из нескольких слагаемых. Это кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекул, кинетическая и потенциальная энергия колебательного движения атомов в молекулах, потенциальная энергия взаимодействия между молекулами, внутримолекулярная энергия (энергия электронных оболочек и внутриядернаяэнергия).

В состав внутренней энергии не входят кинетическая энергия движения тела как целого и потенциальная энергия тела во внешнем силовом поле.

В формулы термодинамики входит не сама энергия, а ее изменения или производная по какой-либо dl переменной. Поэтому те виды энергии, которые не изменяются при обычных термодинамических процессах, не имеет смысла включать во внутреннюю энергию. Например, при таких процессах не изменяется внутримолекулярная энергия и ее можно просто опустить. Конечно, при рассмотрении работы ядерного реактора этот вид энергии уже становится определяющим, и его нужно принимать во внимание.

Внутренняя энергия системы тел складывается из внутренних энергий отдельных тел плюс энергии взаимодействия тел. Энергия взаимодействия определяется взаимодействием в тонких слоях на границах между телами. Она значительно меньше энергий самих тел, и поэтому ей можно пренебречь и можно считать, что внутренняя энергия макроскопических тел равна сумме внутренних энергий отдельных тел. Это свойство называется аддитивностью внутренней энергии.

Внутренняя энергия является функцией состояния. Это значит, что если система находится в данном состоянии, то ее внутренняя энергия имеет значение, присущее только данному состоянию независимо от того, что с ней происходило ранее. При переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии не зависит от того, каким путем был осуществлен отмеченный переход.

Имеются физические величины, изменение которых зависит от того, каким путем совершен переход из начального состояния в ко-

нечное. Такими величинами, как будет показано ниже, являются работа и количество теплоты.

10.2. Работа, совершаемая телом при изменении его объема

Будем рассматривать случаи, когда взаимодействие тела с другими телами описывается одним параметром – давлением, которое оно на них оказывает.

Пусть газ находится внутри замкнутого цилиндрического сосуда, зарытого хорошо подогнанным поршнем так, что газ из сосуда не выходит (рис. 10.1). Предположим, что газ медленно и обратимо расширился и переместил поршень на небольшое расстояние $\mathrm{d}l$ так, что давление можно считать постоянным. Газ действует на поршень с силой $\mathrm{d}F = pS$ и совершает над ним работу:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l = pS\mathrm{d}l = p\mathrm{d}V.$$

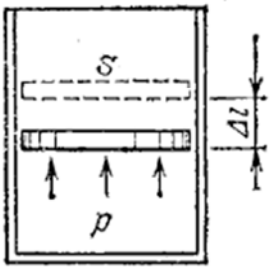


Рис. 10.1. Расширение газа в цилиндре

Эта работа является алгебраической величиной.

Так, если $\mathrm{d}V > 0$, то и $\mathrm{d}A > 0$. И наоборот, если $\mathrm{d}V < 0$, то и $\mathrm{d}A < 0$.

Формула в виде:

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V \qquad (10.1)$$

справедлива при любом малом изменении объема тела любой формы.

Работа, совершаемая телом над внешними телами $\mathrm{d}A$ и работа, совершенная внешними телами над данным телом $\mathrm{d}A'$, равны по модулю, но противоположны по знаку:

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}A'.$$

В нашем случае работа, совершенная газом над поршнем, равна взятой со знаком минус работе, совершенной поршнем над газом.

Полную работу A_{12}, совершенную газом при изменении его объема от V_1 до V_2 найдем, просуммировав работы, совершаемые при элементарных процессах, т. е. путем интегрирования:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_1} p(V)\mathrm{d}V. \qquad (10.2)$$

Произведенную в каком-либо процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах p, V. Предположим, изменение давления изображается кривой на рис 10.2.

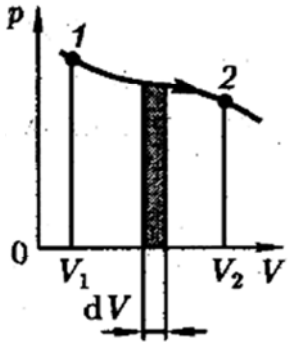


Рис. 10.2. Пример изменения давления при изменении объема

При увеличении объема на $\mathrm{d}V$ произведенная работа $p\mathrm{d}V$ будет численно равна площади с основанием, равным $\mathrm{d}V$, залитой на рисунке. Поэтому полная работа численно равна площади криволинейной фигуры, ограниченной кривой $p(V)$, осью V и прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$.

Циклическим называется процесс, при котором конечное и начальное состояния совпадают. Ему соответствует замкнутая кривая. Работа при таком процессе численно равна площади замкнутой фигуры, взятой со знаком плюс, если обход по кривой происходит по часовой стрелке и со знаком минус, если обход производится против нее. К первому варианту относятся рабочие циклы тепловых двигателей, ко второму – холодильных устройств.

Графически можно изображать только равновесные процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний.

Все реальные процессы являются неравновесными, но в ряде случаев, если процессы протекают достаточно медленно, так, что модули изменения параметров системы много меньше самих параметров, то в таком случае процессы можно условно считать равновесными. В дальнейшем мы будем рассматривать только равновесные процессы.

10.3. Первое начало термодинамики

Рассмотрим замкнутую термодинамическую систему, у которой механическая энергия остается постоянной, а изменяться может только внутренняя энергия. Эта энергия может изменяться, например, за счет работы, выполненной над телом другим телом. Например, при сжатии газа, находящегося в замкнутом объеме, его температура возрастает, а значит, увеличивается и внутренняя энергия за счет работы, выполненной внешними силами.

Другим путем температуру и внутреннюю энергию газа можно увеличить, сообщив ему некоторое количество теплоты – энергию, переданную внешними телами путем теплообмена.

Таким образом, возможны две формы передачи энергии от одних тел к другим – работа и теплота. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения и наоборот. При подобных превращениях выполняется закон сохранения энергии. Применительно к термодинамическим процессам этим законом является первое начало термодинамики, установленное путем обобщения многочисленных экспериментальных данных, полученных за период в несколько веков.

Предположим, что некоторая система в исходном состоянии обладала внутренней энергией U_1. Далее она получила количество теплоты Q и, перейдя в новое состояние, совершила работу над внешними телами, равную A. В новом состоянии ее внутренняя энергия равна U_2. Согласно закону сохранения энергии изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ будет одинаковым при любом варианте перехода из состояния *1* в состояние *2*. Оно равно разности между полученным количеством теплоты Q и выполненной над внешними телами работой A:

$$\Delta U = Q - A \tag{10.3}$$

или

$$Q = \Delta U + A. \tag{10.4}$$

Уравнения (10.3) и (10.4) выражают *первое начало термодинамики: сообщаемая системе теплота идет на увеличение внутренней энергии и работу системы против внешних сил*.

Количество теплоты считается положительным, если она передается системе. Работа считается положительной, если она выполняется системой над внешними телами.

Величина ΔU представляет собой приращение внутренней энергии. Оно не зависит от того, каким путем произошел переход из начального состояния в конечное. Так, U является функцией состояния, и для любого состояния можно указать, чему равна U в данном состоянии.

В то же время, как видно из рис. 10.2, работа зависит от того, каким путем система перешла из начального положения в конечное. Это же относится и к теплоте. Поэтому нельзя говорить о том, каким запасом работы или теплоты обладает тело или система, т. е. ни Q, ни A не являются функциями состояния тела или системы.

В случае элементарных процессов, когда модули изменения параметров, характеризующих систему состояния, много меньше самих параметров, уравнение (10.4) принимает вид:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \qquad (10.5)$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты;

$\mathrm{d}U$ – бесконечно малое изменение внутренней энергии;

δA – бесконечно малая работа.

Величина $\mathrm{d}U$ является полным дифференциалом. При циклическом процессе циркуляция внутренней энергии равна нулю:

$$\oint \mathrm{d}U = 0.$$

Для количества теплоты и работа, и циркуляция отлична от нуля, а величины δQ и δA не являются полными дифференциалами.

Соответственно, для перехода из состояния *1* в состояние *2*:

$$\int_1^2 \mathrm{d}U = U_2 - U_1,$$

независимо от того, каким путем система или тело перешло из состояния *1* в состояние *2*.

Величину работы и количество полученной теплоты уже невозможно представить как разность $A_2 - A_1$ или $Q_2 - Q_1$, так как интегралы

$$\int_1^2 \mathrm{d}A = A_{12}$$

и

$$\int_1^2 \mathrm{d}Q = Q_{12}$$

зависят от того, каким путем система или тело перешло из состояния *1* в состояние *2*.

10.4. Внутренняя энергия и теплоемкость идеального газа. Уравнение Майера

Под теплоемкостью тела понимают отношение количества полученной им теплоты $\mathrm{d}Q$ к происшедшему при этом изменению температуры $\mathrm{d}T$:

$$c_T = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}.$$

Теплоемкость тела измеряется в Дж/К.

Удельной теплоемкостью называют теплоемкость единицы массы вещества:

$$c_s = \frac{\mathrm{d}Q}{m\mathrm{d}T}.$$

В физике обычно используется теплоемкость одного моля, называемая молярной теплоемкостью:

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\nu \mathrm{d}T},$$

где ν – число молей вещества.

Величина C измеряется в Дж/(моль·К). Удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением:

$$c_s = \frac{C}{M},$$

где M – молярная масса.

В дальнейшем под символом C будем понимать молярную теплоемкость.

Теплоемкость зависит от условий нагревания тела – при постоянном объеме или при постоянном давлении. Соответствующие молярные теплоемкости будем обозначать как C_V и C_P.

При нагреве при постоянном объеме согласно 1-му началу термодинамики, происходит только увеличение внутренней энергии. Поэтому молярная теплоемкость в этом случае:

$$C_V = \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}T}. \tag{10.6}$$

В математике подобное выражение записывают в виде:

$$C_V = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T}\right)_V. \tag{10.7}$$

Это так называемая частная производная от внутренней энергии 1 моля по температуре при условии, что объем остается постоянным.

Из опыта известно, что C_V идеального газа в широком интервале температур остается постоянной. Тогда из (10.6) следует:

$$\mathrm{d}U_m = C_V \mathrm{d}T.$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$U_m = C_V T + \mathrm{const}.$$

В п. 10.1 отмечалось, что внутреннюю энергию можно определять с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Поэто-

му константу в последнем равенстве можно принять равной нулю. Окончательно получаем:

$$U_m = C_V T. \tag{10.8}$$

Так как внутренняя энергия – аддитивная величина, то для произвольной массы:

$$U = \frac{m}{M} C_V T. \tag{10.9}$$

В случае смеси газов молярная теплоемкость:

$$C_V = \frac{\nu_1 C_{V1} + \nu_2 C_{V2} + ... + \nu_n C_{Vn}}{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n},$$

где ν_i – количество молей компоненты под номером *i*;

C_{Vi} – молярная теплоемкость данной компоненты.

Напишем уравнение (10.5) для 1 моля газа, предполагая, что процесс нагрева происходит при постоянном давлении. Заменим согласно (10.1) величину $\mathrm{d}A$ на $p\mathrm{d}V_m$:

$$\delta Q_p = \mathrm{d}U_m + p\mathrm{d}V_m.$$

Разделив последнее выражение на $\mathrm{d}T$, получим выражение для молярной теплоемкости при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{\mathrm{d}U_m}{\mathrm{d}T} + p\left(\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}T}\right)_p.$$

В скобках фигурирует частная производная от V_m по температуре при постоянном давлении. Первое слагаемое согласно (10.7) равно C_V. Тогда последнее равенство принимает вид:

$$C_p = C_V + p\left(\frac{\mathrm{d}V_m}{dT}\right)_p. \tag{10.10}$$

В случае идеального газа $V_m = \frac{RT}{p}$. Тогда $\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{p}$. Подставив это значение в (10.10), получим:

$$C_p = C_V + R. \tag{10.11}$$

Для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении равна молярной теплоемкости при постоянном объеме плюс универсальная газовая постоянная. Величина C_V в (10.11) отвечает за увеличение внутренней энергии, а R – за совершение работы.

Как следует из (10.11), один моль идеального газа при нагревании на 1 К совершает работу, равную R.

Отношение

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

является для каждого газа характерной постоянной.

С учетом (10.11):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V},$$

откуда следует

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \tag{10.12}$$

Подставив это выражение в (10.8), получим:

$$U_m = \frac{RT}{\gamma - 1}.$$

Чтобы получить выражение для внутренней энергии произвольной массы идеального газа, умножим обе части последнего равенства на m / M и учтем, что $mRT / M = pV$, получим:

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{10.13}$$

Из выражения (10.13) следует, что внутренняя энергия идеального газа пропорциональна произведению давления на объем.

10.5. Уравнение адиабатического процесса

Адиабатическим называется процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой. Первое начало термодинамики в виде $\Delta Q = 0$ не подходит, так как оно может означать, что тело или система получили некоторое количество теплоты, а затем отдали такое же количество. Поэтому используем первое начало в виде (10.5), что означает, при любом сколь малом изменении состояния теплоту тело не получает и не отдает.

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = d\left(\nu C_V T\right) + p\mathrm{d}V = 0$$

или

$$p\mathrm{d}V = -\nu C_V \mathrm{d}T, \tag{10.14}$$

где ν – число молей.

Взяв дифференциал от обеих частей уравнения Клапейрона–Менделеева, получим:

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = \nu R\mathrm{d}T. \tag{10.15}$$

Умножив (10.14) на R / C_V, получим:

$$\frac{pR}{C_V}\mathrm{d}V = -R\nu\mathrm{d}T.$$

Сложив последнее уравнение с (10.14), получим:

$$p\mathrm{d}V + \frac{pR}{C}\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0; \quad p\frac{C_V + R}{C_V}\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0;$$

$$p\frac{C_P}{C_V}\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0$$

или

$$\gamma p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0. \tag{10.16}$$

Разделив последнее уравнение на pV, получим:

$$\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{\mathrm{d}p}{p} = 0.$$

Левая часть последнего выражения представляет собой $\mathrm{d}\left[\ln\left(pV^{\gamma}\right)\right]$. Проинтегрировав последнее равенство, получаем: $\ln\left(pV^{\gamma}\right) = \text{const}$, откуда следует уравнение адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const}. \qquad (10.17)$$

Это уравнение называют уравнением Пуассона.

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, получаем уравнение Пуассона в переменных T, p и T, V:

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

При выводе уравнения Пуассона мы предполагали, что рассматриваемый процесс является обратимым, т. е. происходит бесконечно медленно. Однако невозможно провести не только бесконечно медленный, но даже просто медленный адиабатический процесс, так как не существует идеальной теплоизолирующей оболочки. Конечно, чем быстрее происходит процесс, тем меньше количество теплоты, которое может получить тело из внешней среды или отдать ей. Поэтому близкими к адиабатическому процессу могут быть только достаточно быстрые процессы. В то же время процессы должны быть достаточно медленными, чтобы можно было считать их обратимыми. Оба эти условия одновременно выполняются в небольших объемах газов, в которых распространяется звуковая волна. Поэтому поведение газа в пределах небольшого объема при прохождении звуковой волны можно считать адиабатичесим процессом.

Из уравнения (10.16) следует, что

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Дифференцирование уравнения изотермы (9.7) дает:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\frac{p}{V}.$$

Из двух последних равенств видно, что модуль тангенса наклона касательной к оси V адиабаты в γ раз больше. Это значит, адиабата идет круче изотермы (рис. 10.3).

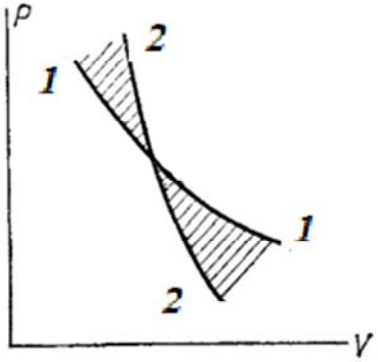


Рис. 10.3. Кривые изотермического (*1*)
и адиабатического (*2*) процессов

10.6. Уравнение политропического процесса

Политропическим называется процесс, в ходе которого теплоемкость остается постоянной $C = \mathrm{const}$. Это дополнительное условие к уравнению состояния. Количество полученной теплоты при таком процессе $\mathrm{d}Q = \nu C \mathrm{d}T$, и первое начало термодинамики:

$$\nu C \mathrm{d}T = \nu C_\nu \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V.$$

Преобразуем это уравнение таким образом:

$$\nu(C - C_\nu)\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V.$$

Умножим последнее уравнение на газовую постоянную R:

$$\nu R\mathrm{d}T(C - C_\nu) = pR\mathrm{d}V. \qquad (10.18)$$

Из формулы (10.15) следует, что

$$\nu R\mathrm{d}T = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p.$$

Подставив в выражение (10.18) полученное значение для $\nu R\mathrm{d}T$, получим:

$$(C - C_\nu)(p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p) = pR\mathrm{d}V,$$

откуда следует

$$(C - C_\nu - R)p\mathrm{d}V + \big((C - C_\nu)\big)V\mathrm{d}p = 0.$$

Разделив последнее уравнение на pV, получим:

$$\frac{(C - C_p)\mathrm{d}V}{V} + \frac{(C - C_\nu)\mathrm{d}p}{P} = 0. \qquad (10.19)$$

Введем величину

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}, \qquad (10.20)$$

тогда выражение (10.19) примет вид:

$$n\frac{\mathrm{d}V}{V} + \frac{\mathrm{d}p}{P} = 0.$$

Последнее выражение можно представить в виде:

$$\mathrm{d}\Big[\ln(PV^n)\Big] = 0,$$

откуда следует, что $\ln(PV^n) = \text{const}$ или

$$PV^n = \text{const}. \qquad (10.21)$$

Это уравнение политропического процесса. Величину n называют показателем политропы. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, получаем уравнение Пуассона в переменных T, p и T, V:

$$T^n p^{1-n} = \text{const}; \quad TV^{n-1} = \text{const}.$$

Чтобы определить величину n для изохорического процесса, проведем следующие преобразования: $PV^n = \text{const}$; $(PV^n)^{\frac{1}{n}} = \text{const}$; $P^{\frac{1}{n}}V = \text{const}$. Если $n \to \infty$, то $\frac{1}{n} \to 0$, $P^{\frac{1}{n}} \to 1$, и $V = \text{const}$. Поэтому для данного процесса $n = \infty$. В табл. 10.1 приведены значения n и C.

Таблица 10.1

Параметры некоторых политропических процессов

Вид процесса	n	C
$p = \text{const}$	0	C_P
$T = \text{const}$	1	∞
адиабатический	γ	0
$V = \text{const}$	∞	C_V

Из выражения (10.19) следует, что

$$C = \frac{nC_V - C_V - R}{n-1} = \frac{(n-1)C_V - R}{n-1} = \frac{(n-1)\dfrac{R}{(\gamma-1)} - R}{n-1}$$

или

$$C = \frac{(n-1)R - (\gamma-1)R}{(n-1)(\gamma-1)} = \frac{R(n-1-\gamma+1)}{(n-1)(\gamma-1)},$$

откуда получаем, что

$$C = \frac{R(n-\gamma)}{(n-1)(\gamma-1)}. \qquad (10.22)$$

Анализ формулы (10.22) дает, что при $1 < n < \gamma$ теплоемкость процессов отрицательна: $C < 0$. Графики таких процессов расположены между кривыми, соответствующими изотермическому и адиабатическому процессам (заштрихованная область на рис. 10.3). Подобные процессы происходят в недрах звезд.

Оказывается, что для нагрева звезды от нее нужно отбирать энергию, а не подводить, как в земных условиях. Если звезда отдает свою энергию наружу, то T и p в ней уменьшаются. Силы тяготения, не уравновешенные внутренним давлением, будут сжимать звезду и совершать работу, превращающуюся в теплоту. Работа силы тяготения при сжатии в 2 раза больше, чем отвод энергии наружу, т. к. гравитационная энергия звезды вдвое больше энергии теплового движения частиц газа. И звезда нагревается, хотя и теряет энергию.

10.7. Работа идеального газа при различных политропических процессах

Работа при обратимом процессе может быть определена, если известно давление как функция объема:

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}v, \qquad (10.23)$$

где V_1 – начальный объем;

V_2 – конечный объем.

Так как при политропическом процессе $P_1V_1^n = PV^n$, то $P = \frac{P_1V_1^n}{V^n}$,

и тогда

$$A_{12} = P_1V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^n}.$$

В случае $n \neq 1$ значение интеграла $\int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{V_1^1} - \frac{1}{V_2^1}\right)$, и для работы получаем:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (10.24)$$

Используя уравнение Клапейрона–Менделеева $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT$, получаем:

$$A_{12} = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{(n-1)}\left[\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \qquad (10.25)$$

В случае адиабатического процесса $n = \gamma$, и работа равна:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

или

$$A_{12} = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{(\gamma-1)}\left[\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

В случае $n = 1$ (изотермический процесс) работа равна:

$$A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M} RT \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V};$$

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (10.26)$$

При изобарическом процессе давление остается постоянным, и его в формуле (10.23) можно вынести за знак интеграла, и для работы получаем:

$$A_{12} = p(V_2 - V_1).$$

Эта формула справедлива не только для газов, но и для любого тела. В случае изохорного процесса $\Delta V = 0,$ и работа $A_{12} = 0.$

10.8. Классическая теплоемкость идеального газа. Понятие о квантовой теплоемкости идеального газа

Внутреннюю энергию идеального газа можно найти, умножив среднюю энергию одной молекулы $\overline{\varepsilon}$ на число Авогадро N_A. Из формулы (9.28) следует, что

$$\overline{\varepsilon} = (i/2)kT. \tag{10.27}$$

Здесь i – число степеней свободы. Тогда

$$U_m = \frac{i}{2}kN_AT = \frac{i}{2}RT. \tag{10.28}$$

Используя формулу (10.7), получаем, что

$$C_V = \frac{i}{2}R. \tag{10.29}$$

Из уравнения Майера (10.11) следует, что

$$C_P = C_V + R = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \tag{10.30}$$

Тогда для γ получаем:

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \tag{10.31}$$

Видно, что γ определяется числом степеней свободы. Теоретические значения теплоемкости идеального газа приведены в таблице 10.2. Здесь $i_{\text{п}}$, $i_{\text{в}}$, $i_{\text{к}}$ – число степеней свободы соответственно поступательного, вращательного и колебательного движения.

Таблица 10.2

Теоретические значения теплоемкости идеального газа

Молекула	Число степеней свободы			i	$\frac{C_V}{R}$	$\frac{C_V}{R}$	γ
	$i_{\text{п}}$	$i_{\text{в}}$	$i_{\text{к}}$				
Одноатомная	3			3	3/2	5/2	1,67
Двухатомная жесткая	3	2		5	5/2	7/2	1,40
Двухатомная упругая	3	2	1	6	7/2	9/2	1,29
Трехатомная жесткая	3	3		6	6/2	8/2	1,33

Для одноатомных молекул теоретические значения хорошо согласуются с данными, полученными на опыте.

У двухатомных газов наблюдаются отличия от теории. Экспериментальная зависимость молярной теплоемкости при постоянном давлении от температуры приведена на рис. 10.4.

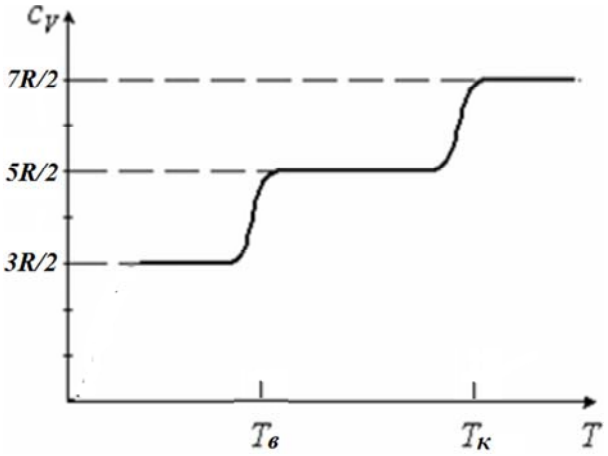


Рис. 10.4. Зависимость молярной теплоемкости двухатомной молекулы от температуры

Видно, что значения $5R/2$ и $7R/2$, соответствующие жесткой и упругой молекуле, достигаются только в ограниченных интервалах температур. При низких температурах величина C_V составляет $3R/2$. Это соответствует наличию только поступательной степени свободы. Далее с ростом температуры величина C_V растет до $5R/2$, что свидетельствует о появлении вращательной степени свободы. Данная величина сохраняется в широком интервале температур, после чего начинается рост до значения, равного $7R/2$.

Отсутствие вклада вращательной степени свободы связано с тем, что энергия вращательного движения молекул квантуется, т. е. может принимать только дискретные значения, разделенные промежутками запрещенных значений. При этом минимальная энергия вращательного движения $E_{0в}$ равна нулю, т. е. в данном состоянии молекула не вращается. Энергия теплового движения большинства молекул составляет порядка kT (уравнение (10.27)). Поэтому молекула не может начинать вращаться, пока энергия теплового движения не станет равной кванту энергии вращательного движения $\Delta E_в = E_{1в} - E_{0в}$, где $E_{1в}$ – энергия первого вращательного состояния. Температура $T_в$, при которой выполняется равенство $\Delta E_в = kT_в$, называется вращательной температурой. Она находится в интервале от 2 К до 90 К. Начиная с температур порядка $T_в$ молекулы постепенно вовлекаются во вращательное движение и начинают давать вклад в теплоемкость, который возрастает до тех пор, пока все молекулы не вовлекутся во вращательное движение и молярная теплоемкость станет равной $5R/2$. Далее при росте температуры она остается постоянной, пока не начнется вклад от колебательной степени свободы. Чем меньше масса молекулы, тем выше $T_в$. Значения $T_в$ для некоторых двухатомных молекул приведены в таблице 10.3.

В отличие от вращательного, колебательное движение атомов в молекулах газов не прекращается с понижением температуры вплоть до самых низких температур, когда газ начинает превращаться в жидкость. Это было надежно установлено уже в 40-х годах XX столетия. Иначе говоря, ***жестких молекул в природе не существует,*** на что указывали такие известные специалисты в спектроскопии, как М. А. Ельяшевич, Г. Герцберг и другие. К сожалению, авторы многих

известных учебников это игнорируют. Соответственно, энергия самого нижнего колебательного уровня $E_{0к}$ отлична от нуля.

Таблица 10.3

Вращательные и колебательные температуры
некоторых двухатомных молекул

Молекула	H_2	D_2	N_2	O_2	I_2	HI	NO
$T_в$, К	87,5	43,8	2,88	2,98	0,054	9,37	2,45
$T_к$, К	6326	4487	3395	2273	308,6	3323	2740

Хотя при низких температурах колебательная степень не дает вклада в теплоемкость, энергия колебательного движения атомов заметно превосходит величину kT (рис. 10.5). Однако при этом она первоначально чрезвычайно слабо изменяется с ростом температуры, что и объясняет отсутствие вклада в теплоемкость.

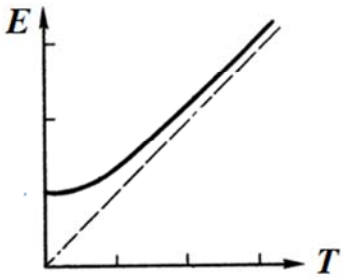


Рис. 10.5. Средняя энергия колебаний двухатомной молекулы (сплошная кривая) и величина kT (штриховая линия)

Вклад в теплоемкость от колебательного движения начинается при достаточно высоких температурах, когда величина энергия теплового движения станет равной кванту энергии колебательного движения $\Delta E_к = E_{1к} - E_{0к}$, где $E_{1к}$ – энергия первого вращательного состояния. Температура $T_к$, при которой выполняется равенство $\Delta E_к = kT_к$, называется колебательной температурой. Она находится в интервале примерно от 2000 К до 7000 К. Чем меньше масса молекулы, тем выше $T_к$. Значения $T_к$ для некоторых двухатомных молекул также приведены в таблице 10.2.

Начиная с температур, близких к $T_к$, молекулы постепенно приобретают возможность увеличивать энергию колебательного движения и начинают давать вклад в теплоемкость. При $T = T_к$ молярная колебательная теплоемкость достигает величины порядка $0,9R$. Она и далее постепенно возрастает до тех пор, пока все молекулы смогут давать вклад в колебательную теплоемкость и она станет равной $7R/2$. Правда, анализ экспериментальны данных в этой области усложняется тем, что начинается термическая диссоциация, т. е. распад молекул на атомы.

Таким образом, классическая теория теплоемкостей дает удовлетворительные результаты только для одноатомных газов. Это связано с тем, что энергия поступательного движения, а это единственный вид движения у данных молекул, не квантуется, а может изменяться непрерывно.

Для многоатомных молекул данная теория приближенно выполняется только в определенных интервалах температур. При этом каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы.

Вопросы к главе 10

1. Что включает в себе внутренняя энергия тела?
2. Что означает, что внутренняя энергия является функцией состояния?
3. Сформулируйте первое начало термодинамики.
4. Что такое теплоемкость тела? Какие бывают теплоемкости?
5. Как связаны внутренняя энергия и C_V?
6. Приведите уравнение Майера.
7. Приведите формулу для внутренней энергии.
8. Какой процесс называют адиабатическим? Приведите его уравнения.
9. Какой процесс называют политропическим? Приведите его уравнения.
10. Приведите формулы для работы при политропических процессах.
11. Какие результаты дает классическая теория для теплоемкости? В чем недостатки этой теории?
12. Что лежит в основе квантовой теории теплоемкости?

11. ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

11.1. Функция распределения вероятности

Пусть имеется совокупность очень большого числа N одинаковых молекул (например, газ), находящаяся в равновесном состоянии. Предположим, что некоторая величина x, характеризующая молекулу (например, вращательная или колебательная энергия молекулы), может принимать ряд дискретных значений:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i.$$

Если бы удалось измерить одновременно значение величины x у всех N молекул, то оказалось бы, что у N_1 молекул величина x имеет значение x_1, у N_2 молекул – значение x_2, у N_i молекул – значение x_i и т. д.

Величина

$$P_i = N_i / N.$$

называется *вероятностью* того, что величина x имеет значение x_i. Подчеркнем, что такое определение вероятности пригодно лишь в случае очень больших N.

Очевидно, что $\sum N_i = N$. Поэтому

$$\sum P_i = \sum N_i / N = N / N = 1. \qquad (11.1)$$

Таким образом, *сумма вероятностей всех возможных значений величины x равна единице.*

Допустим, что молекулы характеризуются значениями двух величин: x и y (например, колебательной и вращательной энергий), каждая из которых может принимать дискретные значения x_i и y_k. Согласно определению (11.1) вероятности этих значений равны:

$$P(x_i) = N(x_i) / N; \qquad P(y_k) = N(y_k) / N.$$

Если значение одной из величин не зависит от того, какое значение имеет другая, то величины x и y называются *статистически независимыми*.

Найдем вероятность $P(x_i, y_k)$ того, что статистически независимые величины имеют одновременно значения x_i и y_k. Из формулы (11.1) следует, что значение x_i имеют $N(x_i) = NP(x_i)$ молекул. Вследствие статистической независимости у этих $N(x_i)$ молекул значения y_k будут распределены в той же пропорции, что и у всех N молекул. Поэтому из числа $N(x_i)$ значение y_k будут иметь $N(x_i)P(y_k) = NP(x_i)P(y_k)$ молекул. Разделив это число на N, найдем искомую вероятность:

$$P(x_i, y_k) = P(x_i)P(y_k). \qquad (11.2)$$

Мы пришли к *теореме об умножении вероятностей*, согласно которой *вероятность одновременного появления статистически независимых событий равна произведению вероятностей этих событий* (в рассмотренном выше случае событием является то, что величина имеет данное значение).

Если вероятность значения x_i величины x равна P_i, то согласно формуле (11.1) у $N_i = P_iN$ молекул величина x имеет значение x_i. Сумма значений величины x у этих N_i молекул будет равна $N_ix_i = P_iNx_i$, а сумма значений x у всех N молекул определится выражением:

$$\sum N_i x_i = \sum P_i N x_i.$$

Разделив эту сумму на N, найдем среднее (по молекулам) значение величины x:

$$\langle x \rangle = \sum P_i x_i. \qquad (11.3)$$

Полученная нами формула позволяет, зная вероятности различных значений величины x, найти среднее значение этой величины.

Теперь рассмотрим случай, когда характеризующая молекулу величина x может принимать непрерывный ряд значений от $x = a$ до $x = b$ (в частности, a и b могут равняться $-\infty$ и $+\infty$). Примерами таких величии могут служить модуль поступательной скорости или

кинетическая энергия молекулы. В этом случае число возможных значений x бесконечно велико, а количество молекул N, хотя и очень велико, но конечно. Поэтому вопрос о том, какое количество молекул обладает точно заданным значением величины x, не имеет смысла – это количество равно нулю.

В рассматриваемом случае правомерным является вопрос о том, какова вероятность $\mathrm{d}P_x$ того, что величина имеет значения, заключенные в пределах малого интервала $\mathrm{d}x$, расположенного в окрестности значения, равного x (данное значение x должно принадлежать интервалу $\mathrm{d}x$). При малом $\mathrm{d}x$ эта вероятность будет пропорциональной $\mathrm{d}x$. Кроме того, она зависит от того, в каком месте оси x расположен интервал $\mathrm{d}x$, т. е. является функцией x, *которую обозначим как f(x)*. Таким образом,

$$\mathrm{d}P_x = f(x)\mathrm{d}x. \tag{11.4}$$

Индекс x при $\mathrm{d}P$ указывает значение x, в окрестности которого расположен $\mathrm{d}x$). Функция $f(x)$ называется *функцией распределения вероятности* или *плотностью вероятности*.

Умножив $\mathrm{d}P_x$ на полное число молекул N, получим количество молекул $\mathrm{d}N_x$, обладающих значениями x, заключенными в пределах данного интервала $\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}N_x = N\mathrm{d}P_x = Nf(x)\mathrm{d}x. \tag{11.5}$$

Интеграл от $\mathrm{d}N_x$, взятый по всему интервалу возможных значений x (т. е. «сумма» $\mathrm{d}N_x$), должен равняться полному числу молекул N:

$$\int \mathrm{d}N_x = \int N\mathrm{d}P_x = \int Nf(x)\mathrm{d}x = N.$$

Отсюда следует, что

$$\int \mathrm{d}P_x = \int f(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{11.6}$$

Формула (11.6) является аналогом формулы (11.1). Из условия (11.6) вытекает, что площадь, ограниченная графиком функции $f(x)$, равна единице.

Выражение $x\mathrm{d}N_x$ дает сумму значений x, которыми обладают $\mathrm{d}N_x$ молекул, а «сумма» таких выражений, т. е.

$$\int x\mathrm{d}N_x = \int xN\mathrm{d}P_x = N\int x\mathrm{d}P_x \tag{11.7}$$

дает сумму значений x всех N молекул. Разделив эту сумму на N, получим среднее (по молекулам) значение величины x:

$$\langle x\rangle = \int x\mathrm{d}P_x = \int xf(x)\mathrm{d}x. \tag{11.8}$$

Эта формула является аналогом формулы (11.3). Подставив в формулу (11.8) вместо x некоторую функцию этой величины $\varphi(x)$, придем к формуле:

$$\langle\varphi(x)\rangle = \int \varphi(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{11.9}$$

По этой формуле можно вычислить, например, среднее значение x^2:

$$\left\langle x^2\right\rangle = \int x^2 f(x)\mathrm{d}x. \tag{11.10}$$

11.2. Распределение Максвелла

В газе, находящемся в состоянии равновесия при данной температуре, устанавливается некоторое стационарное, не изменяющееся со временем распределение молекул по скоростям. Это распределение описывается функцией $f(v)$, называемой ***функцией распределения молекул по скоростям***, которая определяет долю молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+\mathrm{d}v$, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}N(v)}{N} = f(v)\mathrm{d}v. \tag{11.11}$$

Здесь $\mathrm{d}N(v)$ – число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+\mathrm{d}v$, N – общее число молекул.

Максвелл установил, что $f(v)$ имеет вид:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right). \qquad (11.12)$$

Здесь m_0 – масса молекулы, k – постоянная Больцмана.

Эта функция удовлетворяет ***условию нормировки***:

$$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = 1. \qquad (11.13)$$

График функции для двух температур некоторого газа приведен на рис. 11.1.

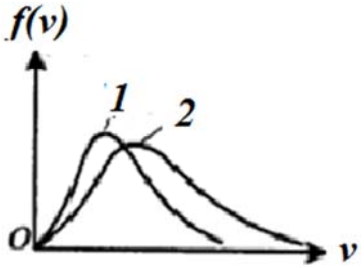


Рис. 11.1. Функция Максвелла. При одинаковой массе молекул $m_1 = m_2$ кривая *1* соответствует более низкой температуре ($T_1 < T_2$); при одинаковой температуре $T_1 = T_2$ кривая *1* соответствует бóльшей массе молекул ($m_1 > m_2$)

Аналогичные кривые соответствуют распределению при некоторой фиксированной температуре двум различным газам $(m_2 < m_1)$.

Как следует из (11.11) и (11.12) величина $f(v)$ численно равна доле молекул, скорости которых лежат в интервале от $(v - 0{,}5)$ м/с до $(v + 0{,}5)$ м/с.

Скорость $v_в$, для которой значение $f(v)$ максимально, называется наиболее вероятной скоростью. Ее можно найти, взяв производную от $f(v)$ и прировнять ее нулю:

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0.$$

Одним из решений такого уравнения является:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \qquad (11.14)$$

Средняя скорость $\overline{v}$, согласно (11.9), определяется как:

$$\overline{v} = \int_0^\infty v f(x)\mathrm{d}x. \qquad (11.15)$$

Расчет по формуле (11.15) дает, что

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \qquad (11.16)$$

Аналогично для средней квадратичной скорости:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(x)\mathrm{d}x}.$$

Расчет по последней формуле дает:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (11.17)$$

Полученные величины скоростей связаны соотношениями:

$$v_{\text{кв}} > \overline{v} > v_{\text{в}}.$$

Если в формулах (11.14), (11.16) и (11.17) числители и знаменатели умножить на число Авогадро N_A, и учитывая, что $kN_A = R$ и $m_0 N_A = M$, где R – газовая постоянная, M – молярная масса, получим формулы, более пригодные для употребления:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}; \quad \overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \quad v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (11.18)$$

Составление таблиц, используя формулу (11.11) очень неудобно, так как в ней имеются 2 параметра v и T. Поэтому на практике используется распределение по относительным скоростям $u = \frac{v}{v_в}$. Заменяя в (11.11) v на $uv_в$, получаем следующую формулу для функции распределения по относительным скоростям:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)\mathrm{d}u. \qquad (11.19)$$

Конечно, в (11.11) предполагается, что $\mathrm{d}v << v_в$, а в (11.19) что $\mathrm{d}u << 1$.

11.3. Барометрическая формула

Атмосферное давление на высоте h определяется весом столба воздуха от данной высоты до верхней границы атмосферы. Выделим мысленно в атмосфере вертикальный столб квадратного сечения S. При переходе от плоскости, находящейся на высоте h к плоскости, расположенной на высоте $h + \mathrm{d}h$, давление уменьшится на величину веса воздуха, расположенного между этими плоскостями.

$$-\mathrm{d}p = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S g \mathrm{d}h}{S} = \rho g \mathrm{d}h, \qquad (11.20)$$

где ρ – плотность воздуха на высоте h;

m – масса газа, расположенного между указанными плоскостями.

При давлениях порядка атмосферного и температурах, не отличающихся сильно от нуля по Цельсию, воздух хорошо описывается уравнением Клапейрона–Менделеева, из которого получаем:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}.$$

Подставив это значение в формулу (11.20), получим:

$$\mathrm{d}p = -\frac{Mp}{RT} g \mathrm{d}h.$$

Или, разделив переменные:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT} \mathrm{d}h. \qquad (11.21)$$

Предполагая температуру постоянной, интегрирование выражения (11.21) дает:

$$\ln p = -\frac{Mgh}{RT} + \ln C.$$

Произвольную постоянную мы представили в виде $\ln C$. Потенцируя последнее уравнение, получим:

$$p = C \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

При $h = 0$ получаем, что $C = p_0$, где p_0 – давление на высоте, принятой за начало отсчета. Тогда для изотермической атмосферы

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \qquad (11.22)$$

Мы получили барометрическую формулу.

На самом деле температура понижается с увеличением высоты. На высоте 10 км она на несколько десятков кельвин ниже, чем на поверхности Земли. Однако относительное изменение температуры сравнительно небольшое, и поэтому по формуле (11.22) по измеренному давлению высота определяется довольно точно. Соответствующие приборы называют альтиметрами.

11.4. Распределение Больцмана

Учитывая, что $p = nkT$, формулу (11.12) можно представить в виде:

$$nkT = n_0 kT \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right).$$

После сокращений получаем:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \qquad (11.23)$$

Здесь n_0 и n – концентрации молекул газа соответственно на высоте, принятой за начало отсчета и на высоте h.

Разделив числитель и знаменатель на число Авогадро N_A, получим

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right). \qquad (11.24)$$

Величина $m_0 gh$ представляет собой потенциальную энергию $\varepsilon_{\text{п}}$ частицы газа на данной высоте. Поэтому последнюю формулу можно переписать так:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{п}}}{kT}\right). \qquad (11.25)$$

Здесь n_0 и n – концентрация молекул соответственно в месте, где $\varepsilon_{\text{п}}$ принята равной нулю, и где она равна $\varepsilon_{\text{п}}$.

Л. Больцман доказал, что формула (11.25) справедлива для потенциального силового поля любой природы, в котором имеется совокупность одинаковых частиц, находящихся в состоянии теплового равновесия. Поэтому формула (11.25) называется формулой Больцмана.

11.5. Определение числа Авогадро

Используя формулу Больцмана, можно определить число Авогадро, исследуя распределение по высоте одинаковых броуновских частиц, которое описывается данной формулой. Единственная проблема, которую долго не удавалось решить – это как создать множество одинаковых по массе и размерам частиц. Это удалось сделать французскому физику Перрену.

Ему удалось изготовить эмульсию из множества шариков из гуммигута (сгущенного млечного сока, получаемого из надрезов коры некоторых деревьев, произрастающих в Южной Азии). Радиусы шариков составляли порядка 0,1 микрометра.

Слой эмульсии толщиной 0,1 миллиметра помещался в стеклянную кювету. Он рассматривался с помощью микроскопа. Глубина слоя, выделяемого микроскопом, обычно невелика, она составляла около 1 микрометра, что составляло несколько диаметров частиц. Перемещая тубус микроскопа по вертикали, можно было исследовать распределение частиц по высоте.

Исходя из формулы (11.25), концентрация частиц на высоте h от дна кюветы составляет:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{m'gh}{kT}\right),$$

где n_0 – концентрация частиц у дна (при $h = 0$). При этом учитывалось действие силы Архимеда, поэтому вместо mg в последнюю формулу входит $m'g = (\rho - \rho')Vg$, где ρ – плотность гуммигута, ρ' – плотность жидкости, V – объем частицы. Плотность жидкости подбиралась близкой к плотности гуммигута. Действие силы Архимеда создавало такой эффект, будто масса частиц значительно уменьшилась. Поэтому распределение частиц по высоте становилось существенно более плавным и доступным для количественных измерений.

Число шариков $\Delta N(h)$, которые наблюдаются на глубине h, равно $n(h)S\Delta x$, где S – площадь поля зрения микроскопа, Δx – глубина поля зрения. Отношение числа частиц для двух различных глубин:

$$\frac{\Delta N(h_1)}{\Delta N(h_2)} = \frac{n(h_1)S\Delta x}{n(h_2)S\Delta x} = \frac{n(h_1)}{n(h_2)} = \frac{\exp(-m'gh_1/kT)}{\exp(-m'gh_2/kT)};$$

$$\frac{\Delta N(h_1)}{\Delta N(h_2)} = \exp\left[m'g(h_2 - h_1)/kT\right].$$

Взяв натуральный логарифм от обеих частей последнего равенства, получим:

$$\ln\frac{\Delta N(h_1)}{\Delta N(h_2)} = m'g(h_2 - h_1)/kT,$$

откуда следует

$$k = \frac{m'g(h_2 - h_1)}{T\ln\dfrac{\Delta N(h_1)}{\Delta N(h_2)}}.$$

Таким образом, по измеренным h_1, h_2, $\Delta N(h_1)$, $\Delta N(h_2)$, можно определить величину k, а разделив универсальную газовую постоянную R на k, получить значение числа Авогадро N_A.

Перрен получил для N_A значения в интервале от $6{,}5 \cdot 10^{23}$ до $7{,}2 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Это хорошо согласуется со значением $6{,}02 \cdot 10^{23}$, полученным в дальнейшем, используя более совершенные методы исследований.

Подобное согласие показывает, что к броуновским частицам применим закон Больцмана.

Вопросы к главе 11

1. Что такое вероятность случайного события? Назовите свойства этой величины.
2. Что такое функция распределения вероятности для случайной величины? Назовите свойства этой величины.
3. Приведите формулу распределения Максвелла.
4. Что такое средняя и наиболее вероятная скорости молекул? Приведите формулы.
5. Приведите барометрическую формулу.
6. Что определяет распределение Больцмана?

12. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В молекулярной кинетической теории равновесное состояние рассматривается как состояние полной хаотичности движения молекул, распределение которых по скоростям подчиняется закону Максвелла. Любое неравновесное состояние газа всегда связано с нарушением полной хаотичности движения. Основной особенностью неравновесных состояний является стремление газа самопроизвольно переходить к равновесному состоянию.

12.1. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул в газе

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь l, который называется **длиной свободного пробега.** В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о **средней длине свободного пробега молекул** $< l >$.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы** d (рис. 12.1). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

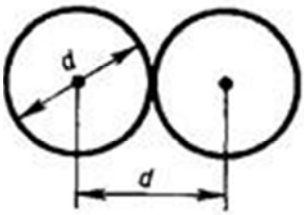


Рис. 12.1. Столкновение молекул

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $< v >$, и если $< z >$ – среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега:

$$< l > = \frac{< v >}{< z >}.$$

Для определения $< z >$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром d, которая движется среди других «застывших» мо-

лекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d, т. е. ле-жат внутри «ломаного» цилиндра радиусом d (рис. 12.2).

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$< z > = nV,$$

где n – концентрация молекул;

$V = \pi d^2 < v >$;

$< v >$ – средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с.

Таким образом, **среднее число столкновений**:

$$< z >= n\pi d^2 V < v > .$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул:

$$< z >= \sqrt{2} n\pi d^2 V < v > .$$

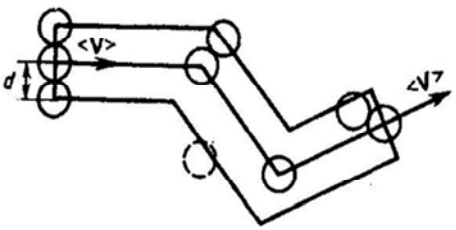


Рис. 12.2. К определению среднего числа столкновений

Тогда средняя длина свободного пробега:

$$< l >= \frac{1}{\sqrt{2} n\pi d^2},$$

т. е. $< l >$ обратно пропорциональна концентрации n молекул. С другой стороны, из $p = nkT$ следует, что при постоянной температуре n пропорциональна давлению p. Следовательно,

$$\frac{< l_1 >}{< l_2 >} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

12.2. Эксперименты, подтверждающие молекулярно-кинетическую теорию

Броуновское движение. Шотландский ботаник Р. Броун, наблюдая под микроскопом взвесь цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы оживленно и беспорядочно двигались, то вращаясь, то перемещаясь с места на место, подобно пылинкам в солнечном луче. Впоследствии оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров (~1 мкм), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого движения, называемого **броуновским**, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы). Причина броуновского движения долго оставалась неясной. Лишь через 80 лет после обнаружения этого эффекта ему было дано объяснение: броуновское движение взвешенных частиц вызывается ударами молекул среды, в которой частицы взвешены. Так как молекулы движутся хаотически, то броуновские частицы получают толчки с разных сторон, поэтому и совершают движение столь причудливой формы. Таким образом, броуновское движение является подтверждением выводов молекулярно-кинетической теории о хаотическом (тепловом) движении атомов и молекул. Среднее значение квадрата длины перемещения частицы при броуновском движении

$$< s^2 > = \frac{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_{1n}^2}{n}$$

пропорционально длительности промежутка времени t, в течение которого наблюдалось перемещение:

$$< s^2 > = \frac{kT}{3\pi a\eta} t.$$

Здесь s_i^2 – квадрат модуля перемещения под номером i (i = 1, 2,…, n), k – постоянная Больцмана, a – радиус частицы, η – коэффициент вязкости среды.

Опыт Штерна. Первое экспериментальное определение скоростей молекул выполнено немецким физиком О. Штерном. Его опыты позволили также оценить распределение молекул по скоростям. Схема установки Штерна представлена на рис. 12.3. Вдоль оси внутреннего цилиндра с щелью натянута платиновая проволока, покрытая слоем серебра, которая нагревается током при откачанном воздухе.

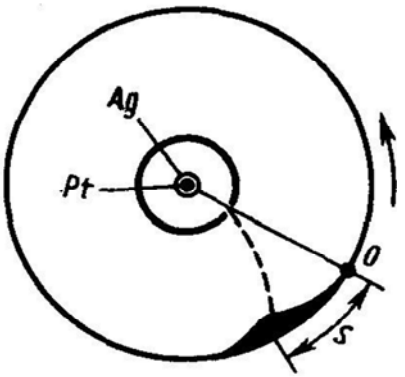


Рис. 12.3. Опыт Штерна

При нагревании серебро испаряется. Атомы серебра, вылетая через щель, попадают на внутреннюю поверхность второго цилиндра, давая изображение щели *O*. Если прибор привести во вращение вокруг общей оси цилиндров, то атомы серебра осядут не против щели, а сместятся от точки *O* на некоторое расстояние *s*. Изображение щели получается размытым. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить распределение молекул по скоростям, которое соответствует максвелловскому распределению. Зная радиусы цилиндров, их угловую скорость вращения, а также измеряя *s,* можно вычислить скорость движения атомов серебра при данной температуре проволоки. Результаты опыта показали, что средняя скорость атомов серебра близка к той, которая следует из максвелловского распределения молекул по скоростям.

Опыт Ламмерта. Этот опыт позволяет более точно определить закон распределения молекул по скоростям. Схема вакуумной установки приведена на рис. 12.4. Молекулярный пучок, сформированный источником, проходя через щель, попадает в приемник. Между источником и приемником помещают два диска с прорезями, закрепленных на общей оси. При неподвижных дисках молекулы достигают приемника, проходя через прорези в обоих дисках. Если ось привести во вращение, то приемника достигнут только те прошедшие прорезь в первом диске молекулы, которые затрачивают для пробега между дисками время, равное или кратное времени оборота диска.

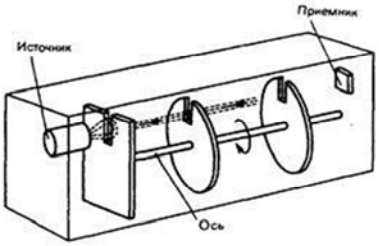


Рис. 12.4. Опыт Ламмерта

Другие же молекулы задерживаются вторым диском. Меняя угловую скорость вращения дисков, и измеряя число молекул, попадающих в приемник, можно выявить закон распределения молекул по скоростям. Этот опыт также подтвердил справедливость максвелловского распределения молекул по скоростям.

Опытное определение постоянной Авогадро. Воспользовавшись идеей распределения молекул по высоте (барометрическая формула, см. формулу (11.22)), французский ученый Ж. Перрен экспериментально определил значение постоянной Авогадро. Исследуя под микроскопом броуновское движение, он убедился, что броуновские частицы распределяются по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения. Применив к ним больцмановское распределение, можно записать:

$$n = n_0 e^{\frac{(m-m_1)gh}{kT}},$$

где m – масса частицы; m_1 – масса вытесненной ею жидкости, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$; $m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$ (r – радиус частицы, ρ – плотность частицы, ρ_1 – плотность жидкости). Если n_1 и n_2 – концентрации частиц на уровнях h_1 и h_2, а $k = R/N_A$, то

$$N_A = \frac{3RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g (h_2 - h_1)}.$$

Значение N_A, получаемое из работ Ж. Перрена, соответствовало значениям, полученным в других опытах, что подтверждает применимость к броуновским частицам больцмановского распределения.

12.3. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах. Теплопроводность. Диффузия. Вязкость

В термодинамически неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся **теплопроводность** (обусловлена *переносом энергии*), **диффузия** (обусловлена *переносом массы*) и **внутреннее трение** (обусловлено *переносом импульса*). Для простоты ограничимся *одномерными* явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

Теплопроводность. Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т. е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону Фурье:**

$$j_E = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}, \qquad (12.1)$$

где j_E – **плотность теплового потока** – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси x;

λ – **коэффициент теплопроводности**;

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки j_E и $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ противоположны).

Коэффициент теплопроводности λ численно равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_{vs} \rho < v >< l >, \qquad (12.2)$$

где c_{vs} – *удельная теплоемкость газа при постоянном объеме* (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме);

ρ – плотность газа;

$< v >$ – средняя скорость теплового движения молекул;

$< l >$ – средняя длина свободного пробега.

Газы обладают наименьшей теплопроводностью по сравнению с твердыми телами и жидкостями. Жидкости обычно проводят тепло хуже твердых тел. Так, теплопроводность воды – 0,63, а меда – 385 Дж/(с·м·К). Исключение составляет жидкий гелий II, у которого при понижении температуры ниже 2,19 К теплопроводность возрастает более, чем в 3 миллиона раз, он проводит тепло несравненно лучше меди.

Диффузия. Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется **закону Фука**:

$$j_m = -D \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}, \qquad (12.3)$$

где j_m – **плотность потока массы** – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего *в единицу времени через единичную площадку,* перпендикулярную оси *x*;

D – **коэффициент диффузии**;

$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$ – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины *x* в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки j_m и $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$ противоположны).

Коэффициент диффузии D численно равен на плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} < \lambda >< v > . \tag{12.4}$$

Внутреннее трение (**вязкость**). Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона**:

$$F = \eta \left| \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right| S, \tag{12.5}$$

где η – динамическая вязкость (вязкость);

$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении *x,* перпендикулярном направлению движения слоев;

S – площадь, на которую действует сила *F*.

Взаимодействие двух слоев, согласно второму закону Ньютона, можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (12.5) можно представить в виде:

$$j_p = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \tag{12.6}$$

где j_p – **плотность потока импульса** – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки j_p и $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ противоположны).

Динамическая вязкость η численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице; она вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho < v >< l > . \tag{12.7}$$

Из сопоставления формул (12.1), (12.3) и (12.6), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Эти законы были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов λ, D и η. Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное – не имеет смысла. Формулы (12.2), (12.4) и (12.7) связывают коэффициенты

переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между λ, D и η:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho D;$$

$$\frac{\lambda}{\eta c_{vs}} = 1.$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

12.4. Вакуум и методы его получения. Свойства ультраразреженных газов

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега. При достаточно большом разрежении столкновения между молекулами относительно редки, поэтому основную роль играют столкновения молекул со стенками сосуда. **Вакуумом** называется состояние газа, при котором средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ сравнима или больше характерного линейного размера d сосуда, в котором газ находится. В зависимости от соотношения $\langle l \rangle$ и d различают **низкий** ($\langle l \rangle \ll d$), **средний** ($\langle l \rangle \leq d$), **высокий** ($\langle l \rangle > d$) и **сверхвысокий** ($\langle l \rangle \gg d$) вакуум. Газ в состоянии высокого вакуума называется **ультраразреженным.**

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в технике, так как, например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях вакуума. Для получения различных степеней разрежения применяются **вакуумные насосы.** В настоящее время применяются вакуумные насосы, позволяющие получить предварительное разрежение (форвакуум) до $\approx$ 0,13 Па, а также вакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие получить давление до 13,3 мкПа – 1,33 пПа (10^{-7} –10^{-14} мм рт. ст.).

Принцип работы форвакуумного насоса представлен на рис. 12.5. Внутри цилиндрической полости корпуса вращается эксцентрично насаженный цилиндр.

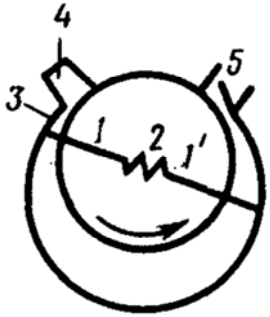


Рис. 12.5. Форвакуумный насос

Две лопасти *1* и *1'*, вставленные в разрез цилиндра и раздвигаемые пружиной *2*, разделяют пространство между цилиндром и стенкой полости на две части. Газ из откачиваемого сосуда поступает в область *3,* по мере поворачивания цилиндра лопасть *1* отходит, пространство *3* увеличивается и газ засасывается через трубку *4.* При дальнейшем вращении лопасть *1'* отключает пространство *3* от трубки *4* и начинает вытеснять газ через клапан *5* наружу. Весь процесс непрерывно повторяется.

Для получения высокого вакуума применяются **диффузионные насосы** (рабочее вещество – ртуть или масло), которые не способны откачивать газ из сосудов начиная с атмосферного давления, но способны создавать добавочную разность давлений, поэтому их употребляют вместе с форвакуумными насосами. Рассмотрим схему действия диффузионного насоса (рис. 12.6).

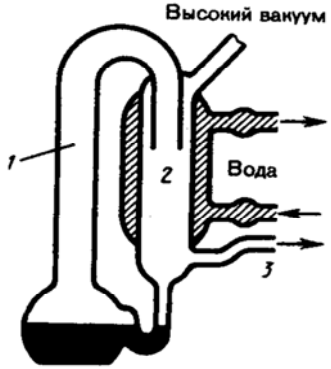


Рис. 12.6. Диффузионный насос

В колбе ртуть нагревается, пары ртути, поднимаясь по трубке *1*, вырываются из сопла *2* с большой скоростью, увлекая за собой молекулы газа из откачиваемого сосуда (в нем создан предварительный вакуум). Эти пары, попадая затем в «водяную рубашку», конденсируются и стекают обратно в резервуар, а захваченный газ выходит в пространство (через трубку *3*), в котором уже создан форвакуум. Если применять многоступенчатые насосы (несколько сопл расположены последовательно), то реально при хороших уплотнениях можно с помощью них получить разрежение до 10^{-7} мм рт. ст.

Для дальнейшего понижения давления применяются так называемые «ловушки» (рис. 12.7).

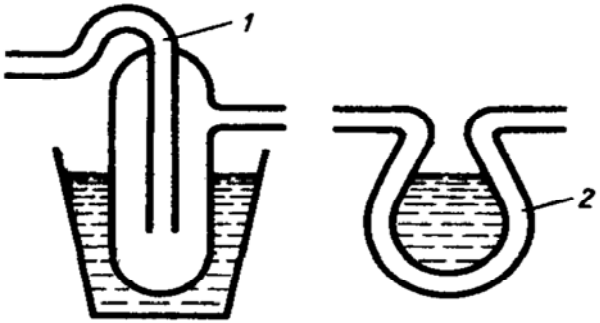


Рис. 12.7. Охлаждаемая ловушка

Между диффузионным насосом и откачиваемым объектом располагают специально изогнутое колено (*1* или *2*) соединительной трубки (ловушку), которую охлаждают жидким азотом.

При такой температуре пары ртути (масла) вымораживаются и давление в откачиваемом сосуде понижается приблизительно на 1–2 порядка.

Описанные ловушки называют **охлаждаемыми**; можно применять также **неохлаждаемые ловушки**. Специальное рабочее вещество (например, алюмогель) помещают в один из отростков соединительной трубки вблизи откачиваемого объекта, которое поддерживается при температуре 300 °С.

При достижении высокого вакуума алюмогель охлаждается до комнатной температуры, при которой он начинает поглощать имеющиеся в системе пары. Преимущество этих ловушек состоит в том, что с их помощью в откачиваемых объектах можно поддерживать высокий вакуум уже после непосредственной откачки в течение даже нескольких суток.

Остановимся на некоторых свойствах ультраразреженных газов. Так как в состоянии ультраразрежения молекулы практически друг с другом не сталкиваются, то газ в этом состоянии не обладает внутренним трением. Отсутствие соударений между молекулами разреженного газа отражается также на механизме теплопровод-

ности. Если при обычных давлениях перенос энергии молекулами производится «эстафетой», то при ультраразрежении каждая молекула *сама* должна перенести энергию от одной стенки сосуда к другой. Явление уменьшения теплопроводности вакуума при понижении давления используется на практике для создания тепловой изоляции. Например, для уменьшения теплообмена между телом и окружающей средой тело помещают в сосуд Дьюара, имеющий двойные стенки, между которыми находится разреженный воздух, теплопроводность которого очень мала.

Рассмотрим два сосуда *1* и *2,* поддерживаемых соответственно при температурах T_1 и T_2 (рис. 12.8) и соединенных между собой трубкой. Если длина свободного пробега молекул гораздо меньше диаметра соединительной трубки ($<l> << d$), то стационарное состояние газа характеризуется равенством давлений в обоих сосудах, что означает $p_1 = p_2$.

Рис. 12.8. Сосуды с ультраразреженным газом

Стационарное же состояние ультраразреженного газа ($<l> >> d$), находящегося в двух сосудах, соединенных трубкой, возможно лишь в том случае, когда встречные потоки частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой, одинаковы, т. е.

$$n_1 < v_1 > = n_2 < v_2 >, \qquad (12.8)$$

где n_1 и n_2 – концентрации молекул в обоих сосудах;

$<v_1>$ и $<v_2>$ – средние скорости молекул.

Учитывая, что $n = p/(kT)$ и $< v >= \sqrt{8RT / (\pi M)}$ из условия (12.1) получаем:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

т. е. в условиях высокого вакуума выравнивания давлений не происходит.

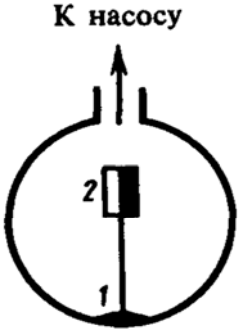


Рис. 12.9. К радиометрическому эффекту

Если в откачанный стеклянный баллон (рис. 12.9) на пружину *1* насадить слюдяной листочек *2*, одна сторона которого зачернена, и освещать его, то возникнет разность температур между светлой и зачерненной поверхностями листочка. Из выражения (12.9) следует, что в данном случае разным будет и давление, т. е. молекулы от зачерненной поверхности будут отталкиваться с большей силой, чем от светлой, в результате чего листочек отклонится.

Это явление называется **радиометрическим эффектом**. На радиометрическом эффекте основано действие **радиометрического манометра**.

Вопросы к главе 12

1. В чем сущность явлений переноса? Каковы они и при каких условиях возникают?
2. Объясните физическую сущность законов Фурье, Фика, Ньютона.
3. Каков механизм теплопроводности ультраразреженных газов?

13. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики устанавливает количественное соотношение между внутренней энергией, теплотой и работой, но не позволяет определить направление протекания процессов в природе.

Второе начало термодинамики определяет направление протекания и характер процессов в природе. Существует несколько формулировок второго начала.

Формулировка Кельвина–Планка:

Невозможен периодический процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от одного источника (нагревателя), в эквивалентную ей работу.

Т. е. невозможно создать тепловой двигатель, работающий с одним источником теплоты (так называемый вечный двигатель второго рода). Двигатель второго рода, будь он возможен, был бы практически вечным, так как запас энергии в окружающей среде почти безграничен. Охлаждение, например, воды океанов только на 1 °С дало бы огромную энергию.

Формулировка Клаузиуса:

Теплота не может переходить самопроизвольно от тел с более низкой температурой к телам с более высокой температурой.

Следовательно, без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому.

13.1. Тепловые машины. Теорема Карно. Цикл Карно

Исторически второе начало термодинамики возникло из анализа работы тепловых двигателей. Под тепловым двигателем (машиной) будем понимать периодически действующее устройство, совершающее механическую работу за счет внутренней (т. е. тепловой) энергии топлива. Все тепловые двигатели могут быть сведены к одной упрощенной схеме (рис. 13.1). От тела с более высокой температурой T_1, называемого **нагревателем**, за цикл отнимается **рабочим телом** (телом, способным совершать механическую работу, например цилиндром с поршнем, внутри которого находиться

газ) количество теплоты Q_1. Рабочее тело совершает механическую работу A и передает количество теплоты Q_2 телу с более низкой температурой T_2, называемому **холодильником.** Совершаемая рабочим телом работа $A = Q_1 - Q_2$.

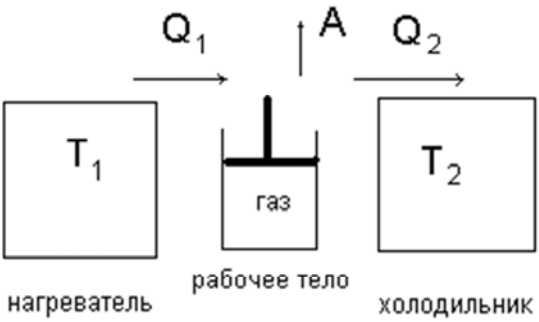


Рис. 13.1. Схема работы теплового двигателя

КПД теплового двигателя равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (13.1)$$

Основываясь на втором начале термодинамики, Н. Карно вывел теорему: **из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей и холодильников, наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от конструкции машины.**

Круговым процессом или **циклом** называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние.

Цикл Карно и представляет собой **круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат**. Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем. Данный цикл является самым экономичным.

Цикл Карно схематически изображен на рис. 13.2, где изотермическое расширение и сжатие задано соответственно кривыми *1–2* и *3–4*, а адиабатические расширение и сжатие – кривыми *2–3* и *4–1*.

Рис. 13.2. Схема цикла Карно

При изотермическом процессе внутренняя энергия U = const, поэтому, согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя, равно работе расширения A_{12}, совершаемой газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

$$A_{12} = \int_{V1}^{V2} p\mathrm{d}V = \int_{V1}^{V2} \frac{\nu R T_1}{V}\mathrm{d}V = \nu R T_1 \int_{V1}^{V2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \nu R T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1}). \quad (13.2)$$

При дальнейшем расширении *2–3*, но уже адиабатическом, теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии, газ при этом охлаждается до температуры T_2:

$$A_{23} = \nu C_V (T_2 - T_1). \quad (13.3)$$

Теплота Q_2, отданная газом холодильнику при изотермическом сжатии, равна работе сжатия A_{34} и по аналогии с (13.2):

$$A_{34} = -Q_2 = \int_{V3}^{V4} p\mathrm{d}V = \nu R T_2 \ln(\frac{V_4}{V_3}). \quad (13.4)$$

Работа при дальнейшем адиабатическом сжатии A_{41} совершается за счет изменения внутренней энергии, газ при этом нагревается до температуры T_1:

$$A_{41} = \nu C_V (T_1 - T_2). \tag{13.5}$$

Из формул (13.3) и (13.5) видно, что $A_{23} + A_{41} = 0$.

Работа, совершаемая в результате кругового процесса (равная площади цикла в координатах p, V), равна:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 + A_{41} = Q_1 - Q_2.$$

КПД цикла Карно, согласно (13.1), и используя формулы (13.2) и (13.4):

$$\eta = \frac{\nu R T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1}) + \nu R T_2 \ln(\frac{V_4}{V_3})}{\nu R T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1})} = \frac{T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1}) - T_2 \ln(\frac{V_3}{V_4})}{T_1 \ln(\frac{V_2}{V_1})}. \tag{13.6}$$

Используем уравнение Пуассона для адиабат *2–3* и *4–1*:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad \text{и} \quad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$$

и, разделив их друг на друга, получим:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{13.7}$$

Подставляя (13.7) в (13.6), получим:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

т. е. КПД цикла Карно определяется только температурой нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника.

13.2. Статистический смысл энтропии и 2-го начала термодинамики

Из выражения для КПД обратимого цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Если Q_2 – количество теплоты, отдаваемое рабочим телом холодильнику, считать отрицательным, то можно записать

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \qquad (13.8)$$

Величина Q/T называется **приведенным количеством теплоты**. Из формулы (13.8) следует, что для цикла Карно алгебраическая сумма приведенных количеств теплоты равна нулю.

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно $\mathrm{d}Q$ / T. Строгий теоретический анализ показывает, что для любого обратимого кругового процесса сумма приведенных количеств теплоты равна нулю. Тогда выражение (13.8) в общем виде может быть записано как

$$\oint \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0. \qquad (13.9)$$

Из равенства нулю интеграла, взятого по замкнутому контуру (13.9), следует, что подынтегральное выражение $\mathrm{d}Q$ / T есть полный дифференциал некоторой функции состояния системы (которая не зависит от пути, каким система пришла в это состояние). Таким образом,

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}. \qquad (13.10)$$

Функция состояния, дифференциалом которой является dQ / T, называется **энтропией** и обозначается как S (введена Клаузиусом).

Из формулы (13.9) следует, что для **обратимых процессов** изменение энтропии равно нулю. В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей **необратимый цикл**, возрастает. Вышесказанное справедливо только для замкнутых систем. Это обобщается в виде неравенства Клаузиуса:

$$\Delta S \geq 0,$$

т. е. энтропия замкнутой системы может *либо возрастать* (в случае необратимых процессов), *либо оставаться постоянной* (в случае обратимых процессов). Всякий необратимый процесс является таковым, потому что обратный ему процесс оказывается маловероятным.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии – принцип возрастания энтропии. Этот принцип лежит в основе еще одной формулировки **второго начала термодинамики**: возможны лишь такие процессы, происходящие в макроскопической системе, которые ведут к увеличению ее энтропии.

Так, для плавления 1 моля льда требуется $\lambda = 6{,}02$ кДж/моль, при $T_{\text{пл}} = 273$ К. Соответственно, $\Delta S_{\text{пл}} = 22$ Дж/моль$\cdot$град. Как видно, энтропия воды больше энтропии льда.

Физический смысл энтропии был выяснен Л. Больцманом, предположившим, что энтропия связана с термодинамической вероятностью состояния системы. *Термодинамическая вероятность W состояния системы – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.* **Формула Больцмана** имеет следующий вид:

$$S = k \ln(W),$$

где k – постоянная Больцмана. Следовательно, энтропия может рассматриваться как мера вероятности состояния термодинамической системы. Формула Больцмана дает энтропии следующий смысл: **энтропия является мерой неупорядоченности системы**. Чем более упорядоченной является система, тем меньшим числом состояний

или способов ее можно реализовать, т. е. тем меньше энтропия этой системы. Это иллюстрирует таблица 13.1.

Таблица 13.1

Число молекул		Номера молекул слева	Номера молекул справа	Число способов данного распределения (термодинамическая вероятность W)	Вероятность
Слева	Справа				
4	0	1, 2, 3, 4	–	1	1/16
1	3	1 2 3 4	2, 3, 4 1, 3, 4 1, 2, 4 1, 2, 3	4	4/16
2	2	1, 2 1, 3 1, 4 2, 3 2, 4 3, 4	3, 4 2, 4 2, 3 1, 4 1, 3 1, 2	6	6/16
3	1	1, 2, 3 1, 2, 4 1, 3, 4 2, 3, 4	4 3 2 1	4	4/16
0	4	–	1, 2, 3, 4	1	1/16

Термодинамическая вероятность равномерного распределения частиц по объему сосуда начинает быстро превалировать с ростом числа частиц. Это демонстрируют данные, приведенные в таблице 13.2. В ней рассмотрены отношения термодинамических вероятностей равномерного распределения частиц, когда в каждой половине сосуда находится половина частиц, и распределения, когда в одной половине находится 2/3 частиц, а во второй 1/3.

Таблица 13.2

Число частиц N	$\frac{W(N/2, N/2)}{(2N/3, N/3)}$
4	1,5
24	20
48	463
68	6800

Иногда второе начало термодинамики формулируют как невозможность вечного двигателя второго рода. Под таким двигателем понимают воображаемую периодически действующую машину, которая уменьшает энергию теплового резервуара и целиком превращает ее в работу без каких-либо изменений в окружающей среде.

Второе начало термодинамики не является таким же универсальным и всеобъемлющим, каким является первое начало. Первое начало фактически является законом сохранения энергии, примененным к тепловым явлениям. Поэтому он может быть применен ко всем системам и процессам без исключения. Второе начало может быть применено только к изолированным системам конечных размеров.

Если не принять во внимание последний факт, то возможны ошибочные теории. Так, в XIX веке возникла теория тепловой смерти Вселенной. Предполагалось, что принцип роста энтропии является универсальным физическим законом, не имеющим никаких ограничений. Тогда энтропия Вселенной стремится к максимуму. Если во всех областях Вселенной любые процессы сопровождаются тем, что некоторое количество других видов энергий превращаются в теплоту, а теплота передается от нагретых тел к холодным, то происходит непрерывный процесс превращения других видов энергии в теплоту, и температура различных тел выравнивается. В результате развитие природы приводит к прекращению этого самого развития, так как все видя энергии превращаются в теплоту и в ней находят свою смерть.

С подобной трактовкой второго начала термодинамики согласится никак нельзя. Вывод о росте энтропии сделан на основании результатов, полученных в ограниченной области Вселенной и поэтому не может быть обобщен на всю Вселенную в целом. Вселенная не является обычной замкнутой изолированной термодинамической системой. Как установил А. А. Фридман, заполненная веществом, обладающим свойством тяготения, она не может быть стационарной, а расширяется или сжимается, и из роста энтропии не следует стремление системы к состоянию термодинамического равновесия. Поэтому второе начало термодинамики неприменимо к процессам, протекающим в больших объемах Вселенной.

Необратимость протекающих процессов выполняется только для больших и замкнутых систем. С точки зрения статистической физи-

ки возможны отклонения значений физических величин от их средней величины, называемые флуктуациями, которые в системах с малым количеством частиц могут быть сравнимы со средними значениями физических величин. Подобные системы самопроизвольно выходят из состояния термодинамического равновесия и второе начало термодинамики к ним неприменимо. Примером является броуновское движение.

13.3. Энтропия идеального газа

Согласно 1-му началу термодинамики $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$. Тогда согласно (13.10):

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U + p\mathrm{d}V}{T}. \qquad (13.11)$$

Запишем (13.11) для одного моля газа, учитывая, что $U_m = c_{vm}T$, а $p/T = R/V_m$. Индексы m означают, что соответствующие величины относятся к одному молю.

$$\mathrm{d}S_m = c_{vm}\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\frac{\mathrm{d}V_m}{V_m}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, для одного моля газа получим выражение в переменных T и V:

$$S_m = c_{vm}\ln T + R\ln V_m + S_0. \qquad (13.12)$$

Здесь S_0 – постоянная интегрирования. В уравнениях, описывающих процессы, происходящие на практике, фигурирует либо изменение энтропии, либо производная от нее. Тогда S_0 исчезает.

Принимая во внимание уравнения Клапейрона–Менделеева $pV_m = RT$ и Майера $c_{pm} = c_{vm} + R$, где c_{pm} – малярная теплоемкость при постоянном давлении, получим выражение для S_m в переменных p и T:

$$S_m = c_{pm}\ln T - R\ln p + S_0'. \qquad (13.13)$$

Здесь $S_0' = R\ln R + S_0$.

Чтобы перейти к переменным p и V, заменим T в выражении (13.12) на pV_m / R:

$$S_m = c_{vm}\ln p + c_{vm}\ln V_m - c_{vm}\ln R + R\ln V_m + S_0.$$

Объединив члены с $\ln V_m$, получим:

$$S_m = c_{vm}\ln p + c_{pm}\ln V_m + S_0''. \qquad (13.14)$$

Здесь $S_0'' = c_{vm}\ln R + S_0$.

Так как энтропия является аддитивной величиной, то выражение для энтропии произвольной массы газа получаются, если одно из уравнений для S_m умножить на величину m/M, где M – малярная масса.

Вопросы к главе 13

1. Сформулируйте второе начало термодинамики.
2. Что такое тепловая машина?
3. Что такое цикл Карно?
4. Приведите формулу для КПД цикла Карно.
5. Что такое энтропия?
6. Что такое термодинамическая вероятность?
7. Как связаны энтропия и термодинамическая вероятность?
8. Приведите формулу для энтропии идеального газа

14. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ. ФАЗЫ. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

14.1. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Газ, для которого нельзя пренебречь потенциальной энергией взаимодействия между молекулами, а также их размерами, называется реальным.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева) для одного моля имеет вид:

$$pV_m = RT.$$

Для реального газа Ван дер Ваальс дополнил это уравнение поправками, учитывающими объем, не доступный для движения молекул (b) и силы межмолекулярного взаимодействия (притяжения), создающие дополнительное давление на газ ($p' = a / V_m^2$). Это учитывает поправка a. Анализ дает, что величина b равна учетверенному суммарному объему всех молекул газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа) для одного моля реального газа:

$$(p + \frac{a}{V_m^2})(V_m - b) = RT.$$

Здесь a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса.

Для ν молей газа, занимающих объем V, учитывая, что $V_m = V/\nu$, уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид:

$$(p + \frac{\nu^2 a}{V_m^2})(V_m - \nu b) = \nu RT.$$

Внутренняя энергия одного моля реального газа U_m складывается из кинетической энергии движения частиц ($U_m' = C_V T$, такой же, как и идеального газа) и потенциальной энергии взаимодействия молекул газа ($U_m'' = \int p \mathrm{d}V_m = \int a / V_m^2 \mathrm{d}V_m = -a / V_m$).

Для одного моля газа:

$$U_m = C_V T - \frac{a}{V_m}.$$

Для ν молей газа:

$$U = \nu C_V T - \frac{\nu a}{V_m}.$$

14.2. Фазы. Фазовые переходы 1-го и 2-го рода

Фаза – однородная, одинаковая по своим свойствам часть системы, отделенная от других частей четкой границей. Две фазы вещества могут существовать в равновесии только в определенном интервале температур и давлений. В координатах p–T этому соответствует кривая равновесия двух фаз.

Три фазы одного вещества могут существовать только в одной точке при строго фиксированных давлении и температуре. Так, у воды давление в тройной точке $p_{\text{тр}} = 6{,}1 \cdot 10^2$ Па, а температура $T_{\text{тр}} = 273{,}0075$ К. Для CO_2 $p_{\text{тр}} = 5{,}1$ атм, так что при нормальном атмосферном давлении твердая углекислота испаряется (сублимирует) без образования жидкой фазы, которая существует только при давлениях $p > p_{\text{тр}}$.

Равновесие более 3-х фаз одного и того же вещества невозможно. Это правило Гиббса.

При *фазовых переходах 1-го рода* внутренняя энергия испытывает скачкообразное изменение, а сам переход происходит с поглощением или выделением теплоты, которую называют скрытой теплотой фазового превращения.

Переход жидкости в газообразное состояние называется **испарением**, обратный процесс называется **конденсацией**. Переход в газообразное состояние твердого тела носит название **сублимации**. Обратный переход называется кристаллизация из газовой фазы. Сублимация, например, происходит при сушке белья в морозную погоду и при испарении твердой углекислоты при обычном атмос-

ферном давлении. Кристаллизация из газовой фазы, например, имеет место при образовании инея, она же используется в микроэлектронике для выращивания тонкого слоя полупроводника, легированного соответствующей примесью. Этот процесс называется эпитаксией из газовой фазы.

Испарение (сублимация) происходят до наступления равновесия между газом и жидкостью (газом и твердым телом). При достижении определенного для данной температуры давления количества молекул, покидающих жидкость и возвращающихся в нее, станут равны. Начиная с этого момента, плотность пара перестает изменяться. Между жидкостью и паром установится динамическое равновесие, которое будет существовать до тех пор, пока не изменится объем или температура системы. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным**. Давление, при котором наблюдается равновесие, называется **давлением** (или **упругостью**) **насыщенного пара**. Давление насыщенного пара растет с температурой.

Тепло q, которое необходимо сообщить единице массы вещества для того, чтобы превратить ее в пар, находящийся при той же температуре, какую имело вещество до испарения, называется **удельной теплотой** испарения (или сублимации). При конденсации тепло, затраченное при испарении, отдается обратно: образующаяся при конденсации жидкость (или твердое тело) нагревается.

Кроме этого, существуют фазовые переходы между различными модификациями твердых тел. Так, кристаллы белого и серого олова (соответственно β-олова и α-олова) существуют при температурах соответственно выше +13,2 °С и ниже этой температуры. Наиболее быстро переход $\beta \rightarrow \alpha$ происходит при – 33 °С. Серое олово является чрезвычайно хрупким и непрочным. Переход белого олова в серое называется оловянная чума. Он сопровождается быстрым разрушением кристалла. Правда, белое олово легко выдерживает переохлаждение на 20–30 °С. Однако при длительном сильном охлаждении возможна оловянная чума. Она и привела к гибели в 1912 году экспедиции Скотта на Южный полюс – медные сосуды с горючим были запаяны оловом.

Кривая фазового равновесия определяется уравнением Клапейрона–Клаузиуса:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{q_{12}}{T(V_{2m} - V_{1m})},$$

где q_{12} – скрытая удельная теплота фазового превращения из состояния *1* в состояние *2*;

V_{1m} и V_{2m} – молярные объемы в состояниях *1* и *2* соответственно. Для сублимации и испарения $V_{2m} > V_{1m}$, и $\mathrm{d}p / \mathrm{d}T > 0$ всегда. В случае плавления иногда возможна и обратная ситуация $V_{2m} < V_{1m}$ и $\mathrm{d}p / \mathrm{d}T < 0$ (лед, Ga, Bi, Sb, некоторые сплавы).

Иногда легкое скольжение коньков по льду объясняют тем, что под действием силы, действующей на лед со стороны коньков, он плавится. Однако расчет по последней формуле дает, что для изменения температуры плавления льда на 1 °С необходимо изменить давление более, чем на 100 атмосфер, что сделать коньками совершенно невозможно.

При испарении кинетическая энергия молекул уменьшается, так как среднее расстояние между молекулами увеличивается и необходимо выполнить работу против сил притяжения между молекулами, т. е. увеличить потенциальную энергию. Кроме того, необходимо выполнить работу против сил внешнего давления, так как объем пара больше, чем объем жидкости. Для воды эта работа примерно в 10 раз меньше, чем рост потенциальной энергии. Все это обуславливает увеличение внутренней энергии при испарении.

При конденсации, наоборот, молекулы пара, двигаясь к поверхности жидкости, ускоряются силами притяжения, и их кинетическая энергия увеличивается как раз настолько, насколько она уменьшилась при вылете из жидкости.

При плавлении рост внутренней энергии связан с ростом потенциальной энергии молекул. Например, кинетическая энергия молекул воды при 0 °С и льда при 0 °С одна и таже.

Фазовые переходы 2-го рода происходят без поглощения или выделения теплоты. На графике зависимости внутренней энергии от температуры в точке фазового перехода 2 рода происходит излом, а не разрыв. Разрыв в данной точке испытывает теплоемкость – производная от внутренней энергии. Примерами служат переход железа из сильномагнитного состояния – ферромагнитного – в сла-

бомагнитное парамагнитное при 768 °С или аналогичный переход никеля при 365 °С. При низких температурах у многих проводников тока сопротивление скачкообразно уменьшается практически до нуля. Это явление называется сверхпроводимостью. Также при низких температурах жидкий гелий перестает препятствовать движению в нем тел. Это явление сверхтекучести.

14.3. Равновесие между паром и жидкостью. Критическое состояние. Метастабильные состояния

Рассмотрим процесс сжатия газа при постоянной температуре (т. е. получим **изотерму реального газа**). Вначале по мере уменьшения объема давление газа будет расти (рис. 14.1).

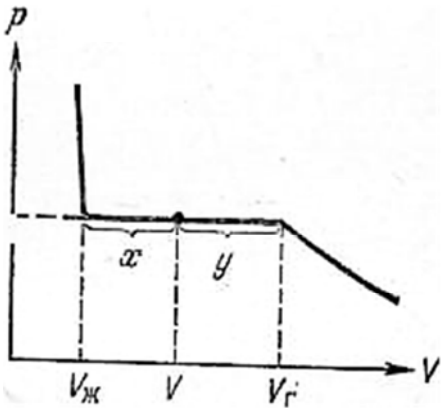


Рис. 14.1. Изотерма реального газа

По достижении объема $V_г$ давление перестает изменяться, а часть газа конденсируется в жидкость. Происходит расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную. По мере дальнейшего уменьшения объема все большая часть газа переходит в жидкую фазу, причем переход осуществляется при постоянном давлении $p_{нп}$ (**давлении насыщенного пара**). После того как процесс конденсации вещества заканчивается (при достижении объема $V_ж$), дальнейшее уменьшение объема начинает сопровождаться быстрым ростом давления.

Отношение масс жидкости и насыщенного пара в двухфазном состоянии равно отношению отрезков, на которые делит горизонтальный участок изотермы точка, изображающая состояние.

$$\frac{m_{\text{ж}}}{m_{\text{г}}} = \frac{V_{\text{г}} - V}{V - V_{\text{ж}}} = \frac{y}{x}.$$

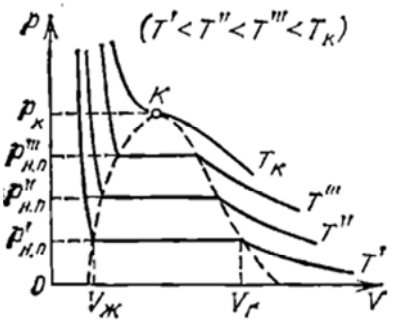


Рис. 14.2. Семейство изотерм реального газа при различных температурах

На рис. 14.2 приведены изотермы для нескольких значений температуры. Из рисунка видно, что с повышением температуры горизонтальный участок изотермы сокращается, стягиваясь в точку, называемую **критической точкой**.

Соответствующую этому состоянию температуру $T_{\text{кр}}$, объем $V_{\text{кр}}$, давление $p_{\text{кр}}$ называют также **критическими величинами**. Отметим, что с ростом температуры плотность жидкости уменьшается, а насыщенного пара увеличивается и в критической точке различие между жидкостью и насыщенным паром исчезает (плотности жидкости и пара становятся равными, рис. 14.3). При $T > T_{\text{кр}}$ вещество находится в однородном газообразном состоянии.

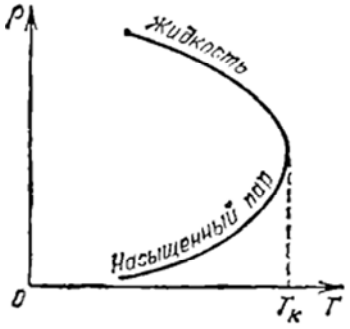


Рис. 14.3. Зависимость плотности жидкости и ее насыщенного пара от температуры

Газ выше критической температуры нельзя превратить в жидкость.

Понятие критической температуры впервые было введено Д. И. Менделеевым. Он назвал ее **температурой абсолютного кипения жидкости** и рассматривал как температуру, при которой исчезают силы сцепления между молекулами и жидкость превращается в пар.

На рис. 14.4 наложены одна на другую реальная изотерма и изотерма Ван-дер-Ваальса. Из сопоставления изотермы Ван-дер-Ваальса с реальной изотермой вытекает, что эти изотермы примерно совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества (газу и жидкости), но ведут себя совершенно различным образом в области расслоения на две фазы (где существуют насыщенный пар и жидкость).

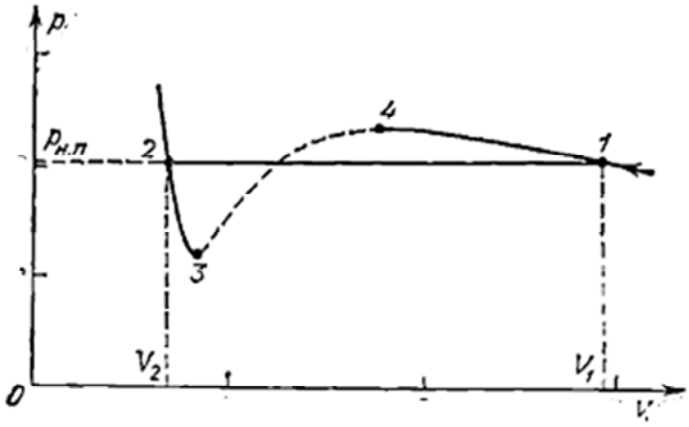


Рис. 14.4. Изотермы Ван-дер-Ваальса и экспериментальная

Вместо S-образного завитка на изотерме Ван-дер-Ваальса реальная изотерма имеет в этой области прямолинейный горизонтальный участок.

Расслоение на две фазы объясняется неустойчивостью однородных состояний, отвечающих завитку *2–3–4–1*. Неустойчивость участка *3–4* очевидна, так как на нем увеличение объема газа должно сопровождаться ростом давления, что невозможно.

Участки *1–4* и *2–3* могут быть реализованы, но при особых условиях, и являются неустойчивыми. Подобные неустойчивые состояния называются также **метастабильными**. Метастабильным состояниям соответствуют локальные минимумы термодинамических параметров, а стабильным – абсолютные минимумы.

Вещество в состояниях *2–3* называется **перегретой жидкостью** (с температурой большей температуры кипения при данном давлении), вещество в состояниях *4–1* называется **пересыщенным паром** (он находится при давлении, превышающем давление насыщенных паров при данной температуре).

Условия реализации перегретой жидкости и пересыщенного пара – отсутствие центров парообразования и конденсации (посторонних включений – пылинок, капелек жидкости, заряженных частиц и т. д.).

Такие состояния очень неустойчивы: достаточно возникнуть хотя бы одному центру парообразования или конденсации, как состояние перегретой жидкости или пересыщенного пара будет нарушено и вещество перейдет в двухфазное состояние.

Перегрев и переохлаждение связаны с необходимостью затрат энергии на образование новой фазы (пузырьков пара, капелек жидкости).

Для кристаллов длительное пребывание в неустойчивой метастабильной фазе возможно без каких-либо ухищрений. Так, вполне устойчив алмаз. Белое олово способно выдерживать переохлаждение на 20–30^{o} ниже 18 ^{o}C.

14.4. Диаграмма состояний вещества

Равновесные состояния различных фаз вещества, в которых это вещество может существовать сколь угодно долго при отсутствии внешних воздействий, принято изображать в виде фазовых диаграмм. Их строят на основании экспериментальных данных. Пример подобной диаграммы приведен на рис. 14.5.

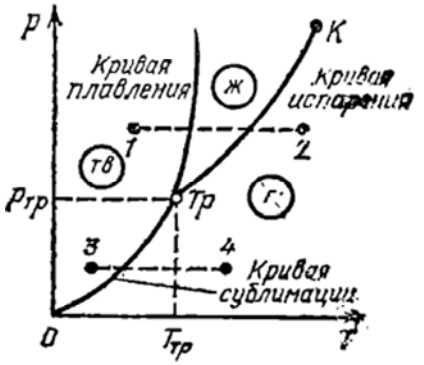


Рис. 14.5. Пример фазовой диаграммы вещества

При низких температурах вещество существует только в твердой и газообразной фазах. Состояния, соответствующие равновесному сосуществованию этих фаз, представлены на кривой сублимации. Она заканчивается в тройной точке, в которой в равновесии находятся твердая, газообразная и появляющаяся здесь жидкая фаза. Из тройной точки выходят кривая плавления и кривая испарения. Первая из них определяет условия равновесного существования твердой и жидкой фазы, а вторая – жидкой и газообразной.

Тройных точек может быть несколько, но без новой газовой фазы.

У кривой плавления не обнаружено окончания. Ее крайняя точка ограничена только возможностями создавать очень высокие давления. А кривая испарения заканчивается в критической точке. Кривые сублимации, плавления и испарения делят плоскость $p–T$ на три области. Вне кривых вещество существует только в одной фазе.

Твердая фаза существует в областях левее кривой сублимации и плавления. Жидкая фаза существует между кривыми плавления и испарения, а газообразная – правее кривой испарения.

Наклон кривой плавления зависит от того, как соотносятся плотности вещества в твердой и жидкой фазах. Если плотность в жидкой фазе выше, чем в твердой (например, у воды), кривая отклоняется влево. В таком случае возможны специфические особенности.

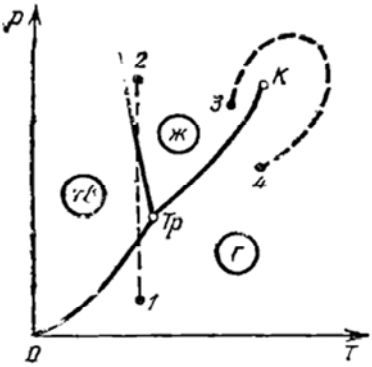


Рис. 14.6. Некоторые процессы с веществом

Например, если в состоянии *1* (рис. 14.6) сжимать газ, то образуется сначала твердое состояние, а при дальнейшем сжатии – жидкое.

Кривая испарения заканчивается в критической точке. Поэтому возможен переход из жидкого состояния *3* (рис. 14.6) в газообразное *4* в обход критической точки. При этом вещество в течение всего процесса не разделяется на 2 фазы, а представляет собой однородную массу.

Диаграмма состояния гелия отличается отсутствием кривой сублимации.

Вопросы к главе 14

1. Приведите уравнение Ван-дер-Ваальса. Что учитывают поправки, введенные им?
2. Что такое фаза, фазовый переход?
3. Какой пар называется насыщенным?
4. Что такое фазовые переходы 1-го и 2-го рода?
5. Что такое критическая температура?
6. Что такое метастабильные состояния? Приведите примеры
7. Приведите фазовую диаграмму вещества.

15. ЖИДКОЕ И ТВЕРДОЕ СОСТОЯНИЕ

15.1. Особенности строения жидкостей

Жидкости занимают промежуточное положение между газами и твердыми телами. В отличие от газов, они сохраняют объем, однако не сохраняют форму, что характерно для твердых тел. Если у молекул газа отсутствует порядок в расположении, то в расположении молекул жидкости имеется так называемый ближний порядок в их расположении, т. е. частицы, ближайшие к данной, расположены упорядоченно. Однако по мере удаления от данной частицы упорядоченность в расположении окружающих частиц все более нарушается. Для твердых тел характерен дальний порядок в расположении частиц, который сохраняется в пределах значительного объема. Вследствие близкого расположения молекул друг относительно друга, между ними действуют силы притяжения, что не позволяет жидкости испариться. Среднее расстояние между молекулами жидкости равно одному–двум диаметрам молекул, т. е. примерно 0,5 нм.

Отсутствие дальнего порядка в расположении частиц является причиной изотропии свойств жидкостей. Исключение составляют лишь жидкости, молекулы которых являются сильно удлиненными, Такие жидкости называют жидкими кристаллами. Для них характерна одинаковая ориентация молекул в пределах значительных объемов. В то же время, у них отсутствует упорядоченность в расположении молекул.

Тепловое движение молекул жидкости происходит следующим образом. Каждая молекула в течение некоторого времени, называемого временем оседлости, совершает беспорядочные колебания около определенного положения равновесия. Типичная длительность этого времени порядка 10^{-8} секунды. Затем происходит скачок в новое положение равновесия, отстоящее от предыдущего на расстояние порядка размеров молекулы. Такие скачки обуславливают текучесть жидкостей. Это особое свойство характерно только для жидкостей. С ростом температуры количество скачков в единицу времени растет, что приводит к уменьшению вязкости жидкостей. У газов, наоборот, вязкость растет с ростом температуры.

15.2. Поверхностное натяжение

Молекулы жидкости располагаются очень близко друг к другу, в результате чего силы притяжения между ними оказываются весьма значительными. Радиус r действия этих межмолекулярных сил составляет порядка 10^{-7} см. Для молекул, находящихся на расстояниях от поверхности, превышающих r, результирующая сила притяжения к соседним молекулам равна нулю. А вот для молекул приповерхностного слоя результирующая сила направлена внутрь жидкости. Обычно плотность газообразной среды, находящейся над поверхностью жидкости, намного меньше плотности жидкости, и в ней практически отсутствуют молекулы, находящиеся на расстояниях порядка r от поверхности жидкости. Поэтому их действием можно пренебречь. Для увеличения поверхности жидкости нужно вывести молекулы из объема в приповерхностный слой, что требует работы внешнего источника против сил притяжения.

Действие результирующей силы, направленной в объем, приводит к определенной ориентации молекул: они обращены к основной массе жидкости той стороной, которая больше всех поддается притягивающему действию со стороны этой массы.

Переход молекулы из объема в поверхностный слой осуществляется за счет потери части кинетической энергии, затрачиваемой на преодоление отмеченной силы притяжения к объему. Таким образом происходит переход части кинетической энергии в потенциальную. В результате поверхностный слой жидкости обладает дополнительной потенциальной энергией, которая является составной частью общей внутренней энергии. Аналогичная ситуация имеет место, если подбросить тело вверх – его кинетическая энергия уменьшается по мере подъема, а потенциальная растет.

В положении равновесия потенциальная энергия минимальна. Поэтому предоставленная самой себе жидкость стремиться занять форму, при которой ее поверхность минимальна. Такой формой является шар, что и подтверждает форма капель жидкости, находящейся в невесомости внутри космического корабля.

Выделим мысленно участок на поверхности жидкости, ограниченный замкнутым контуром. Стремление этого участка к минимальной площади приводит к тому, что он действует на остальную часть поверхности с силами, направленными по касательной к по-

верхности жидкости и перпендикулярными к данному участку отмеченного контура. Эти силы называют силами поверхностного натяжения. Сила, приходящаяся на единицу длины контура, называется поверхностным натяжением (иногда коэффициентом поверхностного натяжения) и обозначается σ. Она измеряется в ньютонах на метр (Н/м). Величина σ зависит от природы жидкости, ее температуры, наличия поверхностно-активных или других веществ (например, мыло или стиральный порошок, которые уменьшают σ воды, в то время как растворение NaCl, наоборот, увеличивает). В химической промышленности в воду часто добавляют специальные реагенты-смачиватели (сурфактанты), не дающие ей собираться в капли на какой-либо поверхности. Например, их добавляют в жидкие средства для посудомоечных машин. Попадая в поверхностный слой воды, молекулы таких реагентов заметно ослабляют силы поверхностного натяжения, вода не собирается в капли и не оставляет на поверхности пятен после высыхания. Силы поверхностного натяжения используются в промышленности – в частности, при отливке сферических форм, например ружейной дроби. Каплям расплавленного металла просто дают застывать на лету при падении с достаточной для этого высоты, и они сами застывают в форме шариков, прежде чем упадут в приемный контейнер.

Предположим, имеется рамка, в контакте с которой находится перемычка с малой массой, силой тяжести которой можно пренебречь (рис. 15.1). Между рамкой и перемычкой находится пленка жидкости. Так как пленка имеет две поверхности, то пленка граничит с перемычкой по двум прямолинейным участкам, длина каждого из которых равна длине перемычки l. Поэтому пленка действует на перемычку с силой, равной $2\sigma l$. Такую по величине силу F нужно приложить к перемычке, чтобы она не перемещалась вверх. Увеличим незначительно эту силу, чтобы перемычка переместилась на расстояние dx. При этом над жидкостью с помощью перемычки будет совершена работа:

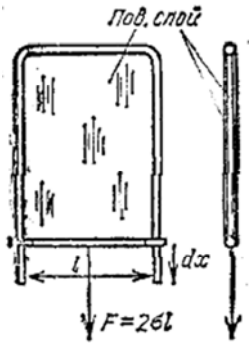


Рис. 15.1. Рамка с пленкой жидкости

$$\mathrm{d}A' = F\mathrm{d}x = 2\sigma l\mathrm{d}x = \sigma\mathrm{d}S, \qquad (15.1)$$

где $\mathrm{d}S$ – приращение площади поверхностного слоя пленки.

Это приращение произошло за счет совершенной работы (15.1). Соответственно, на величину $\mathrm{d}A'$ увеличилась поверхностная энергия E_s:

$$\mathrm{d}E_s = \mathrm{d}A' = \varepsilon_s\mathrm{d}S, \qquad (15.2)$$

где ε_s – приращение энергии единицы площади поверхностного слоя.

Из уравнений (15.1) и (152) видно, что σ представляет собой дополнительную энергию, которой обладает единица площади поверхностного слоя жидкости. Поэтому σ можно измерять и в джоулях на квадратный метр (Дж/м^2).

С ростом температуры величина σ уменьшается и становится равной нулю при критической температуре.

15.3. Явления смачивания и несмачивания

Возможна ситуация, когда граничат друг с другом сразу три вещества – жидкое, твердое и газообразное. В таком случае жидкость принимает форму, при которой сумма ее потенциальной энергии в поле силы тяжести и поверхностной энергии всех тел минимальна. При этом к каждому элементу контура приложены три силы поверхностного натяжения: $\sigma_{т.ж.}$ на границе жидкость – твердое тело, $\sigma_{ж.г.}$ на границе жидкость – газ и $\sigma_{т.г.}$ на границе твердое тело – газ. В таком случае контур, по которому граничат все эти вещества, располагается на поверхности твердого тела таким образом, чтобы сумма проекций данных трех таких сил на направление, в котором контур может перемещаться (это направление касательной к поверхности твердого тела), была равна нулю. Угол, отсчитываемый внутри жидкости от касательной к поверхности жидкости до касательной к поверхности твердого тела, называется краевым углом θ. В зависимости от соотношения между тремя указанными силами угол θ может принимать значения от нуля до 180°.

Из рис. 15.2 следует, что условие равновесия участка контура, длина которого Δl, расположенного перпендикулярно плоскости рисунка, имеет вид:

$$\Delta l\sigma_{\text{т.г.}} = \Delta l\sigma_{\text{т.ж.}} + \Delta l\sigma_{\text{ж.г.}}\cos\theta. \qquad (15.3)$$

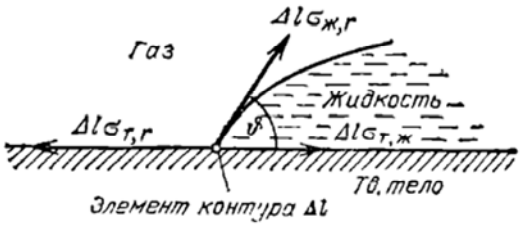


Рис. 15.2. Силы, действующие на элемент контура Δl

Краевой угол определяется выражением (15.3) только при условии, что $\cos\theta \le 1$, или

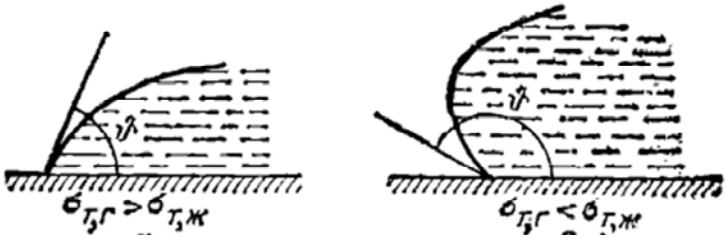
$$\frac{\left|\sigma_{\text{т.г.}} - \sigma_{\text{т.ж.}}\right|}{\sigma_{\text{ж.г.}}} \le 1. \qquad (15.4)$$

Если $\sigma_{\text{т.г}} > \sigma_{\text{т.ж}}$, угол θ оказывается острым – имеет место частичное смачивание, если же $\sigma_{т.г.} < \sigma_{т.ж.}$, угол θ оказывается тупым – имеет место частичное несмачивание (рис. 15.3).

Условие (15.4) не выполняется в двух случаях. В первом из них оказывается, что $\sigma_{\text{т.г.}} > \sigma_{\text{т.ж.}} + \sigma_{\text{ж.г.}}$. При сколь угодно малом θ сила $\sigma_{\text{т.г.}}$ превышает $\sigma_{\text{т.ж.}} + \sigma_{\text{ж.г.}}$. В этом случае жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела, образуя слой толщиной в одну молекулу. Это случай полного смачивания. Энергетически выгодной оказывается замена поверхности твердое тело – газ двумя поверхностями: твердое тело – жидкость и жидкость – газ. При полном смачивании $\theta = 0$. Во втором случае $\sigma_{\text{т.ж.}} > \sigma_{\text{т.г.}} + \sigma_{\text{ж.г.}}$. Тогда при θ сколь угодно близком к π сила $\sigma_{\text{т.ж.}}$ превышает две другие. Поверхность, по которой жидкость граничит с твердым телом, стягивается в точку. Это полное несма-

чивание. В данном случае энергетически выгодно замена поверхности твердое тело – жидкость двумя поверхностями: твердое тело – газ и жидкость – газ.

Различие в смачиваемости мелких твердых частиц используется для их разделения. Этот процесс называется флотацией. Он используется в основном для разделения минералов.



а *б*

Рис. 15.3. Частичные смачивание (*а*) и несмачивание (*б*)

15.4. Капиллярные явления

Так как поверхность жидкости стремится к сокращению до минимума, то давление под ее искривленной поверхностью отличается от давления под плоской поверхностью. Как видно из рис. 15.4, под выпуклой поверхностью давление выше, а под вогнутой ниже, чем под плоской.

а *б* *в*

Рис. 15.4. Давление под плоской (*а*), выпуклой (*б*) и вогнутой (*в*) поверхностями

Мысленно разделим сферическую каплю жидкости плоскостью на два полушария (рис. 15.5). Вследствие поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой:

$$F = \sigma 2\pi R.$$

Эта сила прижимает полушария по площади, равной площади большого круга $S = \pi R^2$, поэтому вызывает дополнительное давление:

$$\Delta p = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R}. \qquad (15.5)$$

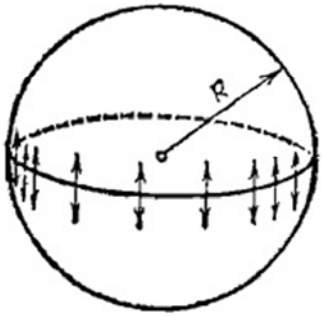


Рис. 15.5. Разделение капли на 2 равные части

Величина $\frac{2}{R}$ представляет собой среднюю кривизну H поверхности сферы. Она определяется через нормальные сечения поверхности в некоторой точке. Это линия пересечения этой поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в данной точке. Для сферы любое нормальное сечение представляет собой окружность. В общем случае различным нормальным сечениям, проходящим через одну и ту же точку (а их бесчисленное множество) соответствуют различные радиусы кривизны. В дифференциальной геометрии доказывается, что для любой пары взаимно перпендикулярных сечений полусумма обратных радиусов кривизны

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (15.6)$$

является постоянной величиной. Эта величина и называется средняя кривизна поверхности в данной ее точке. Очевидно, что для сферы $R_1 = R_2 = R$ и $H = 1/R$. Подставив это значение в (15.6), получим:

$$\Delta p = 2\sigma H. \qquad (15.7)$$

Лаплас показал, что формула (15.7) справедлива для поверхности любой формы.

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (15.8)$$

Радиусы R_1 и R_2 могут быть как положительными (для выпуклой линии пересечения), так и отрицательными (для вогнутой). Для цилиндрической поверхности $R_1 = R$, а $R_2 = \infty$, так что $H = 1/(2R)$.

В результате поверхностного натяжения поверхность жидкости вблизи стенок сосуда искривляется: касательная к поверхности жидкости чаще всего не перпендикулярна стенке. Узкая круглая трубка с малым внутренним радиусом называется капилляром. Для капилляра вся поверхность жидкости оказывается изогнутой. Она называется мениском. В случае смачивания жидкостью стенки сосуда (угол θ острый) мениск имеет вогнутую форму, а в случае несмачивания (угол θ тупой) – выпуклую (рис. 15.6).

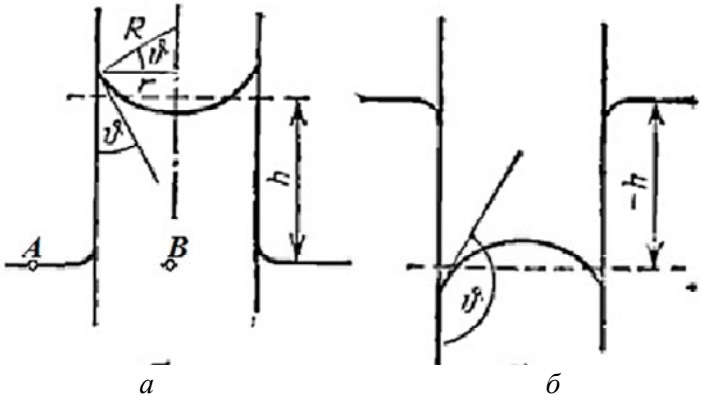


Рис. 15.6. Жидкость в капилляре при смачивании (*а*) и несмачивании (*б*)

Предположим, что капилляр опущен в широкий сосуд, заполненный жидкостью, смачивающей стенки капилляра. Вследствие давления, обусловленного кривизной поверхности, жидкость в капилляре испытывает давление Δp, направленное к центру кривизны мениска, т. е. вверх (отрицательное давление). Мениск представляет собой часть сферы и, согласно (15.8), $\Delta p = 2\sigma / r_0$, где r_0 – радиус мениска. Под действием данного давления столбик жидкости поднимется по капилляру до некоторой высоты h, при которой гидростатическое давление $\rho g h$ уравновесит давление Δp. Здесь ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. В ре-

зультате получим, что $2\sigma / r_0 = \rho g h$. Величина r_0 может быть выражена через радиус трубки r и краевой угол θ. Из рис. 15.7 видно, что $r_0 = r / \cos\theta$, тогда условие равновесия принимает вид:

$$2\sigma \cos\theta / r = \rho g h,$$

и

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r \rho g}. \qquad (15.9)$$

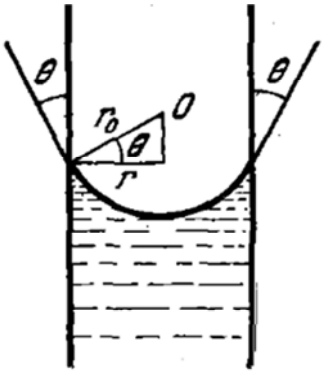


Рис. 15.7. Форма мениска при смачивании

В тонких капиллярных трубках удается поднять чистую воду на высоту до трех метров.

В случае несмачивания уровень жидкости в капилляре ниже уровня в широкой части сосуда на величину h.

Капиллярные явления играют значительную роль в природе и технике. Так, ствол, ветви, стебель и листва растений пронизаны множеством капиллярных каналов, по которым поступают питательные вещества. По капиллярам в почве грунтовые воды поднимаются к корневой системе растений. Мелкие кровеносные сосуды человека и животных можно также рассматривать как капилляры. Капиллярные явления довольно часто встречаются и в быту. Полотенца хорошо впитывают воду при вытирании, в авторучке чернила поступают к перу по капилляру. Чтобы избежать поглощения воды кожаной обувью через капилляры, ее обрабатывают специальными водоотталкивающими средствами. Капиллярные явления лежат в основе множества технических процессов: при смазке деталей машин и механизмов применяют фитильный способ; при окраске кожи и тканей краска заполняет капилляры изделия. Чтобы избежать капиллярного подъема воды из почвы, при строительстве домов фундамент отделяют от стен рубероидом или битумом.

По капиллярам находящаяся в почве вода поднимается вверх и интенсивно испаряется. Чтобы уменьшить испарение, нужно разрушить капилляры. Это достигается разрыхлением почвы.

Иногда требуется, наоборот, усилить приток влаги по капиллярам. Тогда почву укатывают, увеличивая этим количество капиллярных каналов.

Вода с растворенными в ней веществами способна по капиллярам дерева под действием отрицательного давления подниматься на большую высоту (у секвойи до 100 метров).

15.5. Особенности строения и свойств кристаллов

Все металлы и большинство минералов в твердом состоянии являются кристаллами. Существуют два вида кристаллов: монокристаллы и поликристаллы.

В монокристаллах упорядоченное расположение атомов сохраняется во всем объеме кристалла. Для монокристаллов характерна анизотропия – зависимость ряда свойств (механических, тепловых, электрических, оптических) от направления. Например, при нагревании некоторых кристаллов (графит, теллур, Cu_2O, некоторые цеолиты) они расширяются в одних направлениях и сжимаются в других. Анизотропия связана именно с упорядоченным расположением атомов или ионов или молекул, из которых построен монокристалл. Вследствие упорядоченного расположения монокристаллы имеют внешнюю огранку – они ограничены плоскими гранями, пересекающимися под определенными, характерными для каждого типа кристаллов, углами. Монокристаллы встречаются в природе (например, монокристаллы горного хрусталя), а также выращиваются для научных или производственных целей, создав соответствующие условия роста. Так, для нужд микроэлектроники выращивают монокристаллы кремния диаметром порядка 30 см и длиной порядка 1 метра.

Однако, как правило, кристаллы существуют в виде поликристаллов. Именно в виде поликристаллов получают металлургическим путем металлы. Это конгломераты (механические смеси) множества мелких, сросшихся друг с другом монокристаллов, ориентированных случайным образом друг относительно друга. Эти кристаллы называют зернами или кристаллитами. Их размеры изменяются в широких пределах: от 1–2 мкм до нескольких мм. Поверхности раздела

называют границами зерен. Это поверхность между двумя зернами различной ориентации, примыкающими друг к другу таким образом, что отсутствует нарушение сплошности вещества. Ширина области «плохого» материала на границе между зернами не превышает одного-двух межатомных расстояний. Границы зерен не являются совершенными гранями, характерными для отдельных монокристаллов. Наглядным примером поликристалла является кусок сахара – рафинада. Вследствие беспорядочной ориентации зерен для поликристаллов характерна изотропия – свойства поликристаллов одинаковы по всем направлениям. Изотропными также являются газы и большинство жидкостей.

Свойства поликристаллов зависят от размеров зерен. Так, мелкозернистая сталь является более прочной. Однако с течением времени размеры зерен увеличиваются, а прочность уменьшается. Границы зерен не являются совершенными гранями, характерными для отдельных монокристаллов. Они оказывают существенное влияние на многие физические свойства поликристаллов. Так, из-за наличия зерен коэффициент диффузии в поликристаллах значительно больше, чем в монокристаллах

Путем направленного воздействия на поликристаллы (прокатный металл, тянутая проволока и т. п.) возникает некоторая определенная упорядоченность в расположении кристаллов – **текстура**. Чем совершеннее обработка, тем совершеннее текстура кристаллических зерен. Наличие текстуры сильно изменяет физические свойства и может приводить к анизотропии.

Полиморфизмом называется способность одного и того же вещества образовывать несколько различных кристаллических форм (решеток), отличающихся по физическим свойствам.

Полиморфизм открыт в 1822 г. немецким ученым Э. Мичерлихом. Полиморфизмом обладают некоторые простые вещества (аллотропия) и многие химические соединения. Так, кальцит $CaCO_3$ образует две кристаллические модификации: арагонит и исландский шпат (в последнем проявляется двойное лучепреломление).

Каждая кристаллическая модификация устойчива в определенном интервале давлений и температур. Однако в метастабильном состоянии некоторые кристаллические модификации могут существовать в течение длительного времени в интервале давлений и температур, в котором устойчивой является другая кристалличе-

ская модификация данного вещества. Стабильному (устойчивому) состоянию соответствует абсолютный минимум термодинамических величин. Метастабильному состоянию соответствует локальный минимум этих величин.

Так, имеются гексагональная (графит) и кубическая (алмаз) кристаллические модификации углерода. Алмаз при нормальных условиях является метастабильной фазой (стабильной фазой он является при давлениях порядка 1000 атмосфер). Однако при обычных условиях алмаз существует в течение неопределенно долгого времени. По крайней мере, за всю историю человечества не было зафиксировано перехода алмаза в графит при обычных условиях. Данный переход происходит только при нагревании алмаза до температур выше 450–500 °С (в виде микропорошка) или до 600–700 °С (в виде кристалликов размерами от 0,6 до 1 миллиметра).

Многие вещества имеют более двух кристаллических форм. Так, железо имеет четыре кристаллические модификации, плутоний (Pu) и лед – шесть. При этом только обычный лед легче воды.

Твердые тела, в которых существует лишь ближний порядок (определенная согласованность в расположении смежных атомов или молекул), называются **аморфными**. В этом они схожи с жидкостями, но в отличие от жидкостей, *подвижность* частиц в них довольно *мала*. По мере роста расстояния эта согласованность сначала уменьшается, а затем и вовсе исчезает. Для аморфных твердых тех характерна изотропия свойств.

Аморфное состояние является промежуточным между твердым и газообразным. В нем частицы расположены менее упорядоченно, чем в твердом теле, но более упорядоченно, чем в жидкостях. Невозможно получить металлы в аморфном состоянии, но в таком состоянии существуют многие сплавы.

Органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими связями, называются ***полимерами*** (например, каучук, полиэтилен, резина).

15.6. Физические типы кристаллов

В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характера сил взаимодействия между ними

кристаллы подразделяются на **четыре типа**: ионные, атомные, металлические молекулярные.

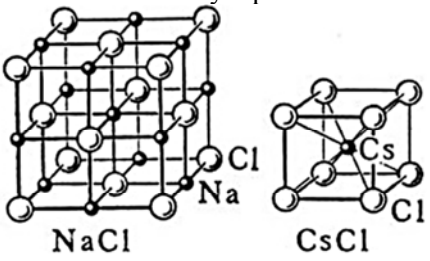


Рис. 15.8. Примеры ионных кристаллов

Ионные кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются поочередно ионы противоположного знака. На рис. 15.8 нем представлены структуры решеток двух наиболее характерных ионных кристаллов – NaCl (решетка представляет собой две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы Na^+, в узлах другой – ионы Cl^-) и CsCl (кубическая объемно-центрированная решетка – в центре каждой элементарной ячейки находится ион). Связь, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется ***ионной***.

Атомные кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживающиеся в узлах решетки ***ковалентными связями*** квантово-механического происхождения (у соседних атомов обобществляются валентные электроны, наименее связанные с атомом). Пример атомных кристаллов – алмаз (рис. 15.9, *а*) и графит (рис. 15.9, *б*).

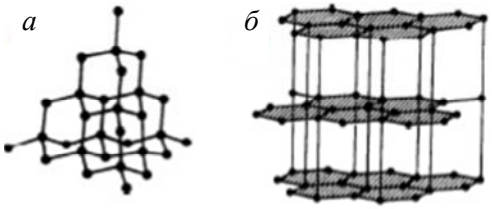


Рис. 15.9. Структура алмаза (*а*) и графита (*б*)

В алмазе каждый атом углерода связан с четырьмя такими же атомами, которые располагаются на одинаковых расстояниях от него в вершинах тетраэдра. В графите атомы углерода упакованы в плоские слои, связанные между собой слабыми ван-дер-ваальсовыми силами.

Металлические кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принад-

лежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае ковалентной связи, а всему кристаллу в целом.

Молекулярные кристаллы. В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти силы называются ***ван-дер-ваальсовыми***, тат как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности. Примеры молекулярных кристаллов – органические соединения (например, парафин), в твердом состоянии инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe), атмосферные газы (CO_2, O_2, N_2), лед, и т. д.

15.7. Тепловое расширение твердых тел

Подавляющее большинство веществ при нагревании расширяется. У твердого тела различают **линейное расширение** – изменение длины, ширины, высоты тела (его линейных размеров) и **объемное расширение** – изменение объема при нагревании.

Различные твердые вещества по-разному расширяются при нагревании: одни больше, другие меньше. Тепловое расширение характеризуется величиной, называемой **температурным коэффициентом расширения (α)**.

В области высоких температур для большинства материалов коэффициент линейного расширения практически не зависит от температуры, и тогда длина твердого тела возрастает линейно с температурой. Длина l тела при нагревании от 0 °С до температуры t °С вычисляется по формуле:

$$l = l_0(1 + \alpha t),$$

где l_0 – длина при 0 °С.

Тепловое расширение твердых тел объясняется асимметрией взаимодействия между атомами, вызванной тем, что силы отталкивания возрастают при сближении атомов значительно сильнее, чем силы притяжения при их удалении друг от друга. Поэтому кривая потенциальной энергии взаимодействия атомов отличается от пара-

болы (рис. 15.10). Левая ее ветвь поднимается значительно круче, чем правая.

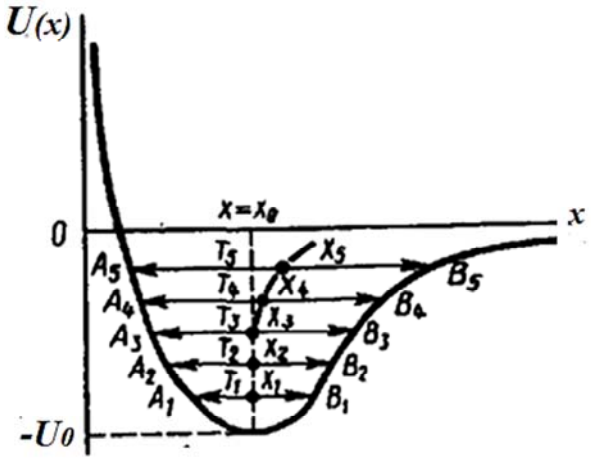


Рис. 15.10. Потенциальная энергия взаимодействия атомов

При $T = T_1$ атомы колеблются так, что межатомное расстояние изменяется от A_1 до B_1 со средним значением $\overline{x}_1$. При более высокой температуре атомы колеблются так, что межатомное расстояние изменяется от A_2 до B_2 со средним значением $\overline{x}_2 > \overline{x}_1$ и т. д. Так как $\overline{x}_3 > \overline{x}_2 > \overline{x}_1$, то с ростом T твердое тело расширяется, поскольку межатомное расстояние увеличивается из-за несимметричности кривой потенциальной энергии взаимодействия атомов.

Возьмем две пластины, изготовленные, например, из меди и железа, жестко соединим их (рис. 15.11, *а*) и будем нагревать. Медная пластина расширяется сильнее, чем железная, поэтому они прогнутся (рис. 15.11, *б*). Такие пластины называют биметаллическими. Их используют в термометрах, в регуляторах температуры. Например, в регуляторе температуры биметаллическая пластина, нагреваясь до предельно допустимой температуры, изгибается и размыкает цепь. В результате этого дальнейшее нагревание не происходит. При охлаждении пластина выпрямляется и снова замыкает цепь, происходит нагревание.

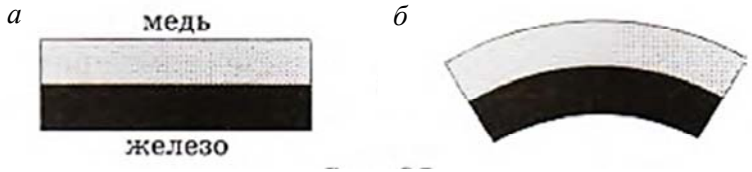


Рис. 15.11. Биметаллическая пластина до нагрева (*а*) и после (*б*)

Имеются и многие другие применения биметаллических пластин. По-видимому, биметаллические пластины были созданы в XVIII веке в Англии часовщиком Джоном Харрисоном для термокомпенсации его морского хронометра.

15.8. Теплоемкость твердых тел

Рассмотрим идеальную кристаллическую решетку, в узлах которой частицы, принимаемые за материальные точки, колеблются вблизи положений равновесия в трех взаимно перпендикулярных направлениях (классические осцилляторы с тремя колебательными степенями свободы, каждая из которых обладает энергией kT).

Внутренняя энергия моля твердого тела:

$$U_{\mu} = 3N_A kT = 3RT,$$

где N_A – число Авогадро;

R – молярная газовая постоянная.

Молярная теплоемкость твердого тела:

$$c_V = \frac{\mathrm{d}U_{\mu}}{\mathrm{d}T} = 3R = 25\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}. \qquad (15.10)$$

Это **закон Дюлонга–Пти** – ***молярная теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова*** (равна $3R$) ***и не зависит от температуры.***

Если твердое тело является химическим соединением (например NaCl), то число частиц в моле равно nN_A, где n – число атомов

в молекуле (для NaCl число частиц в моле равно $2N_A$, поскольку в одном моле NaCl содержится N_A атомов Na и N_A атомов Cl).

Молярная теплоемкость ***твердых химических соединений***:

$$c_V = 3nR = 25 \cdot n \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}},$$

т. е. равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих это соединение.

Данная зависимость теплоемкости проявляется чаще всего только при температурах выше комнатной. При снижении температуры теплоемкость падает, приближаясь к нулю при $T \to 0$ К. Качественное объяснение этому предложил Эйнштейн. Он предполагал, что твердое тело представляет собой совокупность осцилляторов, колеблющихся независимо друг от друга с одинаковой частотой ω в трех направлениях, а энергия осцилляторов квантована по Планку: $E = n\hbar\omega$, где $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ – целое число, $\hbar$ – постоянная Планка. Если число осцилляторов, энергия которых равна $n\hbar\omega$, пропорционально $\exp(-n\hbar\omega / kT)$, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, то средняя энергия осциллятора равна:

$$< E >= \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Тогда для молярной теплоемкости:

$$c_v = \frac{\partial < E >}{\partial T} = \frac{3Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)^2} e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}. \qquad (15.11)$$

При высоких температурах ($kT >> \hbar\omega$) формула (15.11) дает $c_V = 3R$, что согласуется с правилом Дюлонга–Пти. При низких

температурах ($kT << \hbar\omega$) в знаменателе (15.11) можно пренебречь единицей:

$$c_v = 3Nk\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \qquad (15.12)$$

Из (15.12) следует, что при $T \to 0$ К экспоненциальный множитель преобладает и $c_v \sim e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$. Это качественно объясняет спад c_v, однако из эксперимента следует, что в области низких температур $c_v \sim T^3$. Основной причиной убывания теплоемкости является тот факт, что при низких температурах закон о равномерном распределении энергии по степеням свободы уже не выполняется.

Дальнейшее уточнение теории было сделано Дебаем. Расхождение модели Эйнштейна с экспериментом связано с тем, что атомы твердого тела колеблются не с одинаковой частотой, а с разными частотами от нуля до некоторой максимальной. Это и учел Дебай. Он сохранил предположение о квантовании энергии осцилляторов по Планку. В теории Дебая вводится температура Дебая, определяемая из условия: $k\theta_D = \hbar\omega_D$, где ω_D – максимально возможная частота колебаний осциллятора. Обычно $\theta_D \sim 100$ К, однако имеются кристаллы с более высокими θ_D. При высоких температурах результаты Дебая согласуются с законом Дюлонга–Пти. При температурах, близких к 0 К теория Дебая дает:

$$c_v = \frac{12\tau^4 Nk}{5\theta_D} T^3.$$

Этот результат хорошо согласуется с опытом в узком интервале температур вблизи $T = 0$ К. При более высоких T, не превышающих θ_D, согласие уже не такое хорошее, что связано с упрощениями, принятыми в модели.

Вопросы к главе 15

1. В чем особенности строения жидкостей?
2. Почему возникает поверхностное натяжение?
3. Что такое коэффициент поверхностного натяжения?
4. В каких случаях имеет место смачивание или несмачивание? Что такое краевой угол?
5. Что такое капиллярные явления? Приведите объяснения этим явлениям.
6. Что такое монокристаллы? С чем связана их анизотропия?
7. Что такое поликристаллы?
8. Что такое полиморфизм?
9. Какие имеются физические типы кристаллов?
10. Что является причиной теплового расширения твердых тел?
11. Что такое биметаллическая пластина?
12. Сформулируйте закон Дюлонга–Пти.
13. Что предложили Эйнштейн и Дебай для уточнения теории теплоемкости твердых тел?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2023. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 356 с.

2. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2023. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 436 с.

3. Зисман, Г. А. Курс общей физики : в 3 т. / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – СПб. : Лань, 2023. – Т. 1: Механика. Молекулярная физика. – 340 с.

4. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Издательский центр «Академия», 2007. – 560 с.

5. Чертов, А. Г. Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Издательство физико-математической литературы, 2007. – 640 с.

6. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М. : Высшая школа, 2004. – 591 с.

7. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2023. – 292 с.

8. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 т. / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2022. – Т. 1: Механика. – 340 с.

9. Савельев, И. В. Курс общей физики : в 5 т. / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2022. – Т. 3: Молекулярная физика и термодинамика. – 224 с.

10. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – СПб. : Лань, 2022. – 420 с.

11. Ельяшевич, М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия / М. А. Ельяшевич. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – С. 576.

12. Герцберг, Г. Спектры и строение двухатомных молекул / Г. Герцберг. – М. : Издательство иностранной литературы, 1949. – С. 58.

13. Спроул, Р. Современная физика / Р. Спроул. – М. : Наука, 1974. – С. 239.

Учебное издание

МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Пособие
для студентов специальностей
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»,
6-05-0716-03 «Информационно-измерительные приборы и системы»,
6-05-0716-04 «Оптико-электронная и лазерная техника»,
6-05-0716-05 «Технические системы обеспечения безопасности»,
6-05-0716-06 «Биомедицинская инженерия»,
6-05-0716-08 «Микро- и наносистемная техника»

С о с т а в и т е л и:
ЧЁРНЫЙ Владимир Владимирович
БУМАЙ Юрий Александрович
КРАСОВСКИЙ Василий Васильевич и др.

Редактор *Р. А. Ягелло*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 21.04.2025. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 14.06. Уч.-изд. л. 8,45. Тираж 100. Заказ 453.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.