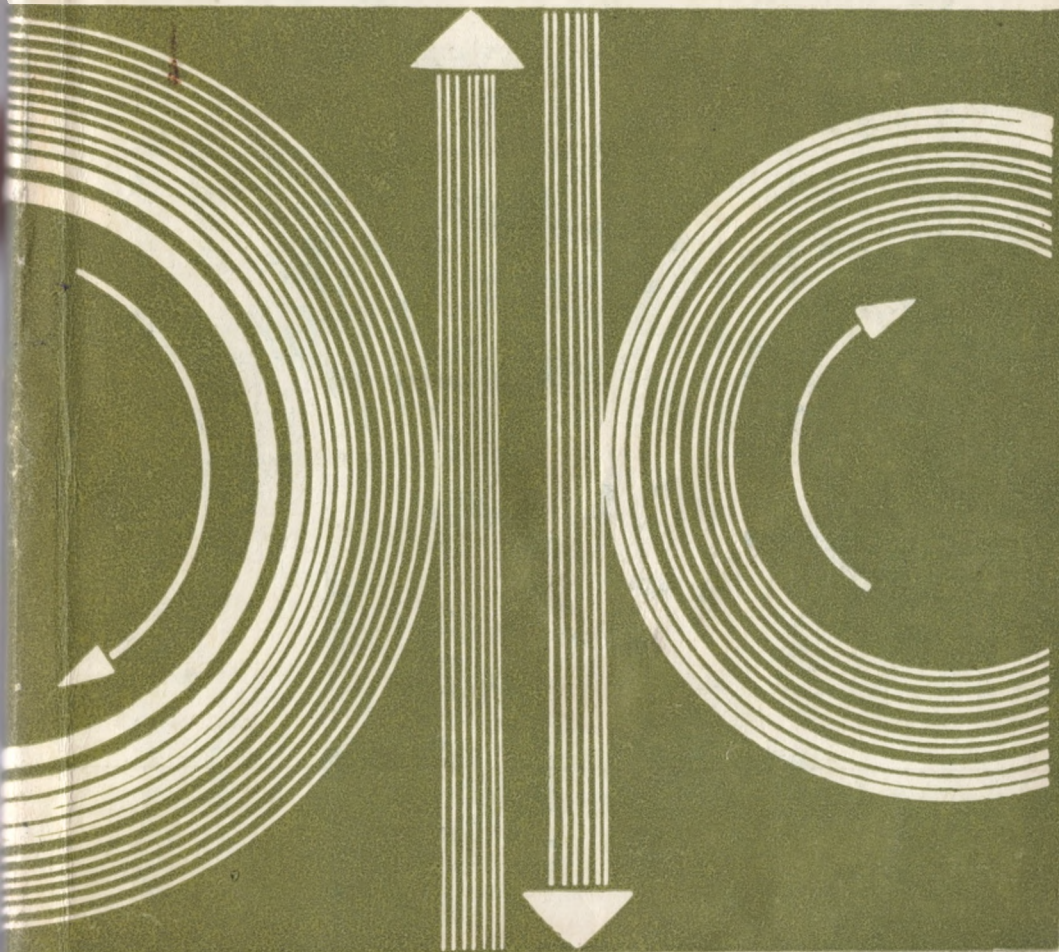


531
Т 33

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

2



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»

Министерство высшего и среднего специального образования БССР
Белорусский ордена Трудового Красного Знамени
политехнический институт
РЕСПУБЛИКАНСКИЕ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЕ СБОРНИКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ВЫПУСК 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1975

53i
ТЗЗ

Главный редактор
доктор технических наук, профессор А.Х.Ким

Редакционный совет:

В.А.Балакин, А.Е.Крушевский, Е.Н.Ламбина, А.Е.Левашев,
М.А.Левин, С.А.Пахуто, Л.А.Ротт, Г.К.Татур

Т $\frac{0024 - 092}{М304(05) - 74}$ 74 - 75

© Издательство "Вышэйшая школа", 1975 г.

З.П. Шульман, Э.А. Зальцгендлер, В.И. Байков

СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ НЕЛИНЕЙНОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА

Многие текучие среды в диапазоне скоростей сдвига, реализуемых в условиях свободной конвекции, проявляют аномалию вязкости [1, 2]. Поэтому задачи свободной конвекции в неньютоновских, в частности нелинейновязких жидкостях, представляют значительный интерес. Плоские задачи свободной конвекции нелинейновязких жидкостей при граничных условиях I рода (главным образом для изотермической стенки) рассмотрены в целом ряде работ, из которых можно отметить [3, 4]. Однако в приложениях гораздо чаще встречаются физические ситуации, когда известна либо задана не температура, а тепловой поток на стенке, т.е. реализуются граничные условия II рода, в частности при электрообогреве поверхностей. Кроме того, перепады температур, характерные для условий свободной конвекции, могут быть весьма значительными, что вызывает необходимость учета теплозависимости реологических характеристик; в первую очередь, коэффициента консистенции.

В теоретических исследованиях граничные условия I рода использовались именно потому, что они позволяли свести задачу к автомодельному виду [3, 4]. Анализ возможности получения автомодельных решений для граничных условий II рода в литературе отсутствует. В настоящей работе проведено это исследование.

Вертикальная пластина. Безразмерные уравнения стационарного пограничного слоя для задачи термической свободной конвекции нелинейновязкой жидкости имеют вид

$$\rho \frac{2(n+1)}{3n+1} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\omega_1(\theta) \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \theta; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u = v = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\omega_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0; \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

где

$$x = \frac{x'}{L}; \quad y = \frac{y'}{L} Gr^{\frac{1}{2(n+1)}} Pr^{\frac{n}{3n+1}}; \quad (5)$$

$$u = u' Pr^{\frac{n+1}{3n+1}} \left[\frac{g\beta L^2 q_w}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \theta = \frac{\lambda(T - T_\infty)}{q_w L};$$

$$v = v' Pr^{\frac{2n+1}{3n+1}} Gr^{\frac{1}{2(n+1)}} \left[\frac{g\beta L^2 q_w}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Решение полной задачи (1) - (4) представляет значительные математические трудности. Учитывая, что обобщенное число Pr для каплевых высоковязких жидкостей, как правило, весьма велико, можно пренебречь вкладом инерционных членов внутри теплового пограничного слоя. Это допущение хорошо оправдывало себя при решении задач свободной конвекции для граничных условий I рода [3]. Учет этого допущения и введение функций тока дает:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\omega_1(\theta) \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \theta = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (7)$$

При этом граничные условия модифицируются к виду [3]

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\omega_2(x) \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \rightarrow 0 ; \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty .$$

Для дальнейшего анализа конкретизируем вид функций $\omega_1(\theta)$ и $\omega_2(x)$ (общий случай рассматривается ниже). Зависимость коэффициента консистенции от температуры $[\omega_1(\theta)]$ для многих реальных сред может быть представлена [5]: 1) $\omega_1(\theta) = \theta^\gamma$; 2) $\omega_1(\theta) = \exp(\gamma\theta)$. Тепловой поток на стенке выбирается в виде: 1) $\omega_2(x) = x^\beta$; 2) $\omega_2(x) = \exp(-\beta x)$, как наиболее часто встречающиеся на практике ($q = \text{const}$ является частным случаем при $\beta = 0$).

Рассмотрим последовательно все случаи:

$$I. \quad \omega_1(\theta) = \theta^\gamma ; \quad (9)$$

$$\omega_2(x) = x^\beta . \quad (10)$$

Для анализа задачи (6) - (7) используется групповой метод Амеса [6]. Применение линейной однопараметрической группы

$$G_1 \left\{ \begin{array}{ll} \bar{x} = a^{\lambda_1} x ; & \bar{\psi} = a^{\lambda_1} \psi ; \\ \bar{y} = a^{\lambda_2} y ; & \bar{\theta} = a^{\lambda_2} \theta \end{array} \right. \quad (11)$$

к системе (6) - (7) с учетом соотношений (9) и условие постоянной конформной инвариантности системы (6)-(7) (относительно группы $\{G_1\}$) дает следующую систему алгебраических уравнений:

$$n\lambda_1 - (2n+1)\alpha_2 + \gamma\lambda_2 = \lambda_2 ; \quad (12)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = \lambda_2 - 2\lambda_2 , \quad (13)$$

откуда находим:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n - (3n+1)\alpha}{1-\gamma} ; \quad \frac{\lambda_1}{\alpha_1} = 1-\alpha ; \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \alpha . \quad (14)$$

Тогда инвариантами группы $\{G_1\}$ будут

$$g(\eta) = \frac{\theta}{\frac{n-(3n+1)\alpha}{1-\gamma}} ; \quad f(\eta) = \frac{\psi}{x^{1-\alpha}} ; \quad \eta = \frac{y}{x^\alpha} . \quad (15)$$

Подстановка соотношений (15) в граничное условие (10) дает

$$\alpha = \frac{n - \beta(1 - \gamma)}{3n + 2 + \gamma} . \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) находим автомодельные решения

$$g(\eta) = \frac{\theta}{x \frac{n(1+\gamma) + \beta(3n+1)(1-\gamma)}{(3n+2+\gamma)(1-\gamma)}} ; \quad (17)$$

$$f(\eta) = \frac{\psi}{x \frac{2(n+1) + \gamma + \beta(1-\gamma)}{3n+2+\gamma}} ; \quad \eta = \frac{y}{x \frac{n - \beta(1-\gamma)}{3n+2+\gamma}} .$$

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая (6), (7) и (9):

$$\left. \begin{aligned} g^{\gamma-1} f'' n^{-1} (ngf''' + \gamma g'f'') + g &= 0 ; \\ g'' + \frac{2(n+1) + \gamma + \beta(1-\gamma)}{3n+2+\gamma} f g' - \frac{n(\gamma+1) + \beta(3n+1)(1-\gamma)}{(3n+2+\gamma)(1-\gamma)} g f' &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

с граничными условиями

$$f' = f = 0 ; \quad g' = -1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 ; \quad (19)$$

$$f'' \rightarrow 0 ; \quad g \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty .$$

$$\text{П.} \quad \omega_1(\theta) = \theta^\gamma ; \quad (20)$$

$$\omega_2(x) = \exp(-\beta x) . \quad (21)$$

В этом случае применяется спиральная однопараметрическая группа

$$G_2 \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= x + \ln a ; & \bar{\psi} &= a^{\lambda_1} \psi ; \\ \bar{y} &= a^{\lambda_2} y ; & \bar{\theta} &= a^{\lambda_2} \theta . \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Требование постоянной конформной инвариантности системы (6), (7) с учетом (20) относительно группы преобразований $\{G_2\}$ приводит к следующим алгебраическим соотношениям:

$$n\lambda_1 - (2n+1)\alpha_2 + \gamma\lambda_2 = \lambda_2 ; \quad (23)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2 = \lambda_2 - 2\alpha_2 . \quad (24)$$

Третье соотношение получено из (21)

$$\alpha_2 - \lambda_2 = \beta . \quad (25)$$

Из решения системы алгебраических уравнений (23) - (25) определяются отношения $\frac{\lambda_1}{\alpha_2}$; $\frac{\lambda_2}{\alpha_2}$ и с учетом (22) окончательно следует:

$$g(\eta) = \theta \exp \left[\frac{\beta(3n+1)}{3n+2+\gamma} x \right] ; \quad (26)$$

$$f(\eta) = \Psi \exp \left[\frac{\beta(1-\gamma)}{3n+2+\gamma} x \right] ; \quad (26, a)$$

$$\eta = y \exp \left[\frac{\beta(\gamma-1)}{3n+2+\gamma} x \right] . \quad (27)$$

Ш. $\omega_1(\theta) = \exp(-\gamma\theta) ; \quad (28)$

$$\omega_2(x) = x^\beta . \quad (29)$$

В данном варианте применяется линейная однопараметрическая группа преобразований $\{G_1\}$, определяемая соотношениями (11). При этом из (28) вытекает, что $\lambda_2 = 0$. С учетом этого получают алгебраические соотношения:

$$n\lambda_1 - (2n+1)\alpha_2 = 0 ; \quad (30)$$

$$\lambda_1 - \alpha_1 - \alpha_2 = -2\alpha_2 , \quad (31)$$

которые полностью определяют автомодельные решения

$$g(\eta) = \theta; \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\frac{2n+1}{3n+1}}; \quad \eta = \frac{y}{\frac{n}{3n+1}}. \quad (32)$$

Из (29) и (32) следует, что задача допускает автомоделизацию только в случае

$$\beta = -\frac{n}{3n+1}. \quad (33)$$

IV. $\omega_1(\theta) = \exp(-\gamma\theta); \quad (34)$

$$\omega_2(x) = \exp(-\beta x). \quad (35)$$

В этом случае применение спиральной однопараметрической группы $\{G_2\}$ приводит к

$$n\lambda_1 - (2n+1)\alpha_2 = 0; \quad (36)$$

$$\lambda_1 - \alpha_2 = -2\alpha_2. \quad (37)$$

Решение системы (36) и (37) дает $\eta = -1/3$, что не имеет физического смысла, т.е. автомодельные решения отсутствуют.

Для произвольной функции $\omega_1(\theta)$ задача допускает автомодельное решение лишь в случае степенной зависимости $\omega_2(x)$ вида $\omega_2(x) = x^{-\frac{n}{3n+1}}$, при этом автомодельные решения имеют вид (32).

Осесимметричные тела вращения. Безразмерные уравнения асимптотического пограничного слоя для задачи свободной конвекции нелинейновязкой жидкости пренебрежении зависимостью коэффициента консистенции от температуры (учет этого фактора может быть проведен аналогично вышеизложенному) имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \theta \cos \alpha = 0; \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0; \quad (39)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (40)$$

с граничными условиями

$$u = v = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = -1 \quad \text{при} \quad y = 0; \quad (41)$$

$$u \rightarrow 0; \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty.$$

Преобразование Степанова — Манглера

$$\eta_1 = \frac{r}{L}; \quad u_1 = \frac{u}{r_1}; \quad \chi = \int_0^x \eta_1(\chi) d\chi \quad (42)$$

сводит систему (38) - (40) к

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] + \theta r_1^n \cos \alpha = 0; \quad (43)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \chi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (44)$$

$$u_1 \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \quad (45)$$

В случае самой общей зависимости $r_1 = f_1(\chi)$ и $\cos \alpha = f_2(\chi)$ методом инспекционного анализа получить автомодельные решения нельзя. Однако в случае степенной зависимости радиуса тела вращения и $\cos \alpha$ от χ , которые охватывают практически весьма важные случаи (в частности, конуса, вертикального цилиндра и пространственной критической точки) автомодельные решения могут быть найдены.

Обозначим

$$[r_1(\chi)]^n \cos \alpha = c \chi^\nu. \quad (46)$$

Применение линейной однопараметрической группы преобразования (11) к системе уравнений (43) - (45) дает с учетом

(46) и требования постоянной конформной инвариантности системы (43) - (45) относительно группы преобразования $\{G_1\}$ - цепочку алгебраических соотношений

$$n\lambda_1 - (2n+1)\alpha_2 = \lambda_2 + \nu\alpha_1; \quad (47)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2 = \lambda_2 - 2\alpha_2. \quad (48)$$

Решение системы (47) - (48) позволяет найти инварианты системы (43) - (45) относительно группы $\{G_1\}$:

$$g(\eta) = \frac{\theta}{\chi^{n-(3n+1)-\nu}}; \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\chi^{1-\alpha}}; \quad \eta = \frac{y}{\chi^\alpha}. \quad (49)$$

Требование постоянства теплового потока на стенке приводит (45) к

$$\begin{aligned} \psi = f(\eta)\chi & \frac{2(n+1)+\nu}{3n+2} \left[\frac{3n+2}{2(n+1)+\nu} \right] \frac{2(n+1)}{3n+2} \frac{1}{3n+2} \quad c; \\ \theta = g(\eta)\chi & \frac{n-\nu}{3n+2} \left[\frac{3n+2}{2(n+1)+\nu} \right] \frac{n}{3n+2} - \frac{1}{3n+2} \quad c; \\ \eta = & \frac{y}{\chi} \frac{n-\nu}{3n+2} \left[\frac{3n+2}{2(n+1)+\nu} \right] \frac{n}{3n+2} \frac{1}{3n+2} \quad c. \end{aligned} \quad (50)$$

В автомодельные решения (50) включены постоянные величины с целью исключения постоянной c и уменьшения числа коэффициентов в окончательной системе нелинейных дифференциальных уравнений, которая имеет вид

$$\left. \begin{aligned} n|f''|^{n-1} f''' + g &= 0; \\ g'' + fg' - \frac{n-\nu}{2(n+1)-\nu} f'g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

с граничными условиями

$$f' = f = 0 ; g' = -1 \quad \text{при} \quad \eta = 0 ; \quad (52)$$

$$f'' \rightarrow 0 ; g \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty .$$

В частных случаях постоянные c и ν в соотношении (46) равны:

$$c = 1 ; \nu = 0 \quad (53)$$

(вертикальный цилиндр постоянного радиуса, где в качестве характерного размера выбирается радиус цилиндра)

$$c = \left[2 \sin \varphi \right]^{\frac{n}{2}} \cos \varphi ; \nu = \frac{n}{2} \quad (54)$$

(конус);

$$c = 2^{\frac{n+1}{2}} ; \nu = \frac{n+1}{2} \quad (55)$$

(пространственная критическая точка).

Плоские тела. К системе уравнений, которая получается из (43) - (45) после подстановки соотношения (46) и, следовательно, к уравнениям (51) с граничными условиями (52) сводятся задачи свободной конвекции около:

$$1. \text{ Пластины} - c = 1; \nu = 0. \quad (56)$$

$$2. \text{ Клина} - c = \cos \omega ; \nu = 0. \quad (56, a)$$

$$3. \text{ Плоской критической точки} - c = 1; \nu = 1. \quad (57)$$

Таким образом, система (51) охватывает, в зависимости от значения параметра ν , целый класс задач; причем ν для псевдопластичных жидкостей изменяется в диапазоне $0 \leq \nu \leq 1$.

Результаты второго и третьего разделов могут быть легко расширены на случай теплозависимости коэффициента консистенции от температуры и переменного теплового потока на стенке методом группового анализа Амеца.

Обозначения

- x', y' - размерные координаты;
 u', v' - размерные продольная и поперечная скорости;
 T - абсолютная температура;
 T_{∞} - абсолютная температура при $y \rightarrow \infty$;

- q_w - характерный тепловой поток;
 T_0 - температура стенки;
 λ - теплопроводность;
 β - коэффициент термического объемного расширения;
 L - характерная длина;
 g - ускорение свободного падения;
 k - коэффициент консистенции;

$$Pr = \frac{\rho^2 L^{n+2} [\beta g q_w L / \lambda]^{2-n}}{k^2} \text{ - модифицированное число Прандтля;}$$

$$Gr = \frac{\rho_{cp}}{\lambda} \left(\frac{k}{\rho} \right)^{\frac{2}{1+n}} L^{\frac{1+n}{1+n}} \left[\frac{L \beta g q_w}{\lambda} \right]^{\frac{3(n-1)}{2(n+1)}} \text{ - модифицированное число Грасгофа;}$$

- $\omega_1(\theta)$ - функция тепловозависимости коэффициента консистенции;
 $\omega_2(x)$ - зависимость теплового потока на стенке от продольной координаты
 Ψ - функция тока;
 n - параметр неньютоновского поведения;
 η - автомодельная переменная;
 $f(\eta)$ - автомодельная функция тока;
 $g(\eta)$ - автомодельная функция температуры;
 r - радиальная координата;
 α - угол между касательной к контуру тела и направлением силы тяжести;
 φ - полуугол раскрытия конуса;
 ω - полуугол раскрытия клина.

Л и т е р а т у р а

1. Reilly I., Tien C., Adelman M. Experimental Study of Natural Convective Heat Transfer from a Vertical Plate in a Non-Newtonian Fluid. - "Can J. Chem Eng", 1965, N4.
2. Дэйл И., Эмери А. Теплопередача от вертикальной пластины при свободной конвекции неньютоновских "псевдопластичных" жидкостей. - "Теплопередача", 1972, №1.
3. Acrivos A. A Theoretical Analysis of Laminar Natural Convection Heat. Transfer to Non-

Newtonian Fluid, - "AIChE Journal", 1960, N4.
 4. Tien C. Laminar Natural Convection Heat Transfer from Vertical Plate to Power - Law Fluid, - "Appl. Sci. Res", 1967, N17. 5. Мак - Келви Д. Переработка пластмасс. М., 1964. 6. Lee S., Ames W. Similarity Solution for Non-Newtonian Fluids. - "AIChE Journal", 1966, N4.

З.П. Шульман, В.И. Байков, Э.А. Зальцгендлер

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ
 НЕЛИНЕЙНОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ ОКОЛО ТОНКИХ ТЕЛ
 ВРАЩЕНИЯ

Свободная конвекция в реологически сложных средах в последние годы привлекает значительное внимание [1, 2]. В ряде экспериментальных работ [3, 4] показано, что для диапазона скоростей сдвига, реализуемых в условиях свободной конвекции, многие текучие среды проявляют нелинейновязкие свойства и могут быть описаны "степенным" реологическим уравнением состояния. Плоские задачи свободной конвекции неньютоновской жидкости рассмотрены в работах [1 - 4]; из пространственных задач следует отметить работу Стюарта [5]. Однако пространственные задачи свободной конвекции неньютоновских жидкостей около тонких тел вращения (толщина пограничного слоя соизмерима с радиусом тела вращения) до сих пор вообще не рассмотрены. В приложениях, особенно в технике зондовых измерений, в датчиках автоматического регулирования и дистанционного управления технологическими процессами, подобные задачи часто встречаются. Для условий вынужденной конвекции аналогичные задачи динамики и теплообмена рассмотрены в ряде работ, из которых можно отметить [6 - 8].

Безразмерные уравнения пространственного, стационарного пограничного слоя для задачи термической свободной конвекции нелинейновязкой жидкости около вертикального тонкого тела вращения имеют вид

$$\frac{2(n+1)}{3n+1} Pr \left(ru \frac{\partial u}{\partial x} + rv \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[r \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + r v \cos \alpha; (1)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 ; \quad (2)$$

$$ru \frac{\partial \theta}{\partial x} + rv \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$u = v = 0 ; \quad \theta = 1 \quad \text{при } y = 0 ; \quad (4)$$

$$u \rightarrow 0 ; \quad \theta \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty ,$$

где

$$x = \frac{x'}{L} ; \quad y = \frac{y'}{L} \quad Gr^{\frac{1}{2(n+1)}} \quad Pr^{\frac{n}{3n+1}} ;$$

$$u = u' Pr^{\frac{n+1}{3n+1}} \left[\text{Lg} \beta (T_0 - T_\infty) \right]^{\frac{1}{2}} ; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} ; \quad (5)$$

$$v = v' Pr^{\frac{2n+1}{3n+1}} \quad Gr^{\frac{1}{2(n+1)}} \left[\text{Lg} \beta (T_0 - T_\infty) \right]^{-\frac{1}{2}} .$$

Обобщенное число Pr для капельных высоковязких жидкостей, как правило, весьма велико. Поэтому толщина теплового пограничного слоя намного меньше толщины динамического пограничного слоя. В результате вклад инерционных членов внутри теплового пограничного слоя весьма мал [1, 5]. Кроме того, для тонких тел вращения $\alpha \approx 0$, следовательно, в уравнении движения (1) можно положить $\cos \alpha_1 \approx 1$.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[r \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + r\theta = 0 ; \quad (6)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 ; \quad (7)$$

$$ru \frac{\partial \theta}{\partial x} + rv \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial y} \right). \quad (8)$$

При этом граничные условия (4) модифицируются к виду [1, 5]:

$$\begin{aligned} u = v = 0 ; \quad \theta = 1 & \quad \text{при } y = 0 ; \\ \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 ; \quad \theta \rightarrow 0 & \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

После введения новых зависимых и независимых переменных и параметров

$$\xi = \int_0^x U^\alpha(x) r_0^\beta(x) dx ; \quad (10)$$

$$\eta = a \xi^{-\gamma} U(x) \int_0^y r dy ; \quad (11)$$

$$\psi = b \xi^\gamma f(\eta) ; \quad (12)$$

$$A = \frac{2 \xi^\gamma}{a U(x) r_0^2(x)} , \quad (13)$$

где ψ определяется из уравнения неразрывности

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \quad rv = - \frac{\partial \psi}{\partial x} ,$$

система (6) - (8) преобразуется к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} n f''' |f''|^{n-1} (1+A\eta)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n+1}{2} f'' |f''|^{n-1} A (1+A\eta)^{\frac{n-1}{2}} + \\ + \theta \eta^\gamma r_0^{-(n+1)} a^{-(2n+1)} b^{-n} U^{-(2n+1)} = 0 ; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\theta'' (1+A\eta) + \theta' A + \frac{b}{a} \theta' f U^{\alpha-1} \xi^{2\gamma-1} r_0^{\beta-2} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f' = f = 0 ; \quad \theta = 1 & \quad \text{при} \quad \eta = 0; \\ f'' \rightarrow 0 ; \quad \theta \rightarrow 0 & \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Из требования автомодельности задачи вытекают следующие функциональные связи:

$$\xi \sim U r_0^2 ; \quad \xi^{(n+1)} \sim U^{2n+1} r_0^{n+1} ; \quad \xi \sim r_0^{1-2\gamma} U^{\beta-2} U^{\alpha-1}. \quad (17)$$

Из двух первых соотношений системы (17) вытекает:

$$\begin{aligned} \xi & \sim U^{\frac{3n+1}{(n+1)\gamma}} ; \\ r_0 & \sim U^{\frac{n}{n+1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка соотношений (18) в последнее выражение системы (17) дает

$$U n \beta \gamma - 3n - 1 + 3n\gamma + \gamma + \alpha \gamma n + \alpha \gamma \sim \text{const},$$

откуда следует

$$n \beta \gamma - 3n - 1 + 3n\gamma + \gamma + \alpha \gamma n + \alpha \gamma = 0. \quad (19)$$

Соотношение (19) является единственной связью между неизвестными α , β , γ , которая может быть определена из системы (17).

Переход к физическим переменным, который осуществляется с помощью формул (10) и (17), дает второе уравнение

$$\begin{aligned} 4n\gamma + 5\alpha n\gamma - 3\alpha n\gamma^2 - 3n - 1 + n\beta\gamma + 2\alpha\gamma + \gamma - \\ - 2\beta n\gamma^2 - \gamma^2 \alpha^2 n - \alpha^2 \gamma^2 - \alpha \gamma^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, получается функциональная связь

$$r_0 \sim x^{\frac{n\gamma}{3n+1-\gamma\beta n-\gamma\alpha n-\alpha\gamma}} \quad (21)$$

Система двух нелинейных алгебраических уравнений (19) , (20) относительно трех неизвестных величин α , β , γ допускает единственное решение для α

$$\alpha = -1 \quad (22)$$

и множество решений для β и γ . Однако между β и γ необходимо существует связь

$$\frac{1}{\gamma(\beta+2)} = \frac{n}{3n+1} \quad (23)$$

Уравнений (21) - (23) оказывается достаточно для определения условий автомодельности

$$U = x^{\frac{n+1}{3n+1}} ; \quad r_0 = cx^{\frac{n}{3n+1}} \quad (24)$$

С целью исключения из системы (14) - (15) постоянных величин необходимо потребовать

$$\begin{aligned} a &= c \beta \gamma^{-1} \gamma^{\gamma} ; \\ b &= c^{1-\beta} \gamma^{-\gamma} \end{aligned} \quad (25)$$

Следует отметить, что в зависимости от выбора конкретных значений β и γ , удовлетворяющих уравнению (23), параметры a и b принимают, согласно (25), различные значения.

Таким образом, задача сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$n f''' |f''|^{n-1} (1+A\eta)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n+1}{2} f'' |f''|^{n-1} A(1+A\eta)^{\frac{n-1}{2}} + \theta = 0; \quad (26)$$

$$\theta''(1+A\eta) + A\theta' + f\theta' = 0 \quad (27)$$

с граничными условиями (16), где содержится, кроме реологического параметра n , дополнительный параметр A , отражающий влияние поперечной кривизны. Локальные коэффициенты теплообмена и трения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} Nu &= -\theta'(0)Gr \frac{1}{2(n+1)} \frac{n}{3n+1} \frac{2n+1}{3n+1} \Pr \times ; \\ c_f &= 2f''(0)Gr \frac{1}{2(n+1)} \frac{n+2}{3n+1} \frac{1}{3n+1} \Pr \times \end{aligned} \right\} (28)$$

Осредненные коэффициенты соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \overline{Nu} &= -\frac{3n+1}{5n+2} \theta'(0)Gr \frac{1}{2(n+1)} \frac{n}{3n+1} \Pr ; \\ \overline{c_f} &= \frac{2(3n+1)}{3n+2} f''(0)Gr \frac{1}{2(n+1)} \frac{n+2}{3n+1} \Pr . \end{aligned} \right\} (29)$$

Решение данной задачи получено на ЭВМ "Минск-22" модифицированным методом Ньютона. Некоторые результаты расчета представлены на рис. 1, 2. Параметр поперечной кривизны весьма сильно влияет на $\theta'(0)$ и $f''(0)$, а следовательно, и на коэффициенты теплообмена и трения тонких тел вращения. Следует отметить слабую зависимость $\theta'(0)$ от параметра

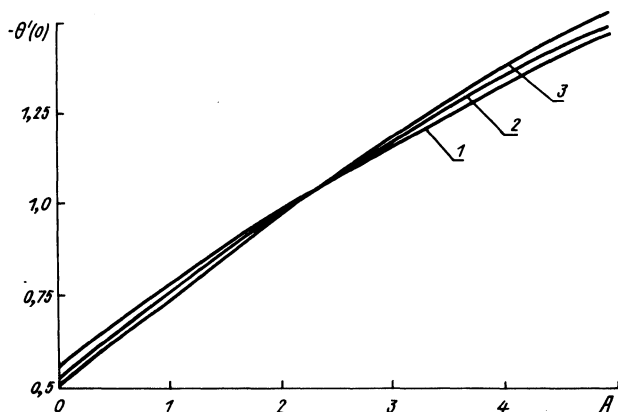


Рис. 1. Зависимость характеристики теплообмена от параметров кривизны и неньютоновского поведения:
1-- $n = 1$; 2-- $n = 0,75$; 3-- $n = 0,5$.

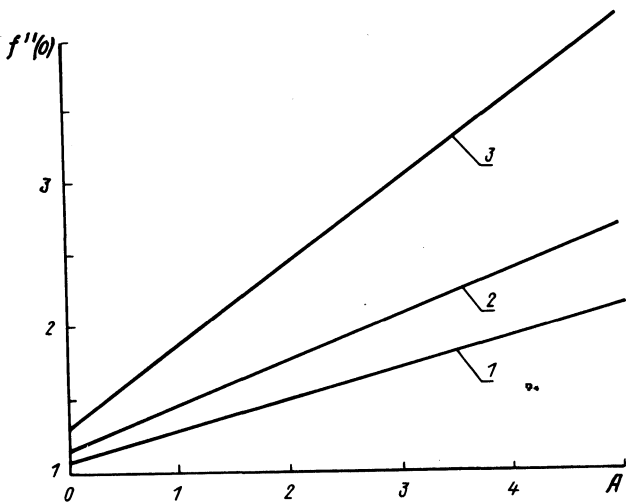


Рис. 2. Зависимость характеристики трения от параметров кривизны и не-
ньютоновского поведения:
1-- $n = 1$; 2-- $n = 0,75$; 3-- $n = 0,5$.

неньютоновского поведения. Кроме того, если для малых значений параметра кривизны усиление неньютоновских свойств приводит к уменьшению величины $-\theta'(0)$, то для больших величин A наблюдается противоположная тенденция (рис.1). Уменьшение параметра n приводит к более резкой зависимости $f''(0)$ от значений величины A . Сама величина $f''(0)$ существенно зависит от показателя неньютоновского поведения n тем сильнее, чем больше параметр A (рис.2).

Итак, в тех случаях, когда толщина пограничного слоя сопоставима с радиусом тела вращения, влияние поперечной кривизны на процессы теплообмена и течения весьма значительно.

Л и т е р а т у р а

1. Acrivos A. A Theoretical Analysis of Laminar Natural Convection Heat Transfer to Non-Newtonian Fluid. - "AIChE Journal", 1960, N4.
2. Tien C. Laminar Natural Convection Heat Transfer from Vertical Plate to Power-Law Fluid. "Appl. Sci Res", 1967, N17.
3. Reilly I. Tien C., Adel-

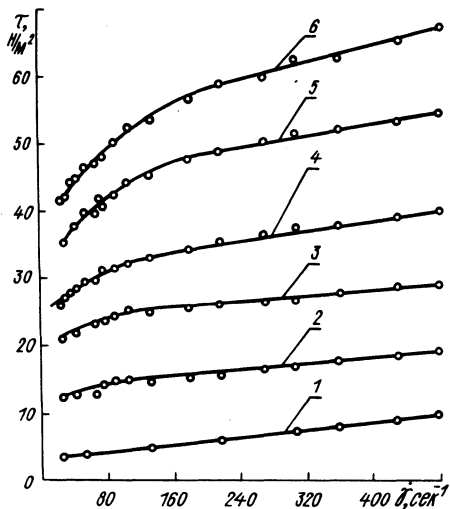
man M. Experimental Study of Natural Convective Heat Transfer from a Vertical Plate in a Non-Newtonian Fluid. - "Can. J. Chem Eng", 1965, N4. 4. Дэ йл И., Эмери А. Теплопередача от вертикальной пластины при свободной конвекции неньютоновских "псевдопластичных" жидкостей. - "Теплопередача", 1972, № 1. 5. Stewart W. Asymptotic Calculation on Free Convection in Laminar Three-dimensional systems. - "Int. J. Heat Mass Transfer", 1971, N8. 6. Байков В.И., Шульман З.П. Реодинамика и конвективный теплообмен тонкого тела вращения, продольно обтекаемого неньютоновской жидкостью. - Изв. ВУЗов СССР. Энергетика, 1972, № 3. 7. Байков В.И., Шульман З.П. Реодинамика и конвективный теплообмен тонкого тела вращения продольно обтекаемого нелинейновязкой средой при вдуве-отсосе той же среды через пористую стенку. - "Изв. ВУЗов СССР. Энергетика", 1972, № 12. 8. Себеси Т., На Т. Характеристики поверхностного трения при ламинарном обтекании тонкого цилиндра жидкостью со степенным знаком изменения напряжения. - "Прикладная механика" (Frans ASME), 1970, № 1.

В.М. Носов

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ДИЭЛЕКТРИКА НА СКОРОСТЬ ЕГО ВРАЩЕНИЯ В ЭЛЕКТРОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В данной работе исследуется влияние напряженности электрического поля E на реологическую зависимость напряжения сдвига τ от градиента скорости сдвига $\dot{\gamma}$ электрореологических суспензий, а также влияние материала диэлектрика на эффект спонтанного вращения в этих условиях. Эффект вращения диэлектрических тел в слабоэлектропроводных гомогенных средах при наложении постоянного электрического поля [1 - 3] привлекает к себе все большее внимание после того, как было доказана возможность его резкой интенсификации путем применения в качестве рабочих сред новых диэлектрических дисперсных композиций - электрореологических суспензий [4, 5]. Это объясняется тем, что хотя исследования явления вращения диэлектрика в электрореологических средах проводятся срав-

Рис. 1. Кривые течения суспензии диатомита (5% вес.) в трансформаторном масле (95 % вес.) при напряженностях электрического поля E : 1—0; 2—1,0; 3—1,5; 4—2,0; 5—2,5; 6— $3,0 \cdot 10^6$ в/м.



нительно недавно, уже сейчас имеется достаточно практических приложений (микродвигатели, различные измерительные устройства для определения напряженности электрического поля, концентрации дисперсной фазы и т.д.). Так как эти параметры определяющим образом влияют на сам электрореологический эффект — обратимое изменение вязкости суспензий в электрическом поле (рис. 1) — возможен комплексный подход к проблеме: изучение изменения реологических характеристик суспензий и параметров спонтанного вращения диэлектрика в электрическом поле.

Данная работа служит дальнейшим развитием этих исследований и преследует цель установить из опытов взаимосвязь между характеристиками процесса вращения, в частности выяснить влияние свойств материала диэлектрического образца на скорость его вращения в электрореологической суспензии в электрическом поле.

Попытки выяснить влияние материала диэлектрика на эффект вращения в слабоэлектропроводной гомогенной жидкости предпринимались еще Сумото [6]. Но отсутствие количественных характеристик процесса вращения, которые он не мог получить из-за недостатка оборудования, а также допущенная неточность в работе (телом вращения служила тонкостенная стеклянная трубка, заполнявшаяся различными веществами, а нам важны, главным образом, свойства материала на поверхности тела вращения, которые при такой постановке эксперимента были оди-

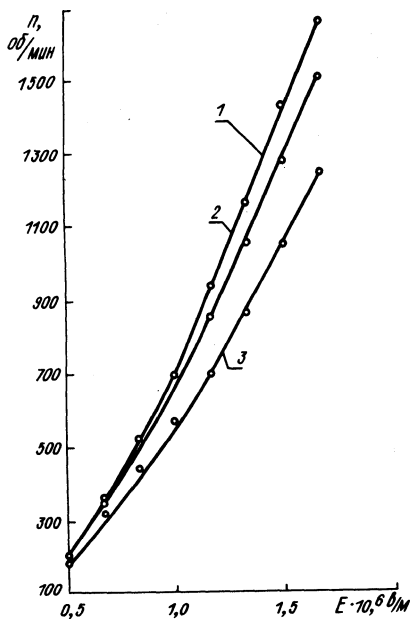


Рис. 2. Зависимость скорости вращения диэлектрического ротора n (об/мин) от напряженности электрического поля E (в/м) для материалов :
 1—эбонит; 2—винипласт; 3—орг-стекло,

наковыми) привели к тому, что ничего определенного выяснить не удалось.

Опыты проводились на установке, описанной в работе [4], которая была усовершенствована для целей эксперимента. Вместо консольного крепления тела вращения в подшипниковой головке была выбрана схема крепления с опорой на острие. Данная конструкция позволила уменьшить и стабилизировать момент сопротивления. Тело вращения представляло собой металлический стержень ϕ 2 мм, покрытый втулками из различных диэлектриков ϕ 4 и длиной 40 мм. Он оканчивался закаленной металлической иглой, опиравшейся на рубиновый подпятник. В качестве верхней опоры служил подшипник качения. Такая конструкция ротора позволяла изменять свойства материала тела вращения на его поверхности.

Варьировались пять видов материала диэлектрика. Результаты опытов представлены на рис. 2 и в табл. 1. Рабочей средой служила суспензия диатомита в трансформаторном масле концентрацией 2,5% (весовых).

Из рис. 2 видно, что материал тела вращения не изменяет характера зависимости скорости вращения ротора n от напряженности электрического поля E , которая представляет со-

Таблица 1. Влияние материала диэлектрического ротора на скорость его вращения в электрическом поле

Материал ротора	n об/мин при напряженностях электрического поля $E \cdot 10^6$ в/м			Электрофизические характеристики при 20°C	
	1,0	1,34	1,67	$\rho_{\text{ом}} \cdot \text{см}$	ϵ при 50гц
Эбонит	690	1160	1650	$10^{14} - 10^{16}$	3,0 - 3,5
Винипласт	690	1050	1500	$10^{14} - 10^{15}$	3,2 - 4,0
Оргстекло	580	860	1240	$10^{12} - 10^{14}$	3,5 - 3,9
Текстолит	-	-	-	$10^{10} - 10^{12}$	5,0 - 6,0
Асбоцемент	-	-	-	$10^8 - 10^9$	6,0 - 8,0

Примечание. Данные двух последних граф заимствованы из электротехнического справочника. М.—Л., 1962, Т.1

бой линейную зависимость, за исключением начального участка (насыщения зависимости не наблюдается из-за относительно небольшой напряженности электрического поля и концентрации дисперсной фазы). Скорость вращения ротора достигает максимума у эбонита, затем с изменением материала диэлектрика постепенно падает. Образцы же из текстолита и асбоцемента вообще не вращаются, а если попробовать создать вращение с помощью внешней силы, то между электродами и диэлектрическим ротором как бы возникает сила притяжения, которая фиксирует тело вращения в одном положении.

Табл. 1 позволяет объяснить эту зависимость. Обнаруживается строгая корреляция между величиной n и электрофизическими характеристиками материала: удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Снижение скорости вращения диэлектрического ротора при постоянной напряженности электрического поля с изменением материала тела вращения происходит из-за уменьшения удельного сопротивления ρ (или возрастания удельной проводимости γ) и возрастания диэлектрической проницаемости ϵ . По достижении определенной величины эффект вообще прекращается. Уменьшив каким-либо образом удельную проводимость материала, можно интенсифицировать эффект вращения (высушенный до постоянного веса текстолитовый ротор вращается). Ранее была показана

возможность увеличения фиксирующей способности электрореологического эффекта диэлектриков за счет их влажности [7], что подтверждается данной работой. Таким образом, изменяя электрофизические характеристики материала тела вращения, можно существенно интенсифицировать эффект вращения диэлектрика в электрореологических суспензиях в электрическом поле.

Л и т е р а т у р а

1. Richardson S.W. Rotation of Dielectric Bodies in Electrostatic Fields, - "Nature", 1927, N 238.
2. Vedy L.G. On the Rotation of Dielectrics in Electrostatic Fields and Related Phenomena, - "Proc. Phil. Soc.," 1931, N91.
3. Sumoto I., An Interesting Phenomenon Observed on Some Dielectrics, - "J. Phys. Soc.," 1955, 494.
4. Шульман З.П. и др. Электрореологический эффект, Минск, 1972.
5. Духин С. С., Дейнега Ю.Ф., Симонова Т.С. О механизме вращения диэлектрических тел в электрореологических средах. - В сб.: Тепло- и массоперенос. Т.3. Минск, 1972.
6. Сумото И. Явление вращения диэлектрика (на япон. яз.) - "Rep. Phys. Chem. Res.," 1956, №41.
7. Шульман З.П. и др. Влияние свойств материала диэлектрического образца на величину электрореологического фиксирующего усилия. - "ИФЖ", 1973, №1.

Г.Н. Алехнович

ВЛИЯНИЕ БЕНЗИНА АИ93 НА ВЯЗКОСТНЫЕ СВОЙСТВА МАСЕЛ М10Г₃ И М12Г

При работе двигателя и особенно при запуске в систему смазки попадает некоторое количество бензина. Однако данных, показывающих степень влияния попавшего бензина на вязкостные свойства масел, нет.

Для изучения влияния были взяты моторные масла марок М10Г₃ и М12Г, применяемые в двигателе автомобиля "Жигули", а также бензин АИ93. В образцы масел вводился бензин в количестве соответственно: 2,5; 5 и 10 весовых процентов. Кривые течения снимались на ротационном вискозиметре с кокси-

альными цилиндрами, причем внутренний цилиндр был подвешен на предварительно протарированном торсионе. Замеры значений величины напряжений сдвига производились в диапазоне скоростей сдвига от 47,7 до 6806,2 сек⁻¹ и интервале температур от +20 до +120°С.

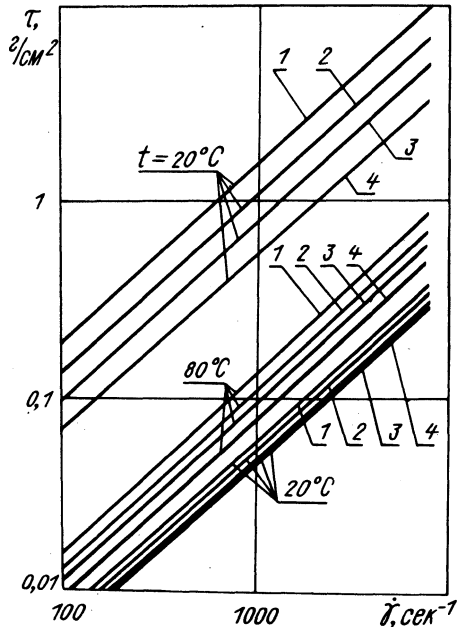
На рис. 1 и 2 для сопоставления приведены кривые течения чистых масел 1 и масел с добавками бензина 2, 3, 4. Показанные кривые течения построены в логарифмических координатах при температурах: $t = 20^{\circ}\text{C}$; $t = 80^{\circ}\text{C}$; $t = 120^{\circ}\text{C}$ для масел М10Г и М12Г. Реологическое состояние исследуемых образцов подчиняется степенному закону. Значение показателя степени для масла М10Г соответствует 0,98 (20°C) и 1,0 (80°C , 120°C), а для масла М12Г - 1,0 (при всех температурах).

Как видно из табл. 1, на которой приведены значения меры консистенции k (динамической вязкости) в зависимости от температуры масла и концентрации бензина, степень влияния концентрации бензина изменяется по мере изменения температуры. Так, если при температуре $+20^{\circ}\text{C}$ влияние концентрации бензина особенно велико, то уже при 80°C заметно, что степень влияния значительно уменьшилась.

Рис. 1. Влияние скорости сдвига на напряжение сдвига в зависимости от температуры масла и концентрации бензина для масла

М10Г₃:

- 1—без бензина; 2— 2,5% бензина; 3—5% бензина; 4—10% бензина.



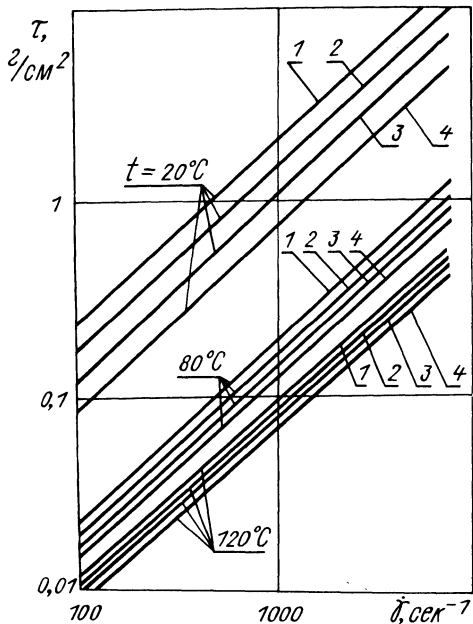


Рис. 2. Влияние скорости сдвига на напряжение сдвига в зависимости от температуры масла и концентрации бензина для масла М12Г:

1—без бензина; 2—2,5% бензина; 3—5% бензина; 4—10% бензина.

Таблица 1. Влияние концентрации бензина на меру консистенции

Масло	$\kappa \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^2 \text{ сек}$				
	без бензина	с бензином, %			
		2,5	5	10	
М10Г _з	20°	165	125	84,4	45,1
	80°	14,1	9,41	8,63	7,31
	120°	4,68	4,32	3,95	3,59
М12Г	20°	424	334	258	183
	80°	32,4	29,9	26,6	21,5
	120°	12,9	11,9	10,6	9,41

Следует заметить, что температура кипения бензина АИ93 лежит в интервале от +35 до +185°С. Поэтому при последующем увеличении температуры и происходит дальнейшее уменьшение степени влияния концентрации бензина на вязкостные свойства

масла. Некоторое влияние остается и при увеличении температуры до $+120^{\circ}\text{C}$.

В ы в о д ы

1. Реологическое состояние моторных масел М10Г₃ и М12Г подчиняется степенному закону.

2. Повышением температуры масла можно существенно снизить степень влияния попавшего бензина на вязкостные свойства масла.

3. Может иметь место накопление в масле фракций бензина, температура кипения которых лежит выше температуры масла.

Ю.М. Пикус

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ЩЕЛЕВЫХ КАНАЛАХ

В данной статье рассматривается неизотермическое течение реологически сложной жидкости в щелевом канале между коническими поверхностями применительно к задачам теории гидростатической смазки упорных подшипников. Проводится расчет конических упорных подшипников, имеющих центральную камеру (рис. 1), с учетом неизотермичности процесса смазки при работе опоры в режиме медленных перемещений. Под медленными перемещениями понимаются такие условия, когда вращение пяты осуществляется на весьма малых скоростях, не превышающих скорость прокачки смазочной среды, или скорость вообще отсутствует. В этом режиме тепловыделением вследствие диссипации механической энергии от вращении пяты можно пренебречь.

В качестве исходной реологической модели использовано реологическое уравнение нелинейно-вязкопластичной жидкости (Балкли - Гершеля), обобщающее механическое поведение при сдвиге различных смазочных материалов (пластичные смазки, индустриальные масла, масла с полимерными присадками и т.д.). На случай пространственного течения оно распространяется следующим образом:

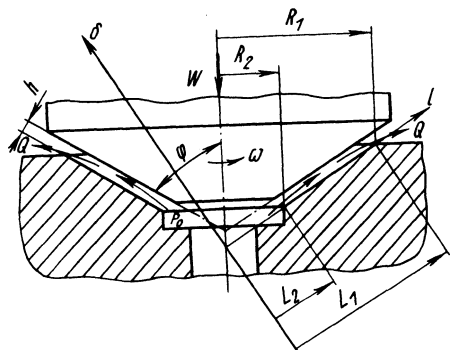


Рис. 1. Конический гидростатический упорный подшипник с центральной камерой.

$$P_0 = 2 \left(\frac{\tau_0}{J} + k J^{n-1} \right) \dot{\phi}_0, \quad (1)$$

где P_0 , $\dot{\phi}_0$ - девиаторы тензоров напряжений и скоростей деформации; J - интенсивность скоростей деформации; τ_0 , k , n - реологические параметры.

С учетом общепринятых допущений теории смазки и теории теплообмена была получена система уравнений неразрывности (2), движения (3) и энергии (4) в специальной ортогональной конической системе координат $Ol \delta \theta$ применительно к решению поставленной задачи.

$$\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial l} (l v_l) + \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial \tau_{l\delta}}{\partial \delta}; \quad \frac{\partial \tau_{\theta\delta}}{\partial \delta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \delta} = 0, \quad (3)$$

где

$$\tau_{l\delta} = \left(\frac{\tau_0}{J} + k J^{n-1} \right) \frac{\partial v_l}{\partial \delta}; \quad \tau_{\theta\delta} = \left(\frac{\tau_0}{J} + k J^{n-1} \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial \delta};$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial v_l}{\partial \delta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \delta} \right)^2}; \quad c_p \rho \int_0^h v_l \frac{dT}{dl} d\delta = (1-\sigma) \int_0^h \left(\tau_{l\delta} \frac{\partial v_l}{\partial \delta} \right) d\delta \quad (4)$$

В отличие от распространенной в теории смазки адиабатической постановки [1 - 3], в уравнение энергии (4) введен коэффициент σ , учитывающий отвод тепла поверхностями трения. Величина его может быть приближенно определена из

уравнения теплового баланса как отношение количества тепла, отводимого в единицу времени поверхностями трения, к общему количеству тепла, отводимому в единицу времени.

Проведенные нами экспериментальные исследования реологических и теплофизических свойств широкого круга смазочных материалов, а также анализ литературных данных показали, что при решении задач теории смазки можно пренебречь температурной зависимостью предела текучести τ_0 , показателя ньютоновского поведения n , плотности ρ и объемной теплоемкости $c_p \rho$. В расчетах можно использовать значения этих характеристик при температуре начального состояния. Для аппроксимации наиболее существенной температурной зависимости реологического параметра k , имеющего смысл динамической вязкости μ для ньютоновской жидкости, использована формула Рейнольдса в виде:

$$k = k_0 \exp \frac{T_0 - T}{m} . \quad (5)$$

Применение уравнения энергии (4) в интегральной форме позволяет использовать формулы для профиля скорости v_L , полученные при изотермической постановке аналогичной задачи. Однако в них параметр k будет переменным по длине зазора $k = k(L)$, т.е. профиль скорости v_L известен только на входе в зазор, где $T = T_0$, $k = k_0$, и соответствует гидродинамически установившемуся потоку (влиянием входного участка пренебрегаем). Поскольку для режима медленных перемещений справедливо соотношение $\tau_{0\delta} / \tau_{L\delta} \ll 1$, можно воспользоваться результатами работы [4] для случая одномерного изотермического течения.

Уравнение неразрывности (2) для дальнейшего решения представим в интегральной форме. Интегрирование его по толщине смазочного слоя с учетом условия непроницаемости и неподвижности стенок опоры дает

$$\int_0^h L v_L d\delta = c , \quad (6)$$

где c - постоянная интегрирования.

Подставив в (6) выражения для v_L из [4], после ряда преобразований, получим:

$$- \frac{dp}{dl} = \frac{c^n k}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+1} (2L)^n} + \frac{2\tau_0}{h} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) . \quad (7)$$

Аналогично, используя те же выражения, а также (7), представим (4) в виде

$$c_p \rho \frac{dT}{dl} = \frac{(1-\sigma)c^n k}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+1} (2l)^n} + \frac{2(1-\sigma)\varepsilon_0(2n+1)}{h(n+1)} \quad (8)$$

Уравнениями (5) - (8) воспользуемся для определения основных характеристик работоспособности рассматриваемого гидростатического подшипника. Приведем их к безразмерному виду, введя безразмерные переменные и параметры:

$$\bar{l} = \frac{l}{L_1}; \quad \bar{r} = \frac{r}{R_1}; \quad (\bar{r} = \bar{l}); \quad \bar{p} = \frac{P}{P_0}; \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}; \quad \bar{T} = \frac{T}{m};$$

$$\bar{T}_0 = \frac{T_0}{m}; \quad \alpha = \frac{h}{R_1}; \quad K_r = \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1}; \quad c_1 = \frac{k_0 c^n}{h^{3n} P_0};$$

$$K_\beta = \frac{2\varepsilon_0(R_1 - R_2)}{P_0 h}; \quad \psi = \frac{P_0}{c_p \rho m},$$

где h, R_1, R_2, L_1, L_2 - конструктивные параметры подшипника (рис. 1); T_0 - температура на входе в зазор опоры; k_0 - значение параметра k при $T = T_0$; P_0 - давление в камере подшипника.

В результате приведения получим:

$$-\frac{d\bar{p}}{d\bar{l}} = \frac{2^{n+1} \bar{k} c_1 (\alpha \sin \psi)^{n-1}}{\bar{l}^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} + \frac{K_\beta (2n+1)}{(n+1)(1-K_r) \sin \psi}; \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{l}} = (1-\sigma) \psi \left[\frac{2^{n+1} \bar{k} c_1 (\alpha \sin \psi)^{n-1}}{\bar{l}^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} + \frac{K_\beta (2n+1)}{(n+1)(1-K_r) \sin \psi} \right]; \quad (10)$$

$$\bar{k} = \exp(T_0 - \bar{T}). \quad (11)$$

Из выражения (11) после ряда преобразований найдем

$$\frac{1}{k} \frac{d\bar{k}}{d\bar{l}} = - \frac{d\bar{T}}{d\bar{l}}. \quad (12)$$

Используя (12), из (10) получим дифференциальное уравнение для определения изменения реологического параметра \bar{k} по длине зазора \bar{l} вследствие диссипативного нагрева

$$\frac{d\bar{k}}{d\bar{l}} = -(1-\sigma)\psi \left[\frac{2^{n+1} c_1 \chi^{n-1} \bar{k}^2}{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \bar{l}^n (\sin\varphi)^{1-n}} + \frac{K_\beta (2n+1) \bar{k}}{(n+1)(1-K_r) \sin\varphi} \right]. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) может быть найдено методом Лагранжа. Учитывая граничное условие ($\bar{k} = \Gamma$ при $\bar{l} = K_r$) и обозначив все постоянные первого и второго членов правой части через А и В, получим

$$\bar{k} = \frac{\exp(-B\bar{l})}{\exp(-BK_r) + A \int_{K_r}^{\bar{l}} \left[\frac{\exp(-B\bar{l})}{\bar{l}^n} \right] d\bar{l}}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (9) и (10) и решив эти уравнения при соответствующих граничных условиях, можно определить распределение давления и нагрев смазочной среды, а затем и все остальные характеристики. Поскольку полученная зависимость $\bar{k}(\bar{l})$ для любых n не выражается в элементарных функциях, дальнейшее решение поставленной задачи возможно только численным методом для конкретных значений безразмерных параметров.

Поэтому ограничимся решением для нелинейно-вязкой и ньютоновской жидкостей. Этому случаю соответствует $B, K_\beta = 0$.

Тогда

$$\bar{k} = \frac{1}{\frac{A(\bar{l}^{1-n} - K_r^{1-n})}{(1-n)} + 1} = \frac{1}{\frac{\psi(1-\sigma)2^{n+1}c_1(2n+1)^n(\bar{l}^{1-n} - K_r^{1-n})}{n^n(\chi \sin\varphi)^{1-n}(1-n)} + 1}. \quad (15)$$

Такое решение можно применить и для жидкостей с пластическими свойствами, когда влияние пластичности пренебрежимо мало ($B, K_\beta = 0$). Так при давлениях в камере $p_0 \geq 5$ - 6 мн/м^2 величина K_β даже для смазок, обладающих наиболь-

шими значениями предела текучести τ_0 , обычно не превышает 0,05. Тогда неизотермический расчет опор с вязкопластичными средами можно вести по формулам для вязких смазочных жидкостей, полагая в соответствующих выражениях $\tau_0 K_r = 0$.

Продолжим вывод формул при условии, что пластическими свойствами можно пренебречь. Решая уравнение (9) с учетом (14) и граничных условий $\bar{p} = 0$ при $\bar{l} = 1$, $\bar{p} = 1$ при $\bar{l} = 0$, получим выражение для определения константы C_1 и закон распределения давления по длине смазочного слоя:

$$C_1 = \frac{n^n (\chi \sin \varphi)^{1-n} (1-n)}{\psi(1-\sigma) 2^{n+1} (1-K_r^{1-n}) (2n+1)^n} [\exp \psi(1-\sigma) - 1] ; \quad (16)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{\psi(1-\sigma)} \ln \frac{\frac{\psi(1-\sigma) 2^{n+1} C_1 (1-K_r^{1-n}) (2n+1)^n}{n^n (\chi \sin \varphi)^{1-n} (1-n)} + 1}{\frac{\psi(1-\sigma) 2^{n+1} C_1 (\bar{l}^{1-n} - K_r^{1-n}) (2n+1)^n}{n^n (\chi \sin \varphi)^{1-n} (1-n)} + 1} . \quad (17)$$

Несущая способность подшипника

$$W = \int_0^{2\pi} \int_{L_2}^{L_1} p \, dl \, d\theta \cdot \sin^2 \varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{L_2} p_0 \, dl \, d\theta \cdot \sin^2 \varphi . \quad (18)$$

Безразмерный коэффициент несущей способности определяется выражением:

$$W_f = \frac{W}{\pi p_0 R_1^2} = 2 \int_{K_r}^1 \bar{p} \bar{l} \, d\bar{l} + 2 \int_0^{K_r} \bar{l} \, d\bar{l} = 1 - \frac{2}{\psi(1-\sigma)} \int_{K_r}^1 \ln x$$

$$\times \left\{ \frac{(\bar{l}^{1-n} - K_r^{1-n})}{(1-K_r^{1-n})} [\exp \psi(1-\sigma) - 1] + 1 \right\} \bar{l} \, d\bar{l} . \quad (19)$$

Расход смазочной среды находим из соотношения:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h l v_l \sin \varphi \, d\delta \, d\theta . \quad (20)$$

Безразмерный коэффициент расхода с учетом (6) определится как:

$$q_f = \frac{Q k^{1/n}}{h^3 p_0^{1/n}} = 2\pi c_1^{1/n} \sin \varphi = \frac{\pi n (\sin \varphi)^{1/n}}{(2\psi)^{1/n} (1-\sigma)^{1/n}} \times \\ \times \frac{(1-n)^{1/n} \chi^{1/n}}{(1-K_r^{1-n})^{1/n} (2n+1)} \left[\exp \psi (1-\sigma) - 1 \right]^{1/n} \quad (21)$$

Мощность, потребная на прокачку смазочной среды, вычисляется по формуле $N_{пр} = p_0 Q$ и в безразмерном виде равна

$$H_f = \frac{N_{пр} k^{1/n}}{p_0 \frac{\pi}{n} h^3} = q_f \quad (22)$$

Распределение температуры по длине зазора опоры получим из решения уравнения (10), положив $K_{\beta} = 0$ и подставив $k(\bar{l})$ из (15). При этом учтем, что на входе в зазор при $\bar{l} = K_r$ температура $\bar{T} = \bar{T}_0$, а также примем во внимание результат (16)

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \ln \left\{ \frac{(\bar{l}^{1-n} - K_r^{1-n})}{(1 - K_r^{1-n})} \left[\exp \psi (1-\sigma) - 1 \right] + 1 \right\} \quad (23)$$

Нагрев смазочной среды при прокачке через зазор (в безразмерном виде) равен:

$$\Delta \bar{T} = \bar{T} \Big|_{\bar{l}=1} - \bar{T}_0 = \psi (1 - \sigma) \quad (24)$$

Приведенные безразмерные выражения (19), (21) - (24) могут быть использованы также для расчета плоских опор после подстановки $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ($\sin \varphi = 1$). Полученные результаты легко сводятся к формулам, найденным ранее [4] в предположении об изотермичности процесса смазки ($k = const$), для чего необходимо положить $\psi = 0$. Используя условия $n = 1$, $k = \mu$, можно найти выражения безразмерных коэффициентов для частного случая - смазки ньютоновским маслом, - аналогичные представленным в [5] для плоских подпятников.

Л и т е р а т у р а

1. Кунин И.А. Гидродинамическая теория смазки упорных подшипников. Новосибирск, 1960.
2. Коровчинский М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. М., 1959.
3. Токарь И.Я. Проектирование и расчет опор трения. М., 1971.
4. Пикус Ю.М. Исследование статических режимов работы некоторых гидростатических опор при применении неньютоновской смазочной среды. - "Известия вузов. Машиностроение", 1973, № 6.
5. Дьяченко С.К., Иванов В.И. Статический расчет плоского гидростатического подпятника с кольцевой камерой. - В сб.: Детали машин и подъемно-транспортные машины. Киев, 1969, № 10.

Ю.М. Пикус

ВЛИЯНИЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ШЕЛЕВЫХ КАНАЛАХ

Изучение ламинарного течения жидкостей в щелевых каналах между поверхностями различной геометрии представляет интерес для решения задач теории гидростатической смазки. Вопросы расчета конических и плоских гидростатических подпятников с учетом как центробежного, так и остальных инерционных членов в уравнениях движения применительно к смазке ньютоновскими жидкостями рассмотрены в работах [1 - 5]. В большинстве случаев среди всех инерционных сил преобладающим оказывается влияние центробежных.

В настоящей работе рассмотрено влияние центробежных сил инерции на основные характеристики скоростных конических и плоских гидростатических подпятников с центральной камерой при использовании реологически сложной нелинейно-вязкой смазочной жидкости. Реологическое уравнение состояния этой среды аппроксимируется степенной формулой, обобщенной на случай пространственного течения в виде

$$P_0 = 2k \int \dot{\phi}_0^{n-1} \dot{\phi}_0, \quad (1)$$

где Π_0 , Φ_0 - девиаторы тензоров напряжений и скоростей деформации; J_0 - интенсивность скоростей деформации; k - мера консистенции; n - показатель ньютоновского поведения.

Используем полученные нами в работе [6] результаты расчета рассматриваемых опор для этой реологической модели. Для их анализа примем дополнительно широко распространенное допущение об изотермичности процесса смазки. При использовании значений реологических параметров, соответствующих среднеинтегральной температуре смазочного слоя, оно вполне приемлемо. Безразмерные несущая способность w и расход смазочной среды q определяются соотношениями:

$$w = \frac{W}{\rho \omega^2 R_1^4} = \pi \left\{ \frac{(1 - K_r^{n+1})(1-n)}{(1+n)(K_r^{n-1}-1)} \left[\bar{P}_0 + \frac{(1 - K_r^2)}{\sigma} \right] - \frac{1}{12} (1 - K_r^4) \right\}; \quad (2)$$

$$q = \frac{Q}{\omega R_1^3} = \frac{\pi \chi (1-n) \sin \varphi}{6 a_1 (K_r^{n-1} - 1)} \left[\bar{P}_0 + \frac{(1 - K_r^2)}{\sigma} \right]. \quad (3)$$

Здесь

$$K_r = \frac{R_2}{R_1}; \quad \chi = \frac{h}{R_1}; \quad \bar{P}_0 = \frac{P_0}{\rho \omega^2 R_1^2}; \quad a_1 = \frac{k}{\rho \omega^{2-n} R_1^{1+n} h^{n+1}},$$

где ω - скорость вращения пяты; W - несущая способность опоры; Q - расход смазочной среды; p_0 - давление в камере подпятника; R_2 , R_1 - радиусы камеры и наружной поверхности подпятника; h - толщина смазочного слоя (высота зазора); ρ - плотность смазочной среды.

Выражения (2), (3) обобщают расчет плоских подпятников ($\varphi = \pi/2$; $\sin \varphi = 1$) и случай смазки ньютоновским маслом ($n = 1$; $k = \mu$).

Для изучения воздействия центробежных сил инерции расчет коэффициентов w и q проводился с учетом и без учета центробежных сил для различных сочетаний параметров \bar{P}_0 , a_1 , χ , K_r , φ , n с помощью ЭВМ "Минск-22" и "Проминь-2". При этом выражения (2) и (3) были представлены в виде:

$$w = w' - w''; \quad (4)$$

$$q = q' + q'' \quad (5)$$

Здесь $w' = \pi A \bar{p}_0$, $q = \pi B \bar{p}_0$;

$$w'' = \frac{\pi}{12} (1 - K_r^4) - \frac{\pi A}{6} (1 - K_r^2) ; \quad q'' = \frac{\pi B}{6} (1 - K_r^2) ,$$

где w' , q' - соответственно безразмерные несущая способность и расход без учета центробежных сил инерции; w'' , q'' - безразмерные несущая способность и расход, обусловленные центробежными силами.

$$A = \frac{(1 - K_r^{1+n})(1-n)}{(1+n)(K_r^{n-1} - 1)} ; \quad B = \frac{\chi(1-n)\sin\varphi}{6\alpha_1(K_r^{n-1} - 1)} .$$

Результаты вычислений показывают, что для конических и плоских подпятников степень влияния центробежных сил определяется сочетанием параметров \bar{p}_0 , K_r и n . При использовании как нелинейно-вязких, так и ньютоновских смазочных материалов во всех случаях несущая способность, определенная с учетом центробежных сил, уменьшается, а расход возрастает. Эти изменения проявляются тем сильнее, чем меньше безразмерное давление \bar{p}_0 и относительный размер камеры K_r .

Значительный интерес представляет разрешение вопроса о границах влияния центробежных сил инерции. Для его выяснения по данным расчетов коэффициентов w , w' и q , q' были построены зависимости вида $\bar{p}_0^{min} = f(K_r^{min})$ для разных n (рис. 1). Они устанавливают соответствие между минимально допустимыми при данных n значениями \bar{p}_0 и K_r , при которых погрешность из-за пренебрежения центробежными силами, определенная как $\Delta \% = w''/w'$; $\Delta \% = q''/q'$ при расчете несущей способности и расхода не превышает 5%. Полученные из рис. 1 выводы будут справедливы для любых значений α_1 , χ и φ

Приведенные графики состоят из двух отдельных участков. Такой вид объясняется тем, что в области малых K_r ($K_r < 0,2 + 0,3$) центробежные силы оказывают более существенное влияние на несущую способность, а в области $K_r > 0,2 + 0,3$ - на расход смазочной среды. Степень влияния этих сил на несущую способность зависит от величины реологического показателя n , а относительное изменение расхода при их уче-

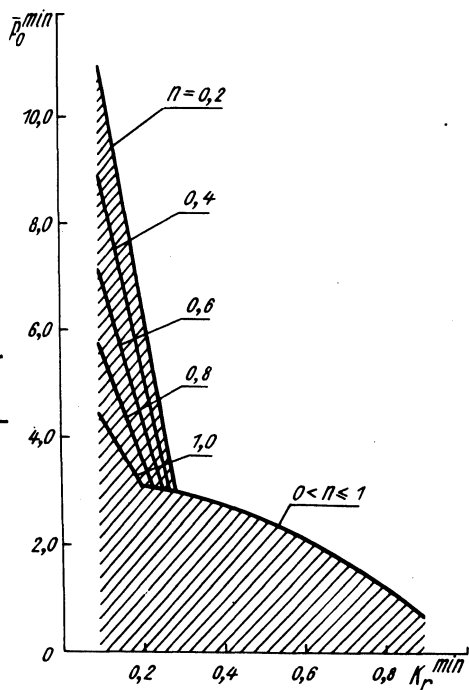


Рис. 1. Границы влияния центробежных сил инерции для жидкостей с различными значениями показателя n

те одинаково для всех значений n . Поэтому при $K_r < 0,2 + 0,3$ каждому n соответствует своя кривая, а при больших K_r — кривая одна для любых n . Точка пересечения обоих участков зависимости соответствует значению K_r , при котором влияние центробежных сил на расход и несущую способность одинаково и не превышает 5%.

Результаты, представленные на рис. 1, показывают, что уменьшение показателя неьютоновского поведения n ведет к возрастанию роли центробежных сил при $K_r < 0,3$. Их действие становится пренебрежимо малым при больших значениях \bar{p}_0 по сравнению со случаем применения ньютоновских жидкостей. При $K_r \geq 0,3$ влияние центробежных сил зависит только от сочетания \bar{p}_0 и K_r и одинаково для сред с любым n .

Заштрихованная область на рис. 1 соответствует такому сочетанию значений \bar{p}_0 , K_r и n , при котором влияние этих сил инерции по крайней мере на одну из характеристик (W или Q) является существенным.

Л и т е р а т у р а

1. Кудрявцев Г.П. Расчет гидростатических подпятников с учетом центробежных сил. - В сб.: Детали машин и подъемно-транспортные машины. Киев, 1968, №7. 2. Лосик В.И. Об учете инерционных сил при расчете гидростатических упорных подшипников. - "Машиноведение", 1968, № 1. 3. Токарь И.Я., Черняков П.С. К задаче о смазке опор трения с осесимметричной формой несущей поверхности. - "Изв. АН СССР. Механика и машиностроение", 1963, №2. 4. Федорова Г.И. Эффект инерции в щели между соосными вращающимися конусами при наличии перепада давления на торцах. - "Машиноведение", 1972, №5. 5. Dowson D. Inertia Effects in Hydrostatic Thrust Bearings. - "Transactions ASME", 1961, S.D, v. 83, N 2. 6. Пикус Ю.М. Неизотермический расчет гидростатических опор при применении реологически сложной смазочной среды. - В сб.: Тепло- и массоперенос. Т. 3., Минск, 1973.

В.П. Ящерицын

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФЕРРОСУСПЕНЗИЙ

В последнее время появляется все больше работ, посвященных изучению механического поведения ферромагнитных текучих сред в магнитном поле. Хотя в большинстве случаев рабочие и технологические жидкости диа- или парамагнитны, их динамическое взаимодействие с внешним магнитным полем можно существенно интенсифицировать введением добавок мелкодисперсных ферромагнетиков. С помощью магнитореологических добавок можно, например, ламинаризировать турбулентное течение либо регулировать в нужную сторону характеристики турбулентности и тем самым радикальным образом влиять на структуру потока, гидродинамическое сопротивление и конвективный тепломассоперенос.

Однако для практического использования магнитореологического эффекта нужно в первую очередь изучить основные закономерности взаимодействия ферросуспензий с магнитным по-

лем при сдвиговом течении, т.е. провести магнитореометрические измерения. Для этой цели нами был сконструирован специальный соосноцилиндрический магнитореометр. Однородное магнитное поле в нем ориентировано по нормали к поверхностям сдвига.

В качестве объекта исследования была выбрана суспензия на основе стандартного магнитномягкого ферропорошка Р10 со средним размером частиц 3,5 мкм. Несущей средой служила композиция из 50% масла индустриального 50 и 50% консистентной тугоплавкой смазки "1-13". Система подвергалась обработке на ультразвуковом диспергаторе.

Экспериментально получены полные кривые стационарного изотермического течения этих ферросуспензий с концентрациями твердой фазы от 0 до 70% по весу и варьировании напряженности магнитного поля от 0 до 10^5 а/м. Некоторые из полученных реограмм представлены на рис. 1, а.

Обращает на себя внимание тот факт, что с ростом напряженности магнитного поля кривые течения смещаются вверх вдоль оси напряжений, область нелинейности их расширяется, а наклон прямолинейного участка почти постоянен. Таким образом, магнитное поле чрезвычайно сильно изменяет пластичес-

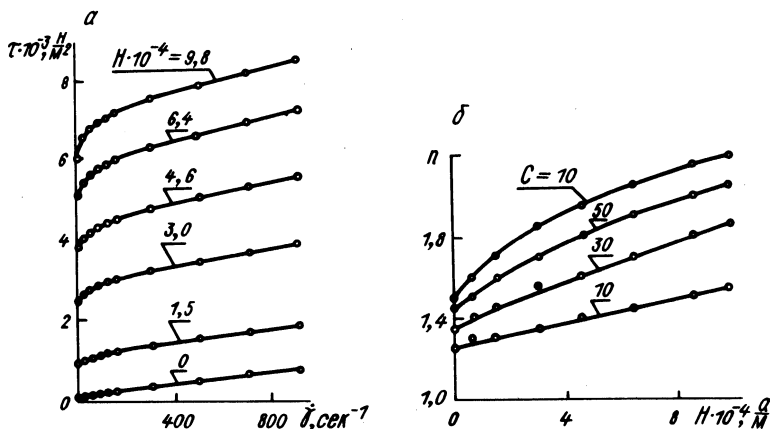


Рис. 1. Кривые течения ферросуспензии (а) при различных напряженностях H магнитного поля и зависимость параметра нелинейности кривой течения от напряженности магнитного поля (б) при различных концентрациях C (в вес. %).

кий, т.е. структурный, фактор (это находит свое выражение в резком увеличении статического предела текучести) и в гораздо меньшей мере влияет на пластическую вязкость.

Предел текучести ферросуспензий в определенном интервале возрастает пропорционально напряженности магнитного поля, а затем темп его увеличения снижается, т.е. кривая $\tau_0 = \tau_0(H)$ выходит на насыщение.

Как показали измерения, эффективная вязкость с ростом скорости сдвига прогрессивно снижается в десятки и сотни раз.

Итак, в отсутствие поля система является практически ньютоновской. Под воздействием магнитного поля она приобретает ярко выраженные неньютоновские псевдопластические свойства. Обработка кривых течения показала, что они вполне адекватно описываются обобщенным уравнением нелинейновязкопластичной среды, предложенным З.П.Шульманом [1], в его частной формулировке

$$\tau \frac{1}{n} = \tau_0 \frac{1}{n} + (\mu_p \dot{\gamma})^{\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

где τ - напряжение сдвига; τ_0 - предел текучести (предельное статическое напряжение сдвига); $\dot{\gamma}$ - скорость сдвига одноосного течения; μ_p - аналог пластической вязкости; n - параметр нелинейной вязкопластичности.

Предельное статическое напряжение сдвига определялось экспериментально, а параметр нелинейности кривой течения находится по формуле

$$n = \frac{1}{1 + A}.$$

Здесь

$$A = \lg \frac{(d\tau/d\dot{\gamma})_2}{(d\tau/d\dot{\gamma})_1} \left(\lg \frac{\tau_1 \dot{\gamma}_2}{\tau_2 \dot{\gamma}_1} \right)^{-1},$$

где $\tau_1, \tau_2, \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, (d\tau/d\dot{\gamma})_1$ и $(d\tau/d\dot{\gamma})_2$ - частные значения соответствующих величин для любых двух точек на кривой течения. Величина параметра μ_p тогда рассчитывается по формуле

$$\mu_p = \frac{(\tau_1^{\frac{1}{n}} - \tau_0^{\frac{1}{n}})^n}{\dot{\gamma}}. \quad (3)$$

Нами было установлено влияние напряженности магнитного поля на каждый реологический параметр уравнения состояния

(1). В качестве примера на рис. 1, б приведена зависимость фактора нелинейности кривой течения от напряженности магнитного поля.

Отметим, наконец, что независимо от индивидуальных особенностей ферромагнитного порошка и исходных реологических свойств несущей среды, реологическое поведение всех исследованных нами феррокомпозиций во внешнем магнитном поле качественно не отличается от описанного.

Л и т е р а т у р а

1. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейновязкопластичных материалов. Минск, 1970.

В.П. Ящерицын

МАГНИТОРЕОМЕТР ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕКУЧИХ СРЕД В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Потребность в реометрах для реологических исследований в магнитном поле появилась в связи с расширяющимся применением магниточувствительных текучих систем в различных аппаратах и процессах (электромагнитные ферропорошковые муфты, нанесение магнитного лака на магнитофонную ленту и др.).

Применявшиеся до сих пор для таких исследований капиллярные вискозиметры имеют существенные недостатки: неоднородность полей напряжений и скоростей сдвига, трудность получения малых скоростей сдвига, а значит, и полных кривых течения. В то же время наиболее интересные и важные особенности магнитореологического эффекта наблюдаются именно в области малых скоростей.

По указанным причинам для корректных магнитореологических исследований предпочтительнее использовать ротационные приборы. Следует отметить, что приспособить для этого существующие вискозиметры, описанные в [1], затруднительно ввиду специфичности требований, предъявляемых к магнитореометрам.

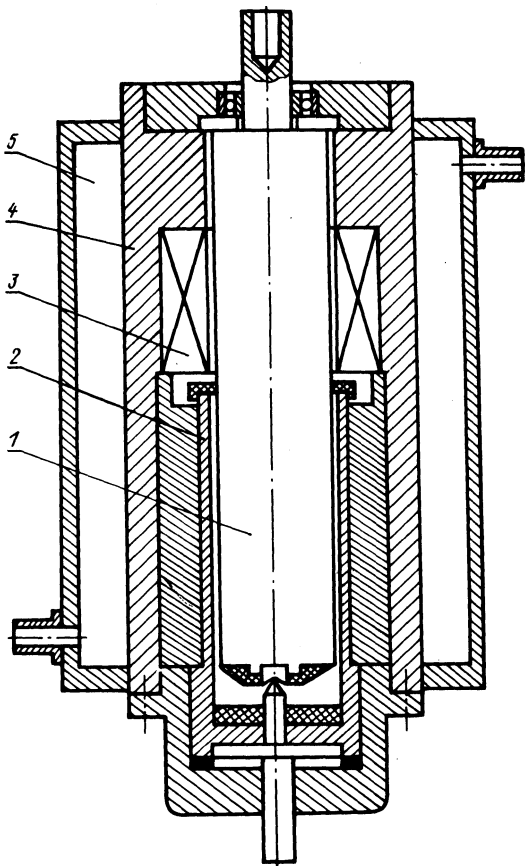


Рис. 1. Схема измерительной головки магнитореометра .

Особый интерес представляет ориентация магнитного поля по нормали к поверхностям сдвига, поскольку в этом случае магнитореологический эффект проявляется наиболее ярко. Нами разработана конструкция соосноцилиндрического магнитореометра именно для такой геометрии магнитного поля. Схема измерительной головки прибора показана на рис. 1.

Рабочий зазор образован соосными цилиндрами – статором 1 и ротором 2. Однородное магнитное поле создается катушкой 3, питаемой постоянным током. Магнитопроводом служат статор, ротор и корпус 4. Все эти детали изготовлены из магнитномягкого материала (армко-железа) для уменьшения остаточной намагниченности.

Следует стремиться, чтобы в подобных приборах было возможно меньше вращающихся проводящих деталей. В противном случае при больших скоростях наведенные магнитные поля могут исказить картину поля в зазоре. Поэтому ротор 2 выполнен в виде тонкостенного стакана.

По сравнению с обычными вискозиметрами в магнитореометре выше требования к точности изготовления статора и ротора, так как их эксцентricность приведет к перераспределению магнитного потока и, следовательно, к азимутальной асимметрии поля напряжений сдвига.

Поскольку вязкость феррокомпозиций повышается в магнитном поле в десятки и сотни раз, системы измерений напряжений сдвига должны иметь широкий рабочий диапазон. Нами использован тензометрический метод измерения крутящих моментов, приложенных к статору.

Применять сменные рабочие органы для расширения диапазона получаемых скоростей сдвига нежелательно, так как при этом изменяются характеристики магнитной цепи. Влияние донного эффекта в магнитореометре очень мало, поскольку в пространстве между днищами соосных цилиндров имеется лишь слабое магнитное поле рассеяния, и вязкость среды там ниже, чем в самом рабочем зазоре.

Вследствие значительных диссипативных тепловыделений предусмотрена термостатирующая рубашка 5.

Перед каждым опытом магнитореометр нужно размагничивать, чтобы уменьшить влияние магнитного гистерезиса. Для этого достаточно подсоединить катушку 3 к источнику переменного тока.

Прибор позволяет проводить основные реологические измерения: снимать полные кривые сдвигового течения ферромагнитных систем в полях различной напряженности (от 0 до 10^5 а/м), исследовать релаксацию напряжений после снятия поля, измерять статический предел прочности ферросuspензий.

Л и т е р а т у р а

1. Белкин И.М., Виноградов Г.В., Ленов А.И. Ротационные приборы. М., 1968.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В ПЛОСКИХ КОНИЧЕСКИХ НАСАДКАХ

Установлено, что вязко-пластическими свойствами обладают консистентная смазка ЦИАТИМ-201, глина строительная, продукты пищевой и краскоделательной промышленности, нефтепродукты, полимерные материалы и другие.

В настоящей работе рассмотрено градиентное движение смазки ЦИАТИМ-201, глины строительной и мучного теста в плоских конических насадках с углом раствора 15, 20, 25, 30 и 35°, изготовленных из прозрачного органического стекла. Исследование движения проводилось методом просвечивания рентгеновскими лучами. Движение отдельных частиц смазки, глины и теста изучалось вместе с движением мелких свинцовых реперов, положение которых в отдельные моменты времени фиксировалось на рентгеновскую пленку путем периодического включения рентгеновского аппарата. Скорость скольжения определялась как отношение расстояния между двумя последовательными положениями свинцовых реперов у твердой стенки ко времени, за которое произошло данное перемещение.

Время движения реперов из одного положения в другое определялось по секундомеру.

Градиент скорости в прилегающих к твердой стенке объемных слоях представляет собой тангенс угла между горизонтальной осью развернутого графика скоростей и касательной к кривой через точку, расположенную у неподвижной твердой стенки.

Экспериментальное исследование показывает, что движение смазки ЦИАТИМ-201, глинистой суспензии и мучного теста в плоских конических насадках в большинстве случаев происходит с пристенным скольжением. Пристенное скольжение связано с существованием пристенных слоев дисперсионной среды. Основной характеристикой скольжения является коэффициент пристенного скольжения, размерность которого выражается в единицах измерения угла, т.е. в радианах. Формула для вычисления коэффициента пристенного скольжения имеет вид

$$K = \frac{v_{ск}}{\left| \frac{\partial v}{\partial h} \right|_0} r_c,$$

где K - коэффициент пристенного скольжения; v - скорость скольжения; $\left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|_0$ - градиент скорости в $v^{СК}$ прилегающих к твердой стенке объемных слоях; r_c - расстояние от оси конуса до твердой стенки.

Угол пристенного слоя дисперсионной среды является величиной, пропорциональной коэффициенту пристенного скольжения.

Результаты опытных данных сведены в табл. 1.

Числовые значения коэффициента пристенного скольжения при движении исследуемых систем в плоских конических насадках.

Таблица 1.

Исследуемая система	Угол раствора конического насадка, град.	Коэффициент пристенного скольжения
ЦИАТИМ-201	15	0,13
"	20	0,10
"	25	0,08
ЦИАТИМ-201	30	0,07
"	35	0,06
Глина	15	0,49
Глина	30	0,25
Мучное тесто	15	0,04
"	30	0,02

В ы в о д ы

1. Движение консистентной смазки ЦИАТИМ-201, глинистых растворов и мучного теста в конических насадках в большинстве случаев сопровождается пристенным скольжением.

2. Основной реологической характеристикой скольжения исследуемых систем является коэффициент пристенного скольжения, который характеризуется безразмерной величиной, зависящей от угла раствора конического насадка. Зависимость является обратной, т.е. с уменьшением угла раствора конического насадка коэффициент пристенного скольжения увеличивается.

3. При движении глинистых растворов и мучного теста коэффициент пристенного скольжения зависит от влажности. Эта зависимость является обратной.

4. При решении теоретических задач движения вязкопластичных систем целесообразно учитывать пристенное скольжение. Прилипание же движущейся системы к твердым стенкам следует рассматривать как частный случай, когда коэффициент скольжения близок к нулю.

В.И. Глубокий

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРОВ

В отечественной и зарубежной практике широко используются материалы на основе кремнийорганических соединений. Они применяются в качестве добавок к строительным растворам и бетонам, для гидрофобизации различных материалов, а также как эффективные и долговечные защитные покрытия. Отличительной особенностью кремнийорганических защитных покрытий является их высокая водостойкость, атмосферостойкость и стойкость к воздействию высоких температур.

Для получения кремнийорганических защитных покрытий обычно используются растворы кремнийорганических смол в сочетании с различными наполнителями.

В технологии антикоррозионных работ важное значение имеет выбор совершенных методов нанесения лакокрасочных материалов. Однако эффективное использование механизированных методов нанесения должно обосновываться на данных реологических исследований кремнийорганических материалов.

В настоящей работе приведены результаты исследования реологических свойств растворов полиорганосилоксановых смол и некоторых композиций на их основе.

В качестве основных объектов исследования использованы кремнийорганические полиметилфенилсилоксановые лаки (немодифицированные) КО-08 (МРТУ 6-02-293-64) и (модифицированные) К-44 (ТУ ЕУ-175-59), полифенилсилоксановые - КО-85 (ГОСТ 11066 - 64) и ФС-1 (МРТУ 6-02-297-64), кремнийорганическая смола Ф-9 (ТУ П-20-63), кремнийорганические эмали КО-168 (синяя) (МРТУ 6-02-402-67) и КО-174 (белая) (ТУ - 11-93-67), органосиликатные материалы ВН-30-ОХ и ВН-30-ДТС/8 (СТУ 30-2943-66).

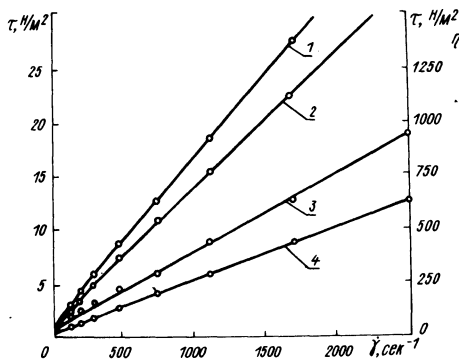


Рис. 1. Кривые течения растворов полиорганосилоксановых смол:

1 — КО=85; 2 — КО=0,8; 3 — ФС=1 (лаки, левая ось напряжений); 4 — Ф = 9 (смола, правая ось напряжений).

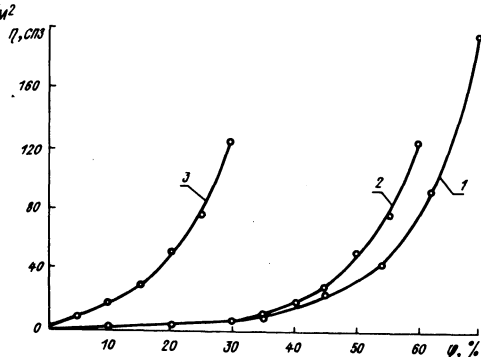


Рис. 2. Зависимость вязкости раствора полиорганосилоксановой смолы (лак К=44)

1—от концентрации смолы; 2— от концентрации сухого остатка модифицированной смолы; 3—от концентрации полиэфира.

Реологические исследования показали, что растворы полиорганосилоксановых смол являются ньютоновскими жидкостями (рис. 1). Но необходимо выяснить, изменится ли поведение раствора при изменении концентрации полиорганосилоксановой смолы. Кроме того, некоторые кремнийорганические лаки представляют собой раствор модифицированной полиэфиром полиорганосилоксановой смолы в органических растворителях, поэтому определенный интерес представляет оценка влияния концентрации полиэфира на реологические свойства раствора. Установлено, что изменение концентрации полиорганосилоксановой смолы и полиэфира не изменяет характер кривых течения, но влияет на численные значения вязкостных характеристик. При этом зависимость вязкости раствора от концентрации полиорганосилоксана (рис. 2, линия 1) характеризуется тем, что в пределах концентраций от 0 до 30% зависимость имеет прямолинейный характер, а в пределах 30 – 70% криволинейный. После перехода за концентрацию 55% наблюдается резкое возрастание вязкости. Поэтому для получения максимально наполненных систем необходимо выбирать концентрацию в пределах 30 – 55%. Для дальнейших исследований была выбрана концен-

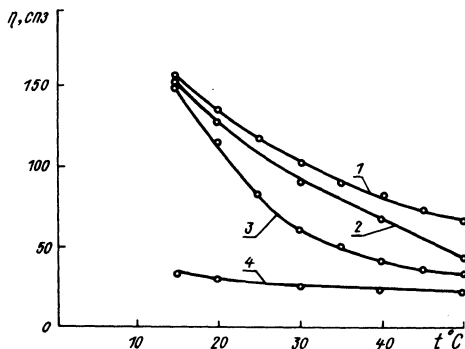


Рис. 3. Зависимость вязкости композиций на основе полиорганосилоксановых смол от температуры :
 1—VN=30-ДТС/8; 2—КО-168;
 3—HN-30-ОХ; 4—КО-174.

трация полиорганосилоксана 30% с соответствующей концентрацией модифицирующего компонента – полиэфира в пределах 5 – 30%. В этом случае также можно выделить оптимальную концентрацию (рис.2, линия 3) в пределах 10 – 15%. Следует заметить, что при одном и том же сухом остатке немодифицированной и модифицированной системы (рис.2, линия 2), для последней характерна более высокая вязкость. Для наполненных композиций на основе полиорганосилоксановых смол характерно, что при сравнительно невысоких скоростях сдвига наблюдается неньютоновское поведение системы, при более высоких – этот эффект проявляется в малой степени. Кроме того, сравнивая кривые течения композиций на основе полиорганосилоксановых смол в зависимости от температуры можно отметить, что температурный фактор существенно не влияет на их характер, однако оказывает влияние на вязкостные характеристики. Так, влияние температуры на вязкостные характеристики для кремнийорганической эмали КО-174 сказывается в меньшей степени, чем для эмали КО-168 (рис.3, кривые 2 и 4). Если для последней характерно уменьшение вязкости в 3 раза, то вязкость эмали КО-174 в том же диапазоне температур почти не изменяется. Для органосиликатных материалов VN-30-ДТС/8 и VN-30-ОХ характерно, что с увеличением температуры эффективность воздействия температурного фактора уменьшается для обоих материалов (рис.3, кривые 1 и 3). Однако действие температурного фактора для материала VN-30-ОХ проявляется в большей степени и реологические параметры при одних и тех же температурах имеют меньшие значения. В диапазоне температур 15 – 50°C вязкость органосиликатного материала VN-30-ОХ изменяется в 4 раза, а VN-30-ДТС/8 – только в 2,5 раза.

Реологические исследования проводились на установке, основной узел которой представляет собой вискозиметр системы А.А. Трапезникова. Термостатирование осуществлялось с помощью термостата и ультратермостата ТЛ-150. Исследуемый материал помещался в зазор между рабочими цилиндрами после тщательного перемешивания в течение часа.

М.Д. Устинов

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОКОЯЩЕМСЯ ГАЗЕ

Аналитическое исследование одномерных течений газа связано со значительными трудностями, которые определяются, с одной стороны, нелинейностью системы уравнений в частных производных, описывающих движение газа, и, с другой стороны, наличием граничных условий на заранее неизвестных линиях. В тех случаях, когда в начальных и граничных условиях задачи фигурируют лишь две постоянные с независимыми размерностями, система уравнений в частных производных сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1], и соответствующие течения называются автомодельными. Такое сведение оказывается возможным без анализа граничных условий.

В некоторых случаях (в частности, в рассматриваемой ниже задаче) постоянные, фигурирующие в условиях задачи, и независимые переменные позволяют образовать две независимые безразмерные переменные, но анализ граничных условий (и уравнений движения) дает возможность нелинейную систему уравнений движения газа свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и в этом смысле задачу можно считать автомодельной.

1. Рассмотрим следующую задачу: пусть в полубесконечной цилиндрической трубе ($0 < x < \infty$) находится покоящийся газ, давление которого $p \equiv 0$, плотность ρ_0 является известной функцией x , $\rho_0 = \rho_* \Psi(\lambda)$, где $\lambda = x/a$, причем постоянные ρ_* и a имеют размерности плотности и длины соответственно. В момент времени $t = 0$ поршень, находящийся в сечении $x = 0$, начинает двигаться в область, занятую газом, по некоторому закону $x = x(t)$. Перед поршнем воз-

никает сильная ударная волна, закон движения которой известен

$$x = a \Phi(\mu) , \quad \mu = t / b ,$$

где Φ - известная функция; t - время и b - постоянная, имеющая размерность времени.

Требуется определить закон движения поршня $x(t)$ и течение газа в области между поршнем и сильной ударной волной.

Одномерное адиабатическое движение идеального газа описывается следующей системой уравнений [1] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 ; \quad \frac{\partial p/\rho^\gamma}{\partial t} + u \frac{\partial p/\rho^\gamma}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

где u , p , ρ - скорость, давление и плотность газа; x - геометрическая координата; t - время; γ - показатель адиабаты.

На ударной волне имеем

$$u = \frac{2}{\gamma+1} U_0 ; \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} ; \quad p = \frac{2}{\gamma+1} \rho U_0^2 ; \quad U_0 = \frac{a}{b} \Phi'(\mu) . \quad (1.2)$$

Введем два безразмерных переменных параметра ν_1 и ν_2 :

$$\nu_1 = \Phi(\mu) - \lambda ; \quad \nu_2 = \Phi(\mu) / \lambda ; \quad \lambda = x/a ; \quad \mu = t/b , \quad (1.3)$$

которые на ударной волне сохраняют постоянные значения ($\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 1$).

Поставим задачу найти функции $\psi(\lambda)$ и $\Phi(\mu)$, для которых решение поставленной задачи можно искать в следующей форме:

$$u = \frac{a}{b} \Phi'(\mu) f(\nu_1) ; \quad \rho = \rho_* \psi(\lambda) \varphi(\nu_1) ; \quad p = \rho_* \frac{a^2}{b^2} \Phi'^2(\mu) \Psi(\lambda) \psi(\nu_1) . \quad (1.4)$$

Из условий (1.2) следует, что неизвестные функции f , φ , Ψ сохраняют постоянные значения на ударной волне (при $\nu_i = 0, 1$).

Можно доказать, что подстановка (1.4) в систему (1.1) приводит ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

лишь в том случае, когда функции ϕ и ψ удовлетворяют определенным соотношениям, а именно:

$$\phi'' = k(\phi')^2; \quad \psi' = \alpha\psi \quad \text{для} \quad i = 1 \quad (1.5)$$

$$\phi\phi'' = m(\phi')^2; \quad \lambda\psi' = n\psi \quad \text{для} \quad i = 2,$$

где k , α , m и n - произвольные постоянные.

Интегрируя (1.5) и учитывая, что уравнения (1.1) инвариантны по отношению к преобразованию $x' = x + h$; $t' = t + \tau$ (h и τ - постоянные), получаем следующие пять случаев:

I. $k = 0$, т.е. сильная ударная волна движется по линейному закону в покоящемся газе, плотность которого меняется по экспоненциальному закону.

II. $k \neq 0$; $\alpha \neq 0$, т.е. ударная волна движется по логарифмическому закону в среде, плотность которой меняется по экспоненциальному закону.

III. $k \neq 0$, $\alpha = 0$, когда плотность перед ударной волной, движущейся по логарифмическому закону, постоянна.

IV. $m = 1$, что соответствует движению ударной волны по экспоненциальному закону в среде, плотность которой меняется по степенному закону.

V. $m \neq 1$, когда сильная ударная волна движется по степенному закону в среде с плотностью, также меняющейся по степенному закону.

Ставшая классической теория автомодельных течений газа типа У рассмотрена в [1] и применена к исследованию задачи о поршне в [2 - 5]. Решения типа II использовались в работах [6 - 8] для решения ряда задач.

В настоящей работе исследованы случаи I, III, IV (в последнем случае плотность покоящегося газа считается постоянной).

2. Пусть в области $X > 0$ находится покоящийся газ, плотность ρ_0 которого постоянна, давление $p_0 = 0$. В момент $t = 0$ по газу начинает распространяться ударная волна по закону

$$x(t) = a \ln(1 + t/b); \quad ab > 0. \quad (2.1)$$

Требуется определить движение поршня, порождающего волну (2.1), и течение газа в области между поршнем и ударной волной.

Для решения задачи примем в качестве новых независимых переменных функций $\tau(x, t)$ и $\xi(x, t)$, существование которых вытекает из (1.1) и которые определяются равенствами

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt ; d\xi = \rho u dx - (\rho + \rho u^2) dt \quad (2.2)$$

и приведем систему (1.1) к следующей форме [9]:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} - f(\tau) \frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 ; \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\gamma-1}{\gamma} V \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 ; \quad (2.3)$$

$$u = U ; \quad \rho = V^{\gamma/\gamma-1} ; \quad \rho = V^{1/\gamma-1} (\gamma-1)^{-1} f^{-1}(\tau) ,$$

где $f(\tau)$ - произвольная функция.

Ищем решение поставленной задачи в виде:

$$U = \frac{a}{b} e^{-\frac{\tau}{\alpha \rho_0}} F(\sigma) ; \quad V = h \left(\frac{a}{b} \right)^{2 \frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{\gamma-1}{\rho_0} e^{\frac{2(\gamma-1)\tau}{\gamma \alpha \rho_0}} \Phi(\sigma) ; \quad (2.4)$$

$$f(\tau) = H \left(\frac{a}{b} \right)^{2/\gamma} \rho_0^{-(\gamma-1)/\gamma} e^{-\frac{2\tau}{\gamma \alpha \rho_0}} ; \quad \sigma = \frac{b \xi}{\rho_0 a^2} e^{\frac{\tau}{\alpha \rho_0}} ; \quad h = 2 \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ; \quad H = h^{-1} .$$

Тогда система (2.3) переходит в обыкновенную систему дифференциальных уравнений:

$$-F + (\sigma + F) \frac{dF}{d\sigma} - \frac{d\Phi}{d\sigma} = 0 , \quad -2\alpha \Phi + (\sigma + F) \frac{d\Phi}{d\sigma} - \alpha \Phi \frac{dF}{d\sigma} = 0 , \quad \alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma} . \quad (2.5)$$

На сильной ударной волне $\sigma = 0$ [9], и нетрудно проверить, используя (2.4), что условия на ударной волне (2.1) будут выполнены, если принять, что

$$F(0) = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} ; \quad \Phi(0) = \frac{2(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)^2} . \quad (2.6)$$

Таким образом, необходимо найти решение системы (2.5), удовлетворяющее начальным условиям (2.6).

3. Полагая, $F = \sigma_w(\sigma)$; $\Phi = \sigma^2_z(\sigma)$, приведем систему (2.5) и условия (2.6) к следующей окончательной форме:

$$\frac{dz}{dw} = z \frac{2\alpha z + 2(\alpha - 1) + (3\alpha - 4)w - 2w^2}{\alpha z(w + 2) - w^2(1 + w)}; \quad (3.1)$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(1+w)^2 - \alpha z}{\alpha z(w+2) - w^2(1+w)} dw, \quad \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}$$

при $\sigma \rightarrow 0$.

Основное уравнение (3.1) имеет четыре особые точки:

$$O(0, 0); A(-1, 0); B\left[\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}, \frac{2(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)^2}\right] \text{ и } C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9\alpha}\right)$$

причем при $\alpha = 1/2$, т.е. при $\gamma = 2$, точки В и С совпадают. Точка О есть седло-узел [10], каноническая окрестность которого состоит из параболического и двух гиперболических секторов. Исследование (3.1) при $w \rightarrow +0$ (внутри параболического сектора) показывает, что

$$z = C w^{2-\alpha} e^{-\frac{2(1-\alpha)}{w}}; \quad w \rightarrow +0, \quad \text{где } C = \text{const}. \quad (3.2)$$

В частности, при $\alpha = 0$ (когда $\gamma = 1$) общее решение основного уравнения (3.1) имеет вид

$$z = C w^2 e^{-\frac{2}{w}}; \quad \sigma = C_1 e^{\frac{1}{w}} w^{-1}. \quad (3.3)$$

Точка А является узлом с характеристическими направлениями $k_1 = 0$ и $k_2 = (1 - \alpha)/\alpha$ в плоскости (w, z) . Точка В является седлом при $0 < \alpha < 1/2$ и узлом при $1/2 < \alpha < 1$. Точка С является фокусом при $0 < \alpha < 7/16$, узлом при $7/16 < \alpha < 1/2$ и седлом при $1/2 < \alpha < 1$ (при $\alpha = 7/16$ - вырожденный узел). Если $\alpha = 1/2$, точка С есть седло - узел.

Из (3.1) следует, что в окрестности точки $w = \infty$ иско-мое решение имеет следующее представление:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{1}{2} w^2 - w + \frac{2(1+\alpha)}{2-\alpha} - 4 \frac{2+11\alpha}{3(2-\alpha)^2 w} + \dots \\ \sigma &= \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)w} + \frac{4(1-\alpha)^2}{(2-\alpha)^2 w^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

При движении вдоль траекторий частиц газа в направлении $dt > 0$ ξ уменьшается, но, как видно из (3.1), знак $d\xi$ совпадает со знаком $b d\sigma$. Следовательно, необходимо рассмотреть два случая (поскольку $ab > 0$):

$$\begin{aligned} a > 0 ; \quad b > 0 & \quad (\text{первый случай}) \\ a < 0 ; \quad b < 0 & \quad (\text{второй случай}). \end{aligned}$$

В первом случае $d\sigma < 0$, и из (3.4) следует, что движению вдоль траекторий частиц газа от ударной волны в направлении $dt > 0$ соответствует перемещение по интегральной кривой (3.4) из точки $z = +\infty$, $w = -\infty$ в направлении $dw > 0$. При таком движении, как показывает более детальное исследование поля интегральных кривых уравнения (3.1), мы неизбежно пересечем параболу $z = (w + 1)^2$ в некоторой точке $M(w_*, z_*)$, при переходе через которую $d\sigma$, а значит, и $d\xi$ меняет знак, что невозможно. Следовательно, рассматриваемое течение имеет в плоскости (x, t) предельную линию L , образом которой и является точка $M(w_*, z_*)$.

Найдем уравнения траекторий частиц газа, полагая в (2.2) $\tau = \text{const}$ и используя (2.4) и (3.1). Оказывается, что

$$x = \frac{\tau}{\rho_0} - a \int_0^{\sigma} \sigma w (hz\sigma^2)^{-\gamma/\gamma-1} d\sigma, \quad (3.5)$$

$$t = \left(e^{\frac{\tau}{a\rho_0}} - 1 \right) b - e^{\frac{\tau}{a\rho_0}} b \int_0^{\sigma} (hz\sigma^2)^{-\gamma/\gamma-1} d\sigma.$$

При этом использовано то обстоятельство, что на ударной волне $\tau = \rho_0 x$ и $1 + t/b = \exp(\tau/a\rho_0)$. Полагая в (3.5) $\tau = 0$, найдем траекторию поршня. Обозначим координаты предельной точки M_* на поршне через x_* , t_* . Полагая, далее, в (3.5) $\sigma = \sigma_*$ и меняя τ от 0 до ∞ , получим в параметрическом виде уравнение предельной линии в плоскости (x, t) . Исключая τ , будем иметь

$$x = a \ln \frac{t+b}{t_*+b} + x_*. \quad (3.6)$$

Можно показать, что ударная волна (2.1) и предельная линия (3.6) не пересекаются. Докажем, что (3.6) является $C+$ -характеристикой, т.е. вдоль нее $dx/dt = u+c$ ($c = \sqrt{\gamma p \rho^{-1}}$ -

скорость звука). Действительно, из (2.2) следует, что вдоль C_+ -характеристики

$$d\xi = (u - c\gamma^{-1}) d\tau = \frac{a}{b} (\omega + \sqrt{\lambda z}) \sigma e^{-\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} d\tau = -\frac{a}{b} \sigma_* e^{-\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} d\tau,$$

поскольку на предельной линии $(1 + \omega_*)^2 = \lambda z_*$ и $\omega_* < -1$. Сравнение с равенством (2.4), связывающим σ , ξ и τ , показывает, что линия (3.6) в каждой своей точке касается выходящей из этой точки C_+ -характеристики. Следовательно, линия (3.6) является C_+ -характеристикой, выходящей из точки M_* .

Поскольку задача о продолжении решения через характеристику решается неоднозначным образом, имеем следующий результат: задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну (2.1), движущуюся в покоящемся газе с параметрами $p_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$ при $a > 0$, $b > 0$ имеет бесчисленное множество решений.

Во втором случае, когда $a < 0$, $b < 0$, движению вдоль траекторий частиц газа от ударной волны в направлении $dt > 0$ соответствует перемещение по интегральной кривой (3.4) из точки $\omega = +\infty$, $z = +\infty$ в направлении $d\omega < 0$ (в этом случае $\sigma > 0$). Анализ поля интегральных кривых уравнения (3.1) показывает, что при таком перемещении мы неизбежно придем в точку $z = \omega = 0$. В этом случае задача имеет единственное решение. Все частицы газа (как и ударная волна) уходят в бесконечность за конечный промежуток времени, различный для различных частиц. Если T_τ - время ухода произвольной частицы $\tau = \text{const}$ в бесконечность, то можно показать, используя (3.5), что

$$T_\tau = T_0 + (e^{\frac{\tau}{\alpha\rho_0}} - 1)(b + T_0) < T_0 = -\frac{\gamma + 1}{2} b h_0, \quad h_0 = \int_0^\infty (h z \sigma^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} d\sigma,$$

где T_0 - время ухода поршня в бесконечность.

4. Пусть в области $x > 0$ находится покоящийся газ, давление которого равно нулю, плотность ρ_0 постоянна. В момент $t = 0$ в область, занятую газом, начинает двигаться ударная волна по экспоненциальному закону $x = a(e^{t/b} - 1)$, где a и b - постоянные, имеющие размерности длины и времени соответственно. Требуется определить движение поршня, порож-

дающего эту волну, и течение газа в области между поршнем и волной.

Решение поставленной задачи ищем в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} u = U = \frac{\tau + \alpha \rho_0}{b \rho_0} F(\sigma), \quad v = \rho_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\tau + \alpha \rho_0}{b \rho_0} \right)^{\frac{2(\gamma - 1)}{\gamma}} \Phi(\sigma) h \\ f(\tau) = \rho_0 \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\tau + \alpha \rho_0}{b \rho_0} \right)^{2/\gamma} H, \quad \sigma = \frac{b \rho_0 \xi}{(\tau + \alpha \rho_0)^2}, \quad F = \sigma w, \quad \Phi = \sigma^2 z \end{aligned} \right\} (4.1)$$

Здесь используются принятые ранее обозначения. Подстановка в (2.3) приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dw} = z \frac{2\alpha z + 4(\alpha - 2) + (3\alpha - 8)w - 2w^2}{(\alpha z - w - w^2)(w + 2)}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(w + 2)^2 - \alpha z}{(\alpha z - w - w^2)(w + 2)}, \\ \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1 - \alpha)}{2\alpha} \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} (4.2)$$

Траектории частиц газа в плоскости (x, t) определяются равенствами

$$x = \frac{\tau + \alpha \rho_0}{a \rho_0} a \int_0^\sigma \sigma w (h z \sigma^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} d\sigma + \frac{\tau}{\rho_0}, \quad t = b h \frac{\tau + \alpha \rho_0}{a \rho_0} b \int_0^\sigma (h z \sigma^2)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} d\sigma \quad (4.3)$$

Анализ уравнений и условий (4.2) приводит к следующему результату:

при $a < 0$, $b < 0$, т.е. при $\sigma < 0$, двигаясь по интегральной кривой, удовлетворяющей условиям (4.2), из точки $w = -\infty$, $z = +\infty$, мы неизбежно пересечем параболу $\alpha z = (w + 2)^2$ в некоторой точке $M(w_*, z_*)$, причем $w_* < -2$. Эта точка является образом предельной линии L течения в плоскости (x, t) .

Полагая в (4.3) $\sigma = \sigma_* = \sigma(w_*)$ и исключая τ , найдем уравнение этой линии

$$x = x_* + (a + x_*) \left(e^{\frac{t-t_*}{b}} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Нетрудно доказать, что линия (4.4) и ударная волна не пересекаются и что (4.4) является C_+ -характеристикой течения. Следовательно, при $a < 0$, $b < 0$ задача о нахождении движения поршня, порождающего ударную волну $x = a(e^{t/b} - 1)$, которая движется в покоящемся газе с параметрами $p_0 = 0$, $\rho_0 = \text{const}$, имеет бесчисленное множество решений.

При $a > 0$, $b > 0$ ($\sigma > 0$), двигаясь по интегральной кривой из точки $w = z = +\infty$, мы неизбежно приходим в точку $w = z = 0$, и задача имеет единственное решение.

5. Пусть в области $x > 0$ находится покоящийся газ, давление которого равно нулю, а плотность ρ распределена по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 \exp(x/a)$, где ρ_0 и a — постоянные, имеющие размерности плотности и длины соответственно. В момент $t = 0$, в область, занятую газом, начинает двигаться по линейному закону $x = U_0 t$ ($U_0 = \text{const}$) ударная волна. Для нахождения движения поршня, порождающего эту ударную волну, будем искать решение системы (2.3) в виде:

$$\left. \begin{aligned} u = U = U_0 F(\sigma), \quad v = \left(\frac{\tau + a\rho_0}{a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} U_0^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}} \Phi(\sigma) h, \quad F = \sigma w, \quad \Phi = \sigma^2 z \\ f(\tau) = \left(\frac{\tau + a\rho_0}{a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} U_0^{\frac{2}{\gamma}} H, \quad \sigma = \frac{\xi}{(\tau + a\rho_0)H} \end{aligned} \right\} (5.1)$$

Соответствующая система уравнений такова:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dw} = z \frac{2dz + (\alpha-2)w - 2w^2}{(\alpha z - w - w^2)(w+1)}, \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{(w+1)^2 - \alpha z}{(\alpha z - w - w^2)(1+w)} \\ \frac{z}{w^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sigma w \rightarrow \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Исследование задачи (5.2) показывает, что при $a > 0$ (т.е. при $\sigma > 0$) задача имеет единственное решение (движение по

интегральной кривой (5.2) из точки $w=z=+\infty$ приводит в начало координат). При $a < 0$, двигаясь по интегральной кривой из точки $w=-\infty, z=+\infty$, мы приходим в некоторую точку $M(w_*, z_*)$, расположенную на параболе $(w+1) = \alpha z$. Эта точка является образом предельной линии L течения в плоскости (x, t) . Можно доказать, что эта линия является прямой, параллельной линии $x = U_0 t$, и одновременно является C_+ -характеристикой. Следовательно, при $a < 0$ поставленная выше задача имеет бесчисленное множество решений.

Л и т е р а т у р а

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1965. 2. Крашениникова Н.Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. - "Изв. АН СССР, ОТН", 1955, №8. 3. Григорян С.С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). - ПММ, Т 22, вып. 2, 1958. 4. Гродзовский Г. Л., Крашениникова Н.Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по покоящемуся газу. - ПММ, Т. 23, Вып. 5, 1959. 5. Rangarao M.P., Purohit S.C. A selfsimilar piston problem. - "Journ.Eng.Math", 1971, т. 5, № 4. 6. Райзер Ю.П. Распространение ударной волны в неоднородной атмосфере в сторону уменьшающейся плотности. ЖПМТФ. 1964, № 4. 7. Можилкин В.В., Фалькович С.В. Распространение ударных волн в среде с экспоненциальной плотностью. - "Изв. АН СССР, МЖГ." 1970, №6. 8. Устинов М.Д. Некоторые аналитические решения уравнений одномерного движения газа и их приложения. - "Изв. АН СССР, МЖГ". 1973, №2. 9. Устинов М.Д. Преобразование и некоторые решения уравнений движения идеального газа. - "Изв. АН СССР, МЖГ". 1966, №3. 10. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем. М., 1966.

Р.В. Шаймуратов

К РАСЧЕТУ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА ЖИДКОСТЕЙ В СИСТЕМЕ СКВАЖИН

Из-за больших трудностей, возникающих при точном решении системы дифференциальных уравнений, которые описывают вытеснение нефти водой при площадном заводнении пласта, в на-

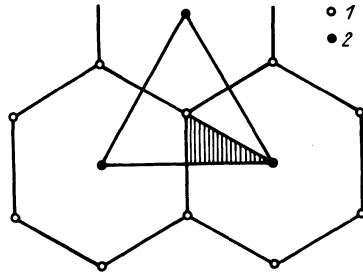
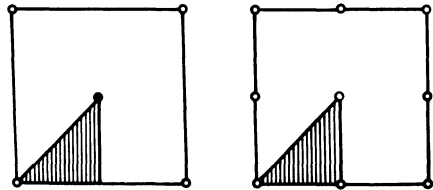


Рис. 1. Схема размещения скважин:

1--эксплуатационные скважины; 2-- нагнетательные.



стоящее время широко используются приближенные методы расчета, содержащие ряд допущений и недостаточно полно учитывающие образование зоны двухфазного течения. В связи с этим определенный практический интерес представляет численное решение такого рода задач с учетом различия физических свойств фильтрующихся жидкостей и геометрии потока в системе скважин. При этом последнее принимается во внимание из-за симметрии в расположении скважин при площадном заводнении пласта. Действительно, при четырех-, пяти-, семи- или девятиточечной системе размещения скважин достаточно выделить общий элемент области фильтрации в виде прямоугольного треугольника (рис. 1), которым можно покрыть все поле течения, и определить характеристики фильтрационного потока в этом элементе для построения общей картины движения жидкостей.

Рассмотрим неограниченный тонкий горизонтальный пласт единичной мощности с постоянными проницаемостью k и пористостью m . Пласт вскрыт равномерной пятиточечной системой скважин. Общим элементом области фильтрации является равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины острых углов которого совпадают с центрами эксплуатационной и нагнетательной скважин.

Считаем, что заполняющие поровой объем пласта жидкости несжимаемы и не смешиваются между собой, в начальный момент времени $t = 0$ пласт полностью занят нефтью и связан-

ной водой, все скважины включаются в работу одновременно, при $t > 0$ в нагнетательные скважины закачивается вода с дебитом $q(t)$.

Приведем алгоритм численного решения дифференциальных уравнений, описывающих процесс вытеснения нефти водой в общем элементе поля течения с учетом геометрии потока, свойств фильтрующихся жидкостей (вязкостей, фазовых проницаемостей, капиллярного давления), граничных и начальных условий до и после прорыва воды в эксплуатационную скважину.

Пользуясь законом Дарси, зависимостью капиллярного давления $p_k(\rho) = p_n - p_v$ от насыщенности и уравнениями неразрывности, имеем следующую систему уравнений (1):

$$\nabla \left(k \frac{F_v}{\mu_v} \nabla p_v \right) = m \frac{d\rho}{d\rho_k} \left(\frac{\partial p_n}{\partial t} - \frac{\partial p_v}{\partial t} \right), \quad (1)$$

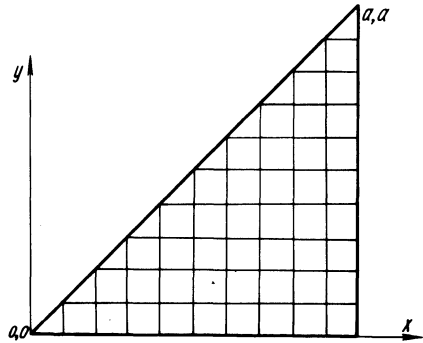
$$\nabla \left(k \frac{F_n}{\mu_n} \nabla p_n \right) = -m \frac{d\rho}{d\rho_k} \left(\frac{\partial p_n}{\partial t} - \frac{\partial p_v}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Здесь $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$ - оператор Гамильтона; $F_n(\rho)$, $F_v(\rho)$ - относительные проницаемости соответственно для нефти и воды; μ_n , μ_v - вязкости нефти и воды; $p(x, y, t)$, $p_n(x, y, t)$ - давления в нефтяной и водяной фазах; $\rho(x, y, t)$ - насыщенность породы водой.

Согласно симметрии в расположении скважин, границы вне скважин, данные уравнениями: $y=0$, $x=a$ и $x=y$, являются непроницаемыми для обеих фаз (рис.2). Нагнетание воды с переменным дебитом в скважину-точку $(0,0)$ учитывается добавлением члена $8' \frac{q_{v,0,0,n}}{\Delta x \Delta y}$ к левой части конечно-разностного аналога дифференциального уравнения (1). Здесь $q_{v,0,0,n}$ - объемный дебит воды, отнесенный к единичной мощности пласта за интервал времени Δt_n ; Δx , Δy - шаги сетки по осям x и y . Коэффициентом "8" вводится восьмикратная симметрия поля течения. Поток нефти в точке $(0,0)$ отсутствует.

Аналогично учитывается граничное условие в точке извлечения нефти (a, a) до прорыва воды в эксплуатационную скважину. Это достигается добавлением члена $q_{n,a,a,n} / \Delta x \Delta y$ к левой части конечно-разностного аналога дифференциального уравнения (2), где $q_{n,a,a,n}$ - объемный дебит нефти, отнесенный к единичной мощности пласта за время Δt_n . Поток жид-

Рис. 2. Основной элемент области фильтрации при пятиточечной системе размещения скважин.



кости, нагнетаемый в пласт, считается положительным, извлекаемый из пласта – отрицательным. Отметим, что до прорыва воды $q_{н, a, a, n} = q_{в, 0, 0, n}$.

После прорыва воды в точке (a, a) одновременно отбираются нефть и вода. На основании известных теоретических исследований и ряда промысловых экспериментов можно положить, что жидкости в этой точке извлекаются согласно отношению их подвижностей, т.е.

$$\frac{q_{н, a, a, n}}{q_{в, a, a, n}} = \frac{\mu_{в}}{\mu_{н}} \frac{F_{н, a, a, n}}{F_{в, a, a, n}} . \quad (3)$$

Далее из уравнения материального баланса с учетом несжимаемости жидкостей имеем

$$q_{в, 0, 0, n} = q'_{н, a, a, n} + q'_{в, a, a, n} . \quad (4)$$

Таким образом, согласно (3) и (4) граничное условие на эксплуатационной скважине после прорыва воды учтется добавлением членов $8 q'_{в, a, a, n} / \Delta x \Delta y$, $- 8 q'_{н, a, a, n} / \Delta x \Delta y$ соответственно к левым частям конечно-разностных аналогов уравнений (1) и (2).

В начальный момент времени распределение насыщенности и, следовательно, давления в обоих фазах принимаются постоянными.

Известны следующие экспериментальные данные о фазовых проницаемостях и капиллярном давлении, представленные в виде функциональной зависимости.

$$F_H = \left(\frac{0,9 - \rho}{0,8} \right)^3 ; \quad F_B = \left(\frac{\rho - 0,1}{0,8} \right)^3 ; \quad (5)$$

$$P_K = \sigma \cos \theta \varphi(\rho) \sqrt{\kappa / m} , \quad (6)$$

где $\varphi(\rho) = 0,3 \sqrt{\ln \frac{0,9}{\rho}}$ - безразмерная функция капиллярного давления; σ - коэффициент межфазного натяжения; θ - краевой угол между жидкостями и породой.

Складывая и вычитая уравнения (1) и (2) и вводя новые функции

$$M = \kappa \left(\frac{F_H}{\mu_H} + \frac{F_B}{\mu_B} \right) ; \quad (7)$$

$$N = \kappa \left(\frac{F_H}{\mu_H} - \frac{F_B}{\mu_B} \right) ,$$

зависимые переменные

$$U = \frac{1}{2} (P_H + P_B) ; \quad (8)$$

$$V = \frac{1}{2} (P_H - P_B) = \frac{1}{2} P_K$$

и безразмерные величины

$$\bar{x} = x/a ; \quad \bar{y} = y/a ; \quad \bar{t} = t q_{B\alpha, \alpha, n} / 4 m a^2 ;$$

$$\bar{M} = M \mu_B / \kappa , \quad \bar{N} = N \mu_B / \kappa ; \quad (9)$$

$$\bar{u} = u \omega_n , \quad \bar{v} = v \omega_n , \quad \omega_n = \kappa / 100 \mu_B q_{B\alpha, \alpha, n} ;$$

$$\bar{q}'_{B\alpha, \alpha, n} = \frac{q'_{B\alpha, \alpha, n}}{q_{B\alpha, \alpha, n}} ; \quad \bar{q}'_{H\alpha, \alpha, n} = \frac{q'_{H\alpha, \alpha, n}}{q_{B\alpha, \alpha, n}} ;$$

$$\bar{q}_{n1,1,n} = \frac{q_{na,a,n}}{q_{b,a,n}},$$

получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно \bar{u} и \bar{v}

$$\left. \begin{aligned} A[\bar{u}, \bar{v}] &\equiv \nabla(\bar{M} \nabla \bar{u}) + \nabla(\bar{N} \nabla \bar{v}) = 0; \\ B[\bar{u}, \bar{v}] &\equiv \nabla(\bar{N} \nabla \bar{u}) + \nabla(\bar{M} \nabla \bar{v}) + \lambda \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $\lambda = \mu_b q_{b0,a,n} / \sqrt{km} \sigma \cos \theta$.

Запишем граничные условия в новых переменных.

Условия непроницаемости границ $\bar{y}=0$, $\bar{x}=1$, $\bar{x}=\bar{y}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=1} = 0; \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} = 0; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{n}} \Big|_{\bar{x}=\bar{y}} = 0; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{n}} \Big|_{\bar{x}=\bar{y}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где \bar{n} - нормаль к линии $\bar{x}=\bar{y}$.

Условия в точке нагнетания (0,0):

$$\left. \begin{aligned} A[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{y}=0}} + 8\lambda \bar{q}_{b0,a,n} = 0; \\ B[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{y}=0}} - 8\lambda \bar{q}_{b0,a,n} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\lambda = 1/100$ $\Delta \bar{x}$ $\Delta \bar{y}$.

Условия в точке извлечения (1,1) до прорыва воды:

$$\left. \begin{aligned} A[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=1 \\ \bar{y}=1}} - 8\lambda \bar{q}_{n1,1,n} = 0; \\ B[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=1 \\ \bar{y}=1}} - 8\lambda \bar{q}_{n1,1,n} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Условия в точке извлечения (1,1) после прорыва воды:

$$\left. \begin{aligned} A[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=1 \\ \bar{y}=1}} - \lambda = 0 ; \\ B[\bar{u}, \bar{v}] \Big|_{\substack{\bar{x}=1 \\ \bar{y}=1}} + \lambda (1 - 2\bar{q}_{n+1,1,n}^{-1}) = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Систему уравнений (10), (11) вместе с граничными и начальными условиями предполагается решить методом конечных разностей (2). Согласно этому методу область фильтрации (прямолинейный треугольник) покрываем сеткой, как это представлено на рис. 2. Пусть $\Delta \bar{x} = \Delta \bar{y} = h$ - шаг сетки по осям \bar{x} и \bar{y} , а $\Delta \bar{t} = l$ - шаг по оси \bar{t} . Для достаточно малых h и l разностные уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям (10), (11), имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 [\bar{u}_{i,j}, \bar{u}_{i-1,j}, \bar{u}_{i+1,j}, \bar{u}_{i,j-1}, \bar{u}_{i,j+1}; \\ \bar{v}_{i,j}, \bar{v}_{i-1,j}, \bar{v}_{i+1,j}, \bar{v}_{i,j-1}, \bar{v}_{i,j+1}] = 0 ; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\bar{v}_{i,j,n+1} = L_2 [\bar{u}_n, \bar{v}_n] / \alpha \frac{d\rho}{d\varphi} , \quad (17)$$

где L_1, L_2 - линейные операторы; $\frac{d\rho}{d\varphi}$ - переменный коэффициент.

Дифференцируя уравнение (6), получим зависимость $\frac{d\rho}{d\varphi}$ от ρ в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho}{0,15} \sqrt{\ln \frac{0,9}{\rho}} . \quad (18)$$

Уравнения (16), (17) для внутренних узлов сетки (i, j) рассматриваемой области в совокупности с разностными уравнениями для граничных узлов, полученными с учетом граничных условий (12 - 15), представляет замкнутую систему линейных алгебраических уравнений. Исходными данными для решения этой системы являются известные значения переменных на временном слое n ; результатом решения - ранее известные величины на слое $n+1$.

Одновременное решение уравнений (16), (17) относительно переменных \bar{u} и \bar{v} сопряжено с громоздкой вычислительной работой. Во избежание этого предлагается следующий метод, который значительно уменьшает объем вычислений.

1. По начальным данным водонасыщенности ρ_0 и экспериментальными зависимостями (5), (6) рассчитываются с помощью уравнений (7), (8), (9), (18) величины $\bar{M}(\rho_0)$, $\bar{N}(\rho_0)$, $\bar{v}(\rho_0)$ и $\frac{d\rho}{d\varphi} / \rho = \rho_0$.

2. Решается система уравнений (16) вместе с дополнительными условиями для определения дискретных значений $\bar{u}_{i,j;0}$ в начальный момент времени.

3. Используя данные пункта 2, решается система уравнений (17) вместе с дополнительными условиями для нахождения величин $\bar{v}_{i,j;1}$ в момент времени Δt .

4. Используя соотношения (8), (9) и результаты решения пункта 3, находим величину водонасыщенности в каждом узле $\rho_{i,j;1}$ в момент времени Δt . Затем весь расчет повторяется для следующего интервала времени до тех пор, пока не будет достигнут заданный предел обводнения скважины (1,1) (например, обводненность нефти 50%). При достижении заданной обводненности расчет автоматически прекращается.

Изложенный алгоритм расчета процесса вытеснения нефти водой в системе скважин при площадном заводнении пласта позволяет учесть влияние свойств фильтрующихся жидкостей, геометрии потока и дает более полное описание процесса вытеснения. Так, например, в каждой точке пласта на различных стадиях вытеснения расчет дает не только распределение насыщенности (и, следовательно, давления) воды и нефти, но также направление, величину скоростей жидкостей и местные значения подвижностей.

Следует отметить, что девятиточечная система размещения скважин отличается от четырех-, пяти-, семиточечной систем тем, что основной элемент поля течения содержит две эксплуатационные и одну нагнетательную скважину. Поэтому при рассмотрении девятиточечной системы площадного заводнения необходимо наряду с граничными условиями вышеназванных систем учесть влияние второй эксплуатационной скважины на процесс фильтрации. Решение же задачи о фильтрации жидкостей при четырехточечной схеме совпадает с решением семиточечной системы, если поменять местами эксплуатационные и нагнетательные скважины (рис. 1).

Л и т е р а т у р а

1. Douglas I., Peaceman D., Rachford H.A. Method for calculating multidimensional immiscible displacement. - "Petroleum transactions. AIME", 1956, v. 216. 2. Вахитов Г.Г. Эффективные способы решения задач разработки неоднородных нефтеводоносных пластов. М., 1963.

Ю.А. Кашин, Л.Б. Школьников

АНАЛИЗ РАБОТЫ ДЕЛИТЕЛЯ ПОТОКА

Рассматривается работа автоматического делителя потока, устройство и принцип работы которого состоят в следующем. Узел разветвления потока представляет собой камеру с подвижным поплавком (рис. 1). Жидкость, поступающая в камеру под давлением P_0 , протекает в левый и правый каналы, на входе в которые поддерживаются соответственно давления P_1 и P_2 . На поплавок, таким образом, при течении жидкости действуют силы, обусловленные переменным давлением по длине канала, а также силы вязкого трения потока о неподвижную поверхность поплавка. В зависимости от соотношения давлений при данном конструктивном исполнении камеры и поплавок последний занимает некоторое положение равновесия, при котором в левом и правом каналах устанавливаются расходы жидкости q_1 и q_2 . Считая, что $q_2 \neq 0$, обозначим отношение

$$\frac{q_1}{q_2} = k, \quad (*)$$

которое будем называть коэффициентом деления потока. При ином соотношении давлений положение поплавка будет таким, что расходы жидкости в каналах будут q_1' и q_2' , чему будет соответствовать коэффициент деления потока

$$k = \frac{q_1'}{q_2'}$$

Целью настоящего исследования является определение зависимости коэффициента деления потока от соотношения давлений

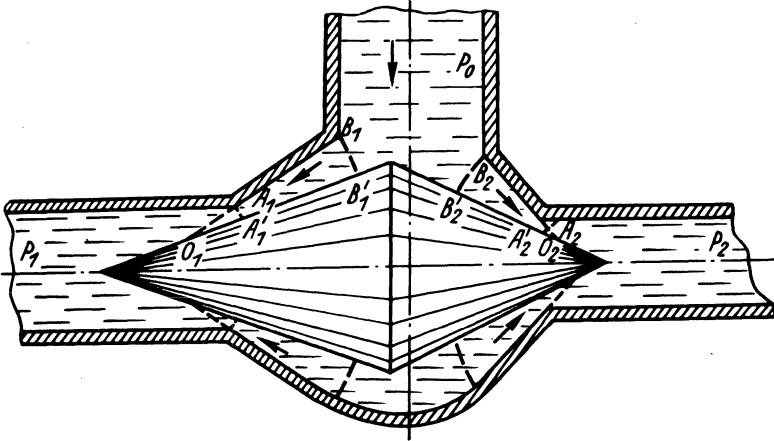


Рис. 1. Устройство делителя потока,

при различных конструктивных параметрах. В связи со сложностью решения уравнений Навье — Стокса в пространственном случае для получения качественной картины ограничимся рассмотрением плоского делителя. Считая, что падение давления $\Delta P_1 = P_0 - P_1$ происходит на участке $A_1 B_1 B'_1 A'_1$ и исходя из условия симметрии, рассмотрим течение жидкости именно на этом участке. При этом будем пренебрегать трением потока о поплавки за пределами рассматриваемого участка. Выбираем в качестве начала координат точку O (рис. 1) и направим ось Ox вдоль оси симметрии потока (рис. 2).

Полагая, что течение является радиальным и плоским, уравнение Навье — Стокса запишем в виде [1]

$$\left. \begin{aligned} \nu \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon^2} - \frac{v}{r} \right); \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \end{aligned} \right\} (1)$$

где $\nu = \mu \rho^{-1}$ — кинематический коэффициент вязкости; $\mu = \nu \rho$ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность; v — радиальная скорость.

Граничные условия для данной задачи будут: при $\varepsilon = \pm \alpha$ $V_r = 0$ и на оси симметрии (при $\varepsilon = 0$) $\frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} = 0$.

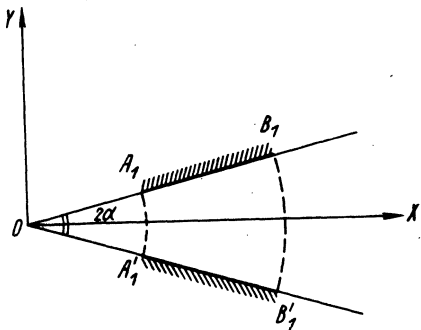


Рис. 2. К анализу течения в канале

Из условия несжимаемости, которое в данном случае имеет вид $\frac{\partial(rV)}{\partial r} = 0$

получаем
$$v = \frac{u(\varepsilon)}{r^2}. \quad (2)$$

Дифференцируя v и подставляя в (1), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{u^2 + \nu u''}{r^3}; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} &= 2\nu \frac{u^1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$u^1 = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}; \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial \varepsilon^2}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= - \frac{U^2 + \nu U''}{2r^2} + W_1(\varepsilon); \\ \frac{P}{\rho} &= \frac{2\nu U}{r^2} + W_2(r), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Преобразовав (4) и подставив его в уравнения (3), окончательно получим

$$\frac{P}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{W_3(\varepsilon)}{r^2} + W_1(\varepsilon).$$

Закключаем, представив $W_2(r) = \bar{W}_2(r) + W_1(\varepsilon)$

$$\frac{2\nu u}{r^2} + \bar{W}_2(r) = -\frac{1}{\rho} \frac{W_3(\varepsilon)}{r^2}$$

представив

$$\frac{W_3(\varepsilon)}{\rho} = 2\nu(u + \frac{a}{4})$$

окончательно имеем

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2\nu(u + \frac{a}{4})}{r^2} + c,$$

где "a" и "c" - const
или

$$P = 2\rho \frac{u}{r^2} + \frac{a\rho}{2r^2} + \frac{c}{\nu}. \quad (5)$$

Подставляя уравнение (5) в уравнение (4), получаем

$$U'' + 4U + \frac{U^2}{\nu} + a = 0. \quad (6)$$

Вводя число Рейнольдса

$$Re = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} U d\varepsilon = q\nu^{-1},$$

где q - расход потока, и следуя [2], подстановкой

$$U(\varepsilon) = qF(\varepsilon) \quad (7)$$

превратим уравнение (6) в безразмерное

$$F'' + 4F + Re \cdot F^2 + a = 0.$$

Для малых чисел Рейнольдса пренебрегаем влиянием слагаемого, содержащего Re

$$F'' + 4F + a = 0. \quad (8)$$

Граничными условиями для функции $F = E(\varepsilon)$ будут:

$$F(\pm\infty) = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon) d\varepsilon = 1.$$

Интегрируя (8), находим частное решение

$$F = \frac{\cos 2\varepsilon - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} . \quad (9)$$

Подставив это значение в (7) и учитывая (2), получим распределение скорости

$$V = \frac{q}{r} \frac{\cos 2\varepsilon - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} . \quad (10)$$

Полное давление, согласно теореме Бернулли, определяется равенством

$$P = 2 \int_0^{\alpha} \left(P + \frac{\rho v^2}{2} \right) r d\varepsilon .$$

Подставляя значение P из (5) в подынтегральное выражение и интегрируя, находим

$$P = \frac{\rho(4q + a\alpha + 2q^2 M)}{2r} + \frac{2cr\alpha}{\gamma} , \quad (11)$$

где

$$M = \frac{4\alpha - \sin 4\alpha - 8\alpha \cos 2\alpha + 8\alpha \cos^2 2\alpha}{8(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} .$$

Разлагая в ряд и удерживая первые члены, получаем для малых α

$$M \approx a_1 + b_1 \alpha^2 .$$

Постоянные C и q находим из условия при

$$r = r_1 ; P = P_1 ; r = R_1 ; P = P_0 ,$$

где

$$r_1 = OA_1 , \quad R_1 = OB_1 .$$

Используя эти условия, получаем

$$C = \frac{(P_0 R_1 - P_1 r_1) \mu}{2\rho\alpha (R_1^2 - r_1^2)} .$$

Исходя из физического смысла задачи

$$q = \frac{\sqrt{1 + MN} - 1}{M} , \quad (12)$$

$$N = \frac{2r_1 R_1 (P_1 R_1 - P_0 r_1) - a \rho \alpha (R_1^2 - r_1^2)}{2\rho (R_1^2 - r_1^2)} \quad (13)$$

Касательное напряжение на поверхности доплавка (при $\varepsilon = \alpha$)

$$\tau = -\nu \frac{\partial V}{r \partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon = \alpha},$$

т.е.

$$\tau = \frac{2\nu q}{R^2} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \approx \frac{\nu q}{R_1^2} \left(\frac{3}{2\alpha^2} - 1 \right).$$

Сила трения на поверхности $A'_1 B'_1$ находится как

$$T = b \int_{r_1}^{R_1} \tau dr.$$

Полагая ширину доплавка $b = 1$, находим силу трения, отнесенную к единице ширины доплавка

$$T = \nu q \frac{r_1 - R_1}{r_1 R_1} \left(\frac{3}{2\alpha^2} - 1 \right). \quad (14)$$

Аналогичные зависимости имеют место для доплавка и в правом канале. Для определения положения равновесия рассмотрим одновременное действие сил трения и гидростатического давления на доплавок.

С этой целью введем декартову систему координат, направив ось Ox вдоль оси симметрии доплавка и поместив начало координат в точку пересечения оси симметрии линией $A'_1 B'_1$. Определим абсциссу ξ_0 равновесного положения точки C , т.е. абсциссу наибольшего диаметра доплавка $2d$.

В наших обозначениях $O_1 A'_1 = O_1 A''_1 = r_1$; $O_1 B'_1 = O_1 B''_1 = R_1$, $O_2 A'_2 = O_2 A''_2 = r_2$; $O_2 B'_2 = O_2 B''_2 = R_2$.

Из очевидных геометрических соображений (рис. 3) находят-ся координаты точек

$$O_1 \left(\frac{\eta - \xi_0 \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \beta_1}; \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\eta - \xi_0 \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \beta_1} \right);$$

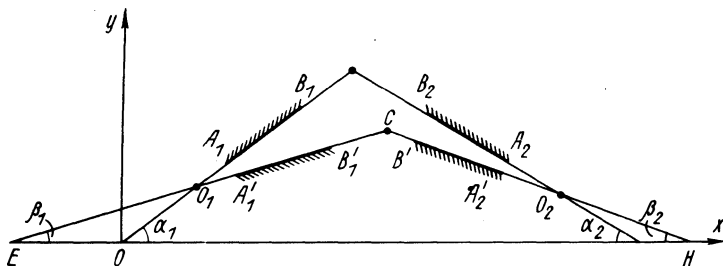


Рис. 3. К анализу равновесия поплавка.

$$O_2 \left(\frac{\eta - \xi_0 \operatorname{tg} \beta_2 + l \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \beta_2} ; \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\eta - \xi_0 \operatorname{tg} \beta_2 + l \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \beta_2} \right);$$

$$A_1 (X_{O_1} + r_1 \cos \beta_1 ; Y_{O_1} + r_1 \sin \beta_1) ;$$

$$A_2 (X_{O_2} - R_2 \cos \beta_2 ; Y_{O_2} + R_2 \sin \beta_2) ;$$

$$B_1 (X_{O_1} + R_1 \cos \beta_1 ; Y_{O_1} + R_1 \sin \beta_1) ;$$

$$Y_{B_2} = \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\eta - \xi_0 \operatorname{tg} \beta_1 + a \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \beta_2} + R_2 \sin \beta_2 .$$

Относя силы, действующие на поплавок, к его единичной ширине, имеем равнодействующую

$$\Phi = 2 \left[\int_{x_E}^{\xi_0} P \cdot \operatorname{tg} \beta_1 dx - \int_{\xi_0}^{x_H} P \cdot \operatorname{tg} \beta_2 dx - T_1 \cos \beta_1 + T_2 \cos \beta_2 \right] .$$

Считая, что пьезометрическое давление P сохраняет постоянные значения за пределами участка $A'_1 B'_1$ и $A'_2 B'_2$ и изменяется согласно формуле (5), получаем

$$\Phi = \sin \beta_1 \cos \beta_2 \left(cd - \frac{a \rho d}{2 \xi_0 \operatorname{tg} \beta_1 - 2d \xi_0} - \frac{d}{\operatorname{tg} \beta_1} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\sin\beta_2 \cos\beta_2 \left[\frac{a \beta_2 \xi_0 - e^{-\frac{d}{\operatorname{tg}\beta_1}}}{2} + 2\xi_0 - e^{-\frac{d}{\operatorname{tg}\beta_1}} \right] + \operatorname{tg}\beta_2 c x \\
& x \left(e^{-2\xi_0 + \frac{d}{\operatorname{tg}\beta_1}} \right) + \nu q \left(\frac{3}{2\alpha^2} - 1 \right) \left[\frac{r_2 - R_2}{r_2 R_2} \cos\beta_2 - \right. \\
& \left. - \frac{r_1 - R_1}{r_1 R_1} \cos\beta_1 \right] .
\end{aligned}$$

В положении равновесия, т.е. при $\Phi = 0$, находим положение точки ξ_0 . Подставляя это значение в выражение (12), определяем значения расхода в левой и правой ветвях потока q_1 и q_2 . Их отношение согласно (*) и будет определять коэффициент деления потока при данных параметрах.

Л и т е р а т у р а

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1973.
2. Рауз Х. Механика жидкости. М., 1967.

В.П. Ставров, В.И. Титенок

К РАСЧЕТУ ДИАГРАММ РАСТЯЖЕНИЯ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Прогнозированию свойств композитных материалов посвящено значительное число работ [1 - 3]. Наиболее изучены упругие свойства композитного материала в зависимости от свойств компонентов. Для решения этой задачи используются, как правило, континуальные модели. Анализ прочности проводится на дискретных моделях [4]. В настоящей работе простейшая статистическая (континуальная) модель, учитывающая хрупкие разрушения в структуре, применяется для построения диаграмм деформирования хаотически армированного композитного материала, расчета предела прочности и меры микроповрежденности при одноосном растяжении.

Рассмотрим одноосное растяжение вдоль оси x тела (образца) из двухкомпонентного хаотически армированного (изотропного) материала. Пусть модули упругости материала, отнесенные к элементам структуры, — статистически однородные и эргодические случайные поля. Напряжения и деформации, отнесенные к элементам структуры материала, также случайные поля, характеристики распределения которых находятся в результате решения статистических краевых задач теории упругости [5 - 8]. По известному распределению напряжений строятся статистические критерии хрупкого разрушения [9]. При нормальном распределении напряжений в компоненте k ($k = 1, 2$) с параметрами $P_{11,k}$ и $\sqrt{D_k}$, согласно С.Д. Волкову [9], ответственными за разрушение в элементах структуры становятся растягивающие напряжения. Вероятность разрушения компонента вычисляем по формуле

$$Q_k = \frac{1}{2} + \Phi \left(\frac{P_k^* - P_{11,k}}{\sqrt{D_k}} \right), \quad (1)$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа; P_k^* — предел прочности при растяжении компонента k .

Величина Q_k представляет собой долю разрушенных элементов структуры компонента k . В дальнейшем будем полагать, что разрушенный элемент структуры полностью теряет несущую способность, т.е. анизотропию сопротивления элемента с трещиной учитывать не будем. Если P_1 и P_2 — объемные доли компонентов в материале, то по формуле полной вероятности найдем меру поврежденности материала:

$$Q = P_1 Q_1 + P_2 Q_2. \quad (2)$$

Доля прочных элементов структуры компонента k равна

$$P'_k = P_k (1 - Q_k). \quad (3)$$

Разрушение части элементов структуры приводит к перераспределению напряжений. Это можно учесть, построив решение статистической краевой задачи теории упругости для среды с повреждениями. Ниже строится решение такой задачи по методу, аналогичному методу "упругих решений" в теории малых упругопластических деформаций [10]. Согласно этому методу в произвольном приближении i имеем статистическую краевую задачу:

$$\nabla \xi^{(i)} = 0; \varepsilon^{(i)} = \text{def } \chi^{(i)}; \xi^{(i)} = \Theta^{(i)} \cdot \varepsilon^{(i)}; u_{1/s} = e \cdot l. \quad (4)$$

Здесь $\xi^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)}$, $\chi^{(i)}$ - случайные напряжения, деформации и перемещения; $u = \langle \chi \rangle$; $e = \langle \varepsilon \rangle$; $\langle \dots \rangle$ - оператор математического ожидания; l - длина тела (образца); $\Theta^{(i)}$ - случайные модули упругости, отнесенные к элементам структуры:

$$\Theta^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^2 C_k \lambda_k(x) - \sum_{k=1}^2 C_k \lambda_k^*(i), \quad (5)$$

где $\lambda_k(x)$ - индикаторная функция подмножества точек компонента k ; C_k - модули упругости компонента k ; $\lambda_k^*(i)$ - индикаторная функция подмножества точек разрушенных элементов структуры компонента k ; $\langle \lambda_k \rangle = P_k$; $\langle \lambda_k^*(i) \rangle = \theta_k^{(i)}$. При $i=0$ имеем задачу для сплошной среды, в результате решения которой находятся величины $P_{11k}^{(0)}$, $D_{Q_k}^{(0)}$ и по формуле (1) вычисляется поврежденность Q_k .

Система (4) эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений относительно флуктуаций деформаций [5]:

$$\varepsilon^{o(i)}(x) = \text{def } \int_V G^{(i)}(x, x') (\nabla \Pi)' dV', \quad (6)$$

где $G^{(i)}(x, x')$ - тензор Грина (решение системы однородных уравнений для среды с модулями упругости $C^{(i)}$; $\Pi = C^{(i)} \cdot \varepsilon^{(i)} + \Delta^{(i)} \cdot \varepsilon^{o(i)} + \Delta^{(i)} \cdot \varepsilon^{o(i)}$; $C^{(i)} = \langle \Theta^{(i)} \rangle$; $\Delta^{(i)} = C^* \lambda^o + \Delta^{(i)}$; $C^* = C_1 - C_2$; $\lambda^o = \lambda_1 - P_1$; $\Delta^{(i)} = - \sum_{k=1}^2 C_k (\lambda_k^*(i) - \theta_k^{(i)})$; $\varepsilon^{o(i)} = \varepsilon^{(i)} - e^{(i)}$.

Решая систему (6) по методу последовательных приближений, в первом приближении имеем (индекс приближения опущен, поскольку в дальнейшем последующие приближения не вводятся):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{o(i)}(x) &= (\Phi^{(i)}(x) + \Psi^{(i)}(x)) \cdot e^{(i)}; \\ \Phi^{(i)}(x) &= \text{def } \int G^{(i)}(x, x') (\nabla C^* \lambda^o)' dV'; \\ \Psi^{(i)}(x) &= \text{def } \int G^{(i)}(x, x') (\nabla \Delta^{(i)})' dV'. \end{aligned} \quad (7)$$

При $i=0$ (для сплошной среды) $\psi^{(0)}(x)=0$. Заметим, что итерации по λ° и $\Delta^{(i)}$ строятся независимо, поэтому каждому $\Delta^{(i)}$ соответствует ряд по λ° . Выписанный выше (7) первый член этого ряда дает удовлетворительные результаты, если свойства компонентов отличаются несущественно и величины P_1, P_2 близки к 0,5. Он соответствует корреляционному приближению в терминах моментных функций.

На основании решения (7) получаем макроскопические модули упругости из соотношений

$$C_{\circ}^{(i)} = C^{(i)} + \langle \Delta^{(i)} \cdot (\Phi^{(i)} + \Psi^{(i)}) \rangle \quad (8)$$

и средние напряжения в компонентах по формулам [6]:

$$P_k^{(i)} = P_k^{(i)} + \langle \lambda_k^{\circ} \xi_k^{(i)} \rangle (P_k^{(i)})^{-1}. \quad (9)$$

Макроскопические модули объемной деформации и сдвига сплошной двухкомпонентной среды, вычисляемые на основании формулы (8), равны [11]:

$$K_{\circ} = K - \frac{K^{*2} P_1 P_2}{K + \frac{4}{3} G}; \quad G_{\circ} = G - \frac{2G^{*2}(K + 2G) P_1 P_2}{5G(K + \frac{4}{3} G)} \quad (10)$$

где $K = \sum_{k=1}^2 K_k P_k$; $G = \sum_{k=1}^2 G_k P_k$; $K^* = K_1 - K_2$; $G^* = G_1 - G_2$;
Здесь K_k, G_k - модули объемной деформации и сдвига компонентов.

С учетом повреждений в произвольном приближении получаем:

$$K_{\circ}^{(i)} = K^{(i)} - [K^{*2} P_1^{(i)} P_2^{(i)} + (K_1^2 P_1^{(i)} + K_2^2 P_2^{(i)}) Q^{(i)}] (K^{(i)} + \frac{4}{3} G^{(i)})^{-1}; \quad (11)$$

$$G_{\circ}^{(i)} = G^{(i)} - \frac{2}{5} (K^{(i)} + 2G^{(i)}) [G^{*2} P_1^{(i)} P_2^{(i)} + (G_1^2 P_1^{(i)} + G_2^2 P_2^{(i)}) Q^{(i)}] \times \\ \times (G^{(i)})^{-1} (K^{(i)} + \frac{4}{3} G^{(i)})^{-1},$$

где $K^{(i)} = \sum_{k=1}^2 K_k P_k^{(i)}$; $G^{(i)} = \sum_{k=1}^2 G_k P_k^{(i)}$;

$$P_k^{(i)} = P_k \prod_{j=1}^i (1 - Q_k^{(j)}); \quad Q^{(i)} = 1 - \sum_{k=1}^2 P_k^{(i)}.$$

Переход к модулям Юнга и коэффициентам Пуассона осуществляется по формулам:

$$E_{\circ}^{(i)} = \frac{9K_{\circ}^{(i)} G_{\circ}^{(i)}}{3K_{\circ}^{(i)} + G_{\circ}^{(i)}} ; \quad n_{\circ}^{(i)} = \frac{3K_{\circ}^{(i)} - 2G_{\circ}^{(i)}}{2(3K_{\circ}^{(i)} + G_{\circ}^{(i)})} . \quad (12)$$

Если нагружение производится по способу монотонного увеличения перемещений, то средние (и макроскопические) деформации e_{11} остаются в итерациях неизменными. Напряжения и поперечные деформации изменяются, поскольку изменяются макроскопические постоянные упругости $E_{\circ}^{(i)}$ и $n_{\circ}^{(i)}$:

$$P_{11}^{(i)} = e_{11} E_{\circ}^{(i)} ; \quad e_{22}^{(i)} = e_{33}^{(i)} = -n_{\circ}^{(i)} e_{11} . \quad (13)$$

Вычисления по формуле (9) дают следующие значения средних напряжений в компонентах:

$$P_{11,k}^{(i)} = P_{11}^{(i)} + (F_k' e_{\Delta\Delta}^{(i)} + 2F_k'' e_{11}^{(i)}) (P_k^{(i)})^{-1} ,$$

где $F_k' = (-1)^{k+1} (K^* - \frac{2}{3} G^*) P_1^{(i)} P_2^{(i)} + (K_k - \frac{2}{3} G_k) P_k^{(i)} Q^{(i)} - \frac{1}{15} \left\{ \left[(-1)^{k+1} K^* P_1^{(i)} P_2^{(i)} + K_k P_k^{(i)} Q^{(i)} \right] 15K^{(i)} - 4(K^{(i)} + 2G^{(i)}) \times \right.$

$$\left. \times \left[(-1)^{k+1} G^* P_1^{(i)} P_2^{(i)} + G_k P_k^{(i)} Q^{(i)} \right] \right\} (K^{(i)} + \frac{4}{3} G^{(i)})^{-1} ;$$

$$F_k'' = (-1)^{k+1} G^* P_1^{(i)} P_2^{(i)} + G_k P_k^{(i)} Q^{(i)} - \frac{2}{5} (K^{(i)} + 2G^{(i)}) \times$$

$$\left[(-1)^{k+1} G^* P_1^{(i)} P_2^{(i)} + G_k P_k^{(i)} Q^{(i)} \right] (K^{(i)} + \frac{4}{3} G^{(i)})^{-1} ;$$

$$e_{\Delta\Delta}^{(i)} = e_{11} + 2e_{22}^{(i)} .$$

Дисперсии напряжений в компонентах, вычисленные в корреляционном приближении, равны нулю. Это обусловлено тем, что неоднородность поля напряжений в компонентах вызывается более тонкими эффектами взаимодействия элементов структуры, чем эффекты, учитываемые корреляционными функциями. Введение моментных функций высших порядков с нелокальной координатной зависимостью существенно осложняет вычисления и приводит к интегралам, не выражающимся через элементарные функции. Пренебрежение координатной зависимостью дает тривиальный результат - нулевые дисперсии напряжений и деформаций в компонентах [7]. Поэтому в данной работе дисперсии

напряжений находятся на основании экспериментального изучения деформаций.

Распределение деформаций в компонентах исследовали на образцах двух типов: из эпоксидно-фурановой смолы (I тип) и резины (II тип) по методу сеток. Для образцов обоих типов подтвердилась гипотеза о нормальном распределении деформаций в компонентах при одноосном растяжении. Дисперсии деформаций (продольных и поперечных) в компонентах можно считать равными и независимыми от нагрузки. Коэффициенты корреляции между продольными и поперечными деформациями малы. На основании этих результатов дисперсии напряжений в компонентах записываем в виде:

$$D_k = \left[\left(K_k + \frac{4}{3} G_k \right)^2 + 2 \left(K_k - \frac{2}{3} G_k \right)^2 \right] D ,$$

где D - дисперсия деформаций.

Кроме того, ввиду линейной связи между напряжениями и деформациями в компонентах, принимаем нормальный закон распределения напряжений. Тогда, вероятность разрушения элементов структуры можно вычислить по формуле (1).

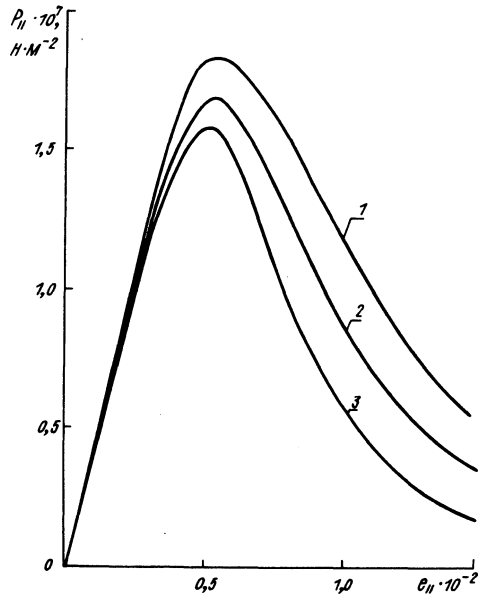
Дисперсии напряжений в компонентах считаем неизменными в каждом приближении. Физически это означает, что концентрация напряжений, обусловленная появлением трещин, не учитывается. Такое допущение, на первый взгляд, может показаться грубым, однако можно указать на процесс разрушения "перегруженных" элементов структуры, "выравнивающий" неоднородное поле напряжений.

Вычисления проводятся до тех пор, пока полученное значение $P_{11}^{(i)}$ будет отличаться от предыдущего не более чем на заданную малую величину. Сходимость последовательности приближений в общем случае не исследована, однако результаты проведенных расчетов показывают, что для некоторых материалов эта последовательность сходится достаточно быстро, и уже во втором приближении получаем напряжения $P_{11}^{(i)}$ с точностью не ниже 2%. Эти значения принимаем в качестве истинных напряжений, а величину $Q^{(i)}$ - в качестве меры микроповрежденности материала. В результате последовательного увеличения деформаций e_{11} (или перемещений u_1) образца строим диаграмму растяжения, выраженную зависимостью $P_{11}(e_{11})$. Наибольшее значение напряжений $P_{11\max} = P^*$ назовем макроскопическим пределом прочности при растяжении.

Поскольку "нагружение" осуществляется по мягкому способу (путем увеличения перемещений), то в результате вычисле-

Рис. 1. Диаграммы растяжения композитного материала:

1 - $D = 0,75 \cdot 10^{-6}$; 2 -
 $D = 1 \cdot 10^{-6}$; 3 - $D =$
 $= 1,4 \cdot 10^{-6}$.



ний удается построить участок диаграммы деформирования за пределом прочности и постепенно достичь $Q = 1$, при этом $P_{11} = 0$. Кроме того, ввиду единственности решения упругой задачи участок диаграммы растяжения до P^* должен быть одинаковым при нагружении по мягкому и по жесткому (путем увеличения напряжений) способам.

Вычисления проводили на ЭВМ "Мир-1" для материала со следующими свойствами компонентов: $E_1 = 6,6 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$; $E_2 = 2,85 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$; $n_1 = 0,32$; $n_2 = 0,3$; $P_1^* = 4 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2$; $P_2^* = 4,5 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2$. Эти постоянные характерны для эпоксидно-фурановой композиции, для которой экспериментально построено распределение деформаций в компонентах. Дисперсию деформаций принимали равной экспериментальному значению 10^{-6} , а также близкими к этому значениям. Кроме того, в расчетах варьировали свойства компонентов и их концентрацию.

Типичные диаграммы растяжения, вычисленные по изложенному методу, показаны на рис. 1. Зависимости микрповрежденности от истинных напряжений приведены на рис. 2. Макроскопический предел прочности P^* оказывается меньше предела прочности обоих компонентов (разброс прочности компонентов для исследуемого материала оценивается коэффициентом вариации 5 - 10% и при расчетах не учитывался). С увеличением дисперсии деформаций (и напряжений) прочность композиции

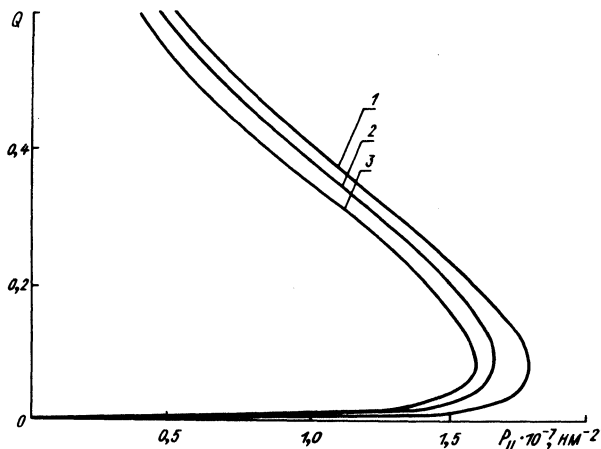


Рис. 2. Зависимость микроповрежденности от истинных напряжений:
 1 - $D = 0,75 \cdot 10^{-6}$; 2 - $D = 1 \cdot 10^{-6}$; 3 - $D = 1,4 \cdot 10^{-6}$.

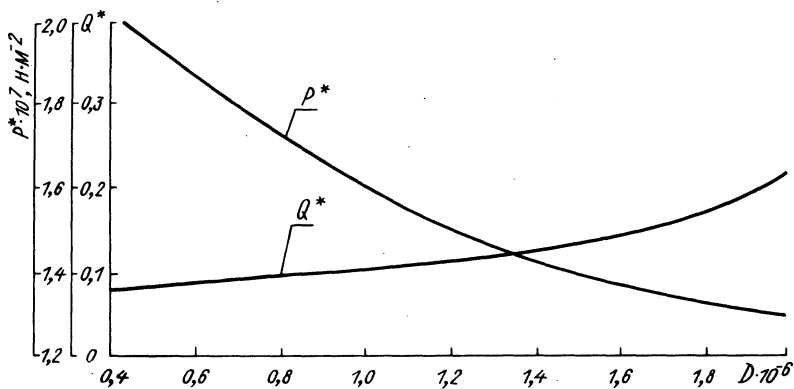


Рис. 3. Зависимость предела прочности при растяжении P^* и микроповрежденности Q^* от дисперсии деформаций.

уменьшается, а микроповрежденность композиции Q^* , соответствующая пределу прочности, увеличивается (рис.3). Увеличение прочности компонентов приводит к увеличению прочности композиции, однако микроповрежденность Q^* остается практически неизменной. Увеличение и уменьшение исходной концентрации компонентов от 0,5 увеличивает прочность композиции. Это, очевидно, связано с соотношениями упругих свойств

и прочности компонентов: в рассмотренном примере прочность наполнителя меньше прочности связующего, а коэффициент Пуассона больше, чем у связующего. Такое соотношение не характерно для высокопрочных композитных материалов. С *увеличением концентрации арматуры микроповрежденности Q несколько увеличивается.

Хотя компоненты материала предполагались линейно упругими до разрушения, диаграммы растяжения композиции (рис. 1) оказались нелинейными. Нелинейность зависимости $P(\epsilon)$ характерна для композитных материалов, в том числе с хрупкими компонентами. Проведенные вычисления наглядно показывают связь нелинейного поведения композитных материалов под нагрузкой с микроповреждениями в структуре, обусловленными ее неоднородностью.

Л и т е р а т у р а

1. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига, 1971.
2. Шермергор Т.Д. Модули упругости неоднородных материалов. - В сб.: Упрочнение металлов волокнами. М., 1973.
3. Розен Б., Фридман Э. Механика армированных материалов. - В сб.: Монокристалльные волокна и армированные ими материалы. М., 1973.
4. Немец Я., Серенсен С.В., Стреляев В.С. Прочность пластмасс. М., 1970.
5. Волков С.Д., Ставров В.П. О надежности конструкций из армированных пластиков. - В сб.: Применение полимерных материалов в машиностроении. Вып. 1. Киев, 1966.
6. Волков С.Д. и др. Начальные термоструктурные напряжения в двухкомпонентных средах. - ДАН СССР. Т. 183, вып. 1, 1968, № 53.
7. Хорошун Л.П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. - "Прикл. механика". 1967, т. 3, вып. 9.
8. Ломакин В.А. Статистические задачи механики деформируемых твердых тел. М., 1970.
9. Волков С.Д. Статистическая теория прочности. М., 1960.
10. Ильюшин А.А. Пластичность. М., 1948.
11. Кривоглаз М.А., Черевко А.С. Об упругих модулях твердой смеси. "Физика металлов и металловедение", 1959, т. 8, вып. 2.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ

Средние значения начальных (термоструктурных и усадочных) напряжений в компонентах хаотически и однонаправленно армированных материалов вычислены в работе [1]. Моментные функции свойств среды предполагались локальными. Это ограничение на координатную зависимость моментных функций упругих свойств композитного материала приводит к детерминированным значениям напряжений и деформаций в компонентах [2], что, как показывают эксперименты, не соответствует действительности. В настоящей работе статистическая краевая задача решается в реализациях, поэтому оказывается возможным построение закона распределения случайных напряжений в компонентах.

Композитный материал моделируется структурно-неоднородной средой, модули упругости $\nu(x)$ и коэффициенты линейного расширения $\alpha(x)$ которой (отнесенные к элементам структуры) - однородные и эргодические в объемах первого порядка малости (макрообъемах) случайные поля. Предполагается, что в пределах данного элемента структуры свойства постоянны.

Тогда

$$\nu(x) = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k(x); \quad \alpha(x) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k(x), \quad (1)$$

где c_k, a_k - модули упругости и коэффициенты линейного расширения компонента k ; n - число компонентов; $\lambda_k(x)$ - индикаторная функция подмножеств точек, принадлежащих компоненту k .

Рассмотрим статистическую краевую задачу термоупругости среды с модулями $\nu(x)$ при отсутствии объемных сил и при детерминированных перемещениях границы S тела V :

$$\nabla \xi = 0; \quad \varepsilon = \text{def } \chi; \quad \xi = \nu \cdot (\varepsilon - \alpha t); \quad \xi^0 / S = 0, \quad (2)$$

где ξ, ε, χ - случайные напряжения, деформации и перемещения; ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона; точки $\langle \dots \rangle$ означают свертывание тензоров; $\xi^0 = \chi - \langle \chi \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ - оператор математического ожидания; t - детерми-

нированная разность температур напряженного состояния и эксплуатации.

Если принять тензор Грина $G(x, x')$ уравнений (2) известным, то преобразуем систему (2) в систему интегро-дифференциальных уравнений относительно флуктуаций деформаций:

$$\varepsilon^{\circ}(x) = \text{def} \int G(x, x') \cdot (\nabla \cdot \Pi)^{\circ} dV' \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon^{\circ} = \varepsilon - e$; $e = \langle \varepsilon \rangle$; $\Pi = \Pi^* + \nu^{\circ} \dots \varepsilon^{\circ}$; $\nu^{\circ} = \nu - c$; $c = \langle \nu \rangle$; $\Pi^* = \nu \dots (e - \alpha t)$.

Если внешняя нагрузка отсутствует (рассматривается только поле начальных напряжений), то $e = a^{\circ} t$, где a° - тензор макроскопических коэффициентов линейного расширения. В дальнейшем эта величина предполагается известной [1]. Кроме того, в случае двухкомпонентной среды с изотропными компонентами

$$\Pi^* = R \lambda^{\circ}, \quad (4)$$

где $R = c^* \dots a^{\circ} - 3n^* E$; $c^* = c^I - c^{II}$; $n^* = k^I a^I - k^{II} a^{II}$; $E = (\delta_{ij}^I, k^I, k^{II}, a^I, a^{II})$ - модули объемной деформации и коэффициенты линейного расширения компонентов; $\lambda^{\circ} = \lambda - p$; $\lambda = \lambda_1$; $p = \langle \lambda \rangle$.

Решая систему (3) по методу последовательных приближений, в первом приближении полагаем:

$$\varepsilon_1^{\circ}(x) = \text{def} \int G(x, x') \cdot (\nabla \cdot \Pi^*)^{\circ} dV' \quad (5)$$

Так как при наложенных выше условиях среда макроскопически однородна, то интегрирование в (5) распространяется фактически на макроскопическую окрестность точки $M(x)$.

В работах [1 - 6], посвященных статистическим задачам механики композитных материалов, интегрирование по координатам осуществляется после применения оператора математического ожидания, т.е. некоторые моменты случайного поля состояния и свойств среды находятся путем действий над моментными функциями, задающими свойства. Ясно, что при переходе к моментным функциям теряется значительная часть информации о случайном поле свойств. Экспериментальное и аналитическое построение моментных функций - трудоемкий процесс [6, 7], не обеспечивающий необходимой точности, особенно для

моментных функций высших порядков. Вычисления для моментных функций, начиная уже с третьего порядка, оказываются громоздкими и далеко не всегда выполняются в элементарных функциях. Наконец, по результатам вычислений в моментных функциях (моментам распределения напряжений и деформаций) могут быть построены лишь приближенные законы распределения, причем для отдельных составляющих тензоров. Поэтому осложняется построение статистических критериев разрушения, учитывающих сложное напряженное состояние элементов структуры.

Перечисленных недостатков можно избежать, если воспользоваться переставимостью операторов интегрирования по координатам и по пространству реализаций (осреднения). Такая возможность обсуждалась в работе И.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга [8], однако для решения задачи, поставленной в этой работе (определение макроскопических модулей упругости), оказалось предпочтительным проводить вычисления в моментных функциях.

Пусть имеется некоторая реализация случайного поля структуры $\lambda_K(x)$ физических свойств $\nu(x)$ и $\alpha(x)$ композитного материала. Ей соответствует реализация $E_1(x)$ случайного поля флуктуаций деформаций $\varepsilon^O(x)$. Реализацию функции $\Pi^*(x)$ запишем в виде:

$$B(x) = \sum_i B^{(i)} h^{(i)}(x),$$

где $B^{(i)}$ - реализация $\Pi^*(x)$ при условии, что точка $M(x)$ принадлежит элементу структуры с номером i ; $h^{(i)}(x)$ - индикатор множества точек элемента i . Тогда на основании формулы (5) для реализации флуктуаций деформаций $\varepsilon_1^O(x)$ имеем:

$$E_1(x) = \text{def} \sum_i \int_V G(x, x') \cdot (\nabla \cdot B^{(i)} h^{(i)})' dV'.$$

Вводя тензор $A^{(i)} = \text{def} G(x, x') B^{(i)}$, преобразуем $E_1(x)$:

$$E_1(x) = \sum_i \int_V (\nabla h^{(s)})' A^{(i)'} dV' = \sum_i \int_V (\nabla \cdot A^{(i)} h^{(i)})' dV' - \sum_i \int_V (\nabla \cdot A^{(i)})' h^{(i)'} dV'.$$

Легко убедиться, что первая сумма в правой части равна нулю. Индикаторы $h^{(i)}(x)$ обращают интегралы второй суммы в интегралы по областям V_i , занимаемым элементами структуры:

$$E_1(x) = -\sum_i \int_{V_i} (\nabla \cdot A^{(i)})' dV_i' . \quad (6)$$

На основании формулы Остроградского-Гаусса

$$E_1(x) = -\sum_i \int_{S_i} (h^{(i)} \cdot A^{(i)})' dS_i' , \quad (7)$$

где интегралы берутся по поверхностям S_i , ограничивающим области V_i , $n^{(i)}$ -орты внешней нормали к поверхности S_i .

Учет последующих приближений в решении уравнения (3) не представляет принципиальных затруднений. Во втором приближении

$$\varepsilon_2^{\circ}(x) = \text{def} \int_V G(x, x') \cdot (\nabla \cdot \nu^{\circ} \cdot \varepsilon_1^{\circ})' dV' .$$

В отличие от $\Pi^*(x)$ реализации поля $\varepsilon_1^{\circ}(x)$ не постоянны в области V_S , поэтому в выражение для реализаций $\varepsilon_2^{\circ}(x)$ войдут слагаемые, содержащие производные $E_1(x)$ по координатам. Вычисление возможно численным интегрированием, объем вычислений при этом возрастает. Последующие приближения строятся аналогично.

Задание реализаций случайного поля $\Pi^*(x)$, а фактически полей $\nu(x)$ и $\alpha(x)$, осуществляется либо на основе экспериментальных данных, либо путем моделирования структуры материала на ЭВМ, причем ввиду эргодичности полей $\nu(x)$ и $\alpha(x)$ для решения задачи достаточно одной представительной реализации. Вычислив N реализаций $E_1(x)$ по формулам (6) или (7), нетрудно, пользуясь методами математической статистики, вывести закон распределения случайных деформаций и напряжений в компонентах. Применяемый здесь метод решения аналогичен методу статистических испытаний (методу Монте-Карло). По изложенному методу далее находится распределение начальных напряжений в однонаправленном композитном материале, состоящем из двух изотропных компонентов.

Для среды, армированной однонаправленными волокнами круглого сечения, выражение (7) содержит интегралы по контурам L_i элементов структуры (арматуры и связующего) в сечении, перпендикулярном волокнам:

$$E_{1j}(x) = -\sum_i \int_{L_i} (n^{(i)} \cdot A^{(i)})' dL_i' \quad (8)$$

Вычисление $E_{1j}(x)$ можно свести к интегрированию только по контурам кругов, образуемых сечениями армируемых волокон. Действительно, в случае двухкомпонентной среды согласно (4) $B^{(i)} = R(1-p)$, если i -ый элемент структуры относится к арматуре, и $B^{(i)} = -Rp$, если i -ый элемент структуры относится к связующему. Контуров области, занятой арматурой и связующим, отличаются лишь знаком внешней нормали. В результате суммирования в формуле (8) слагаемые, содержащие множитель p , уничтожаются, поэтому, переходя к компонентной форме записи, имеем

$$E_{ij}(x) = -\sum_k \frac{1}{2} \int_{L_k} \left(\frac{\partial G_{i\alpha}}{\partial x_i}(x, x') + \frac{\partial G_{j\alpha}}{\partial x_i}(x, x') \right) R_{\alpha\beta} n_{\alpha}^{(k)'} dL_k'$$

или иначе:

$$E_{ij}(x) = -\sum_k \frac{1}{2} (I_{ij\alpha\beta}^{(k)} + I_{ji\alpha\beta}^{(k)}) R_{\alpha\beta};$$

$$I_{ijmn} = -\sum_k \frac{1}{2} (I_{ijmn}^{(k)} + I_{jimn}^{(k)}).$$

Здесь

$$I_{ijmn} = \int_{L_k} \frac{\partial G_{im}}{\partial x_j}(x, x') n_n^{(k)'} dL_k',$$

где L_k - окружности радиуса r_k^* ; $dL_k = r_k^* d\varphi_k^*$; $n_n^{(k)}$ - косинусы углов между внешней нормалью к контуру и осями x_1, x_2 (ось x_3 совпадает с направлением армирования).

Компоненты тензора Грина $G(x, x')$ равны:

$$G_{ij}(x, x') = A \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + B \frac{(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{r^2} \quad (i, j = 1, 2);$$

$$G_{33}(x, x') = \frac{1}{2\pi d} \ln \frac{1}{r};$$

$$G_{ij}(x, x') = 0, \text{ если } i = 3, j = 1, 2 \text{ или } j = 3, i = 1, 2;$$

$$A = \frac{c + 3d}{4\pi d(c+2d)} ; B = \frac{-(c+d)}{4\pi d(c+2d)} ; r = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2} ,$$

где c, d - средние значения постоянных Ламе.

Здесь $d = d^I p + d^{II} (1-p)$; $c = c^I p + c^{II} (1-p)$; d^I, d^{II}, c^I, c^{II} - постоянные Ламе арматуры (I) и связующего (II).

Для вычисления начальных напряжений в арматуре и связующем потребуются не все компоненты тензора T_{ijmn}^k , поэтому сначала запишем выражения для напряжений, а затем вычислим входящие в него интегралы I_{ijmn}^k .

Реализация напряжений в арматуре и связующем на основании физических уравнений системы (2) равны $p_{ij}^s = (c_{ij\alpha\beta}^s a_{\alpha\beta}^o + c_{ij\alpha\beta}^s I_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\gamma\delta} - c_{ij\alpha\beta}^s a_{\alpha\beta}^s) t$.

Учитывая, что компоненты изотропны, и что для однонаправленно армированной (трансверсально изотропной) среды $a_{11}^o = a_{22}^o \neq a_{33}^o$, записываем отличные от нуля составляющие тензора p_{ij}^s :

$$p_{11}^s = \left\{ 2(l^s + m^s) a_{11}^o + m^s a_{33}^o + \left[(l^s + 2m^s) I_{11\alpha\alpha} + m^s I_{22\alpha\alpha} \right] \left[2(l^* + m^*) a_{11}^o + m^* a_{33}^o \right] - 3k^s a^s \right\} t ;$$

$$p_{22}^s = \left\{ 2(l^s + m^s) a_{11}^o + m^s a_{33}^o + \left[(l^s + 2m^s) I_{11\alpha\alpha} + m^s I_{22\alpha\alpha} \right] \left[2(l^* + m^*) a_{11}^o + m^* a_{33}^o \right] - 3k^s a^s \right\} t ;$$

$$p_{12}^s = m^s \left[I_{12\alpha\alpha} + I_{21\alpha\alpha} \right] \left[2(l^* + m^*) a_{11}^o + m^* a_{33}^o \right] t ;$$

$$p_{33}^s = \left\{ 2l^s a_{11}^o + (l^s + 2m^s) a_{33}^o + l^s (I_{11\alpha\alpha} + I_{22\alpha\alpha}) \times \left[2(l^* + m^*) a_{11}^o + m^* a_{33}^o \right] - 3k^s a^s \right\} t .$$

Таким образом, нужно вычислить лишь свертки тензоров. I_{11dd}, I_{22dd} и $\frac{1}{2} (I_{12dd} + I_{21dd})$. Положение круга k будем задавать в полярных координатах (в плоскости x_1, x_2) с центром в точке $M(x)$, величинами r_o^k и φ_o^k — координатами центра круга. Кроме того, для каждого круга задается радиус $r_*^{(k)}$.

Вычисления дают:

$$I_{11dd}^{(k)} = A\pi \frac{r_o^{(k)2} \cos 2\varphi_o^{(k)} + r_*^{(k)2}}{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}} + B\pi \left\{ \frac{r_o^{(k)2} \cos 2\varphi_o^{(k)} + r_*^{(k)2}}{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}} \times \right. \\ \times \frac{3r_*^{(k)2}}{-r_o^{(k)2}} - 4\cos^2\varphi_o^{(k)} \frac{r_*^{(k)4}(r_o^{(k)2} + r_*^{(k)2})}{(r_*^{(k)2} + r_o^{(k)2})^3} + \\ \left. + \cos 2\varphi_o^{(k)} \frac{2r_*^{(k)6} - r_*^{(k)2} r_o^{(k)2} (r_o^{(k)2} + r_*^{(k)2})}{(r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})^3} \right\};$$

$$I_{22dd}^{(k)} = A\pi \frac{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2} \cos 2\varphi_o^{(k)}}{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}} + B\pi \left\{ \frac{3r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}}{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}} \times \right. \\ \times \frac{\cos 2\varphi_o^{(k)}}{-r_o^{(k)2}} + \frac{4r_*^{(k)6} (r_*^{(k)2} + r_o^{(k)2}) (\cos 2\varphi_o^{(k)} - \sin^2\varphi_o^{(k)})}{r_*^{(k)2} (r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})} \times \\ \left. \times \frac{-2r_*^{(k)4} \cos 2\varphi_o^{(k)} (3r_*^{(k)4} + r_o^{(k)4})}{-r_o^{(k)2})^3} \right\};$$

$$\frac{1}{2} (I_{12dd}^{(k)} + I_{21dd}^{(k)}) = (A+B)2\pi \cos\varphi_o^{(k)} \sin\varphi_o^{(k)} \frac{r_o^{(k)2}}{r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2}} - \\ - B\pi \left[2\sin 2\varphi_o^{(k)} (\sin 2\varphi_o^{(k)} - \cos 2\varphi_o^{(k)}) - \cos^4\varphi_o^{(k)} - \right. \\ \left. - \sin^4\varphi_o^{(k)} \right] \frac{-(r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})^3 (3r_o^{(k)4} + 8r_o^{(k)2} r_*^{(k)2} + 3r_*^{(k)4})}{8r_o^{(k)4} (r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{+(r_*^{(k)2} + r_o^{(k)2})(-3r_o^{(k)4} + 10r_o^{(k)2}r_*^{(k)2} - 3r_*^{(k)4})}{-r_o^{(k)2})^3} + \\
& + 3 \left| \cos \varphi_o^{(k)} \sin \varphi_o^{(k)} \cos 2\varphi_o^{(k)} + \cos 4\varphi_o^{(k)} + \sin 2\varphi_o^{(k)} \right. \\
& \times \left. (1 + 2\cos^2 \varphi_o^{(k)}) \right] \frac{r_*^{(k)2} r_o^{(k)2} (2r_*^{(k)4} + 8r_o^{(k)2} - 2r_o^{(k)4})}{2r_o^{(k)2} (r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})^3} + \\
& + \left[\sin \varphi_o^{(k)} \cos \varphi_o^{(k)} (\cos \varphi_o^{(k)} \sin \varphi_o^{(k)} - \cos^2 \varphi_o^{(k)} - 1) \right] \times \\
& \times \left. \frac{2r_*^{(k)4} (r_o^{(k)2} + r_*^{(k)2})}{(r_*^{(k)2} - r_o^{(k)2})^3} \right\} .
\end{aligned}$$

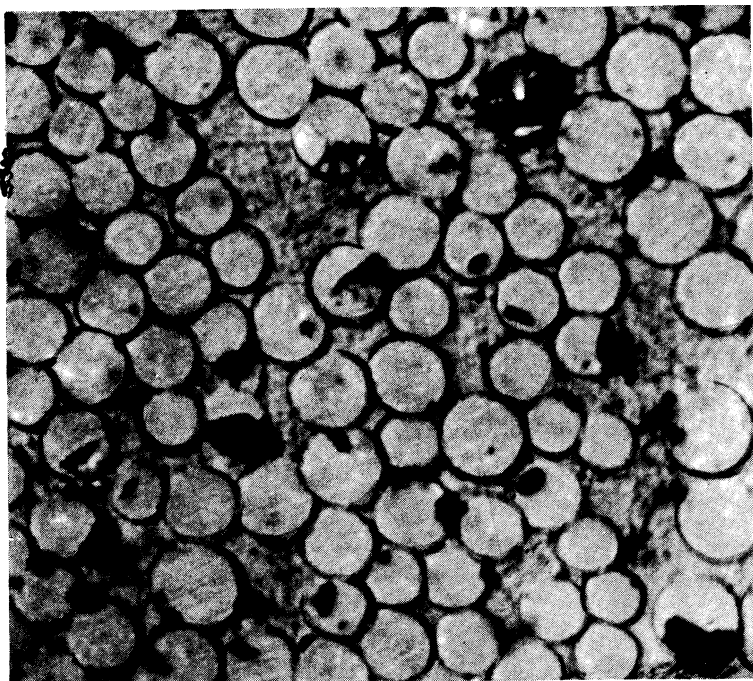


Рис. 1. Снимок микрошлифа однонаправленного стеклопластика при $t = 100^\circ \text{C}$.

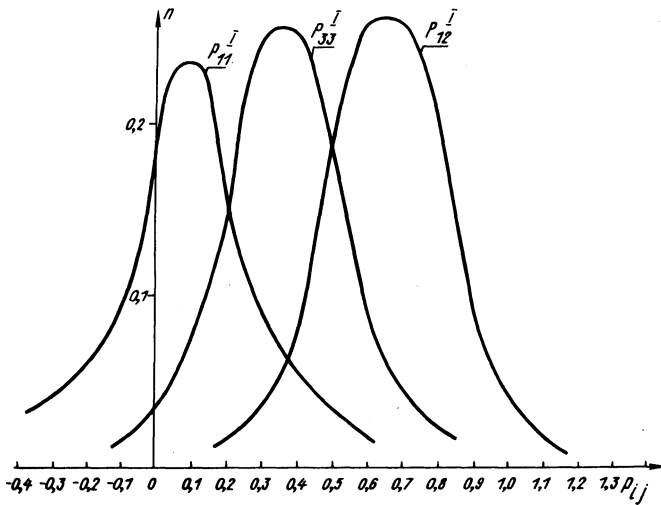


Рис. 2. Кривые распределения начальных напряжений при $t = 100^\circ\text{C}$ в арматуре.

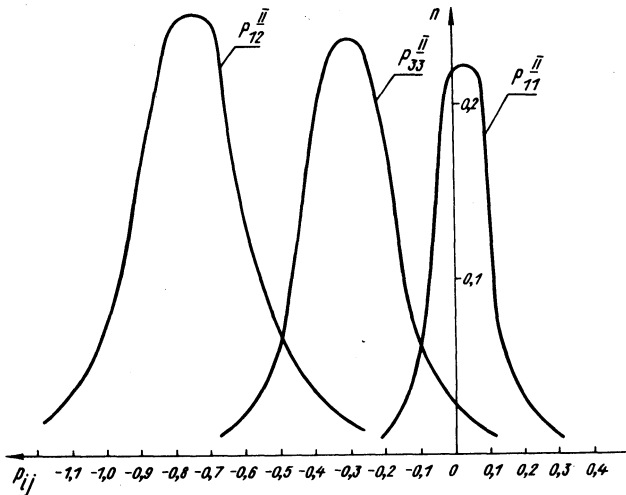


Рис. 3. Кривые распределения начальных напряжений при $t = 100^\circ\text{C}$ в связующем.

Числовой пример просчитывался на ЭВМ "Минск-22" для материала, имеющего структуру, показанную на рис. 1, при следующих значениях свойств:

$$E^I = 6 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; E^{II} = 3 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; n^I = 0,3; n^{II} = 0,35;$$

$$a^I = 10^{-6} \text{ 1/ос}; a^{II} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/ос}; p = 0,65.$$

(E^I, E^{II}, n^I, n^{II} - соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона компонентов).

Кривые распределения начальных напряжений при $t = 100^\circ \text{C}$ показаны на рис. 2, 3.

Л и т е р а т у р а

1. Ставров В.П., Величко А.П. Начальные напряжения в армированных и наполненных полимерах. - "Механика полимеров", 1973, т. 90.
2. Хорошун Л.П. К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. - "Прикл. механика", 1967, т. 3, вып. 9.
3. Волков С.Д. и др. Начальные термоструктурные напряжения в двухкомпонентных средах. - Докл. АН СССР, 1968, т. 183, вып. 1.
4. Болотин В.В., Москаленко В.Н. К расчету макроскопических постоянных упругости сильно изотропных поликристаллов. - Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1969, т. 3.
5. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., 1970.
6. Ставров В.П., Фомина Т.С. К статистическому описанию микроструктуры стеклопластиков. - "Механика полимеров", 1969, № 2.
7. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов. - ЖТФ, 1946, т. 16, вып. 11.

А.Е. Крушевский, В.М. Чураков

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДАХ

Известно, что решение уравнений Ламе с выполнением краевых условий на части поверхности (например, для прямоугольника, цилиндра) строится в большинстве случаев в виде неортогональных рядов [1]. Выполнение краевых условий на остальной части поверхности производится за счет применения различных приближенных методов, которые приводят задачу к

решению бесконечных систем алгебраических уравнений [1]. Попытки получения замкнутого решения указанных задач требуют разложения данной функции в ряд по собственным неортогональным функциям [2;3].

В данной статье дается замкнутое решение некоторых краевых задач для квадрата, прямоугольника и цилиндра в неортогональных рядах, коэффициенты которых определяются методом бесконечного дифференцирования [4].

1. Сжатие (растяжение) квадрата двумя сосредоточенными силами (рис. 1). Если заранее выполнить краевые условия на свободных сторонах квадрата ($\bar{\sigma}_x = \tau_{xy} = 0$ при $x = \pm \frac{a}{2}$), то решение можно построить в следующем виде:

$$u = -\frac{\gamma_2}{\gamma} Cx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2\gamma \operatorname{sh} \lambda_k x - \lambda_k (\gamma - 1) x \right. \\ \left. x \left(2x \operatorname{ch} \lambda_k x - a \operatorname{sh} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right) \right] \cos \lambda_k y;$$

$$v = Cy + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k x + \lambda_k (\gamma - 1) (2x \operatorname{sh} \lambda_k x - \right. \\ \left. - a \operatorname{ch} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2}) \right] \sin \lambda_k y.$$

Здесь $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}$, где λ_k - корни уравнения $\frac{\operatorname{sh} \lambda_k a}{\lambda_k a} + 1 = 0$; A_k , C - произвольные постоянные; a - сторона квадрата; ν - коэффициент Пуассона.

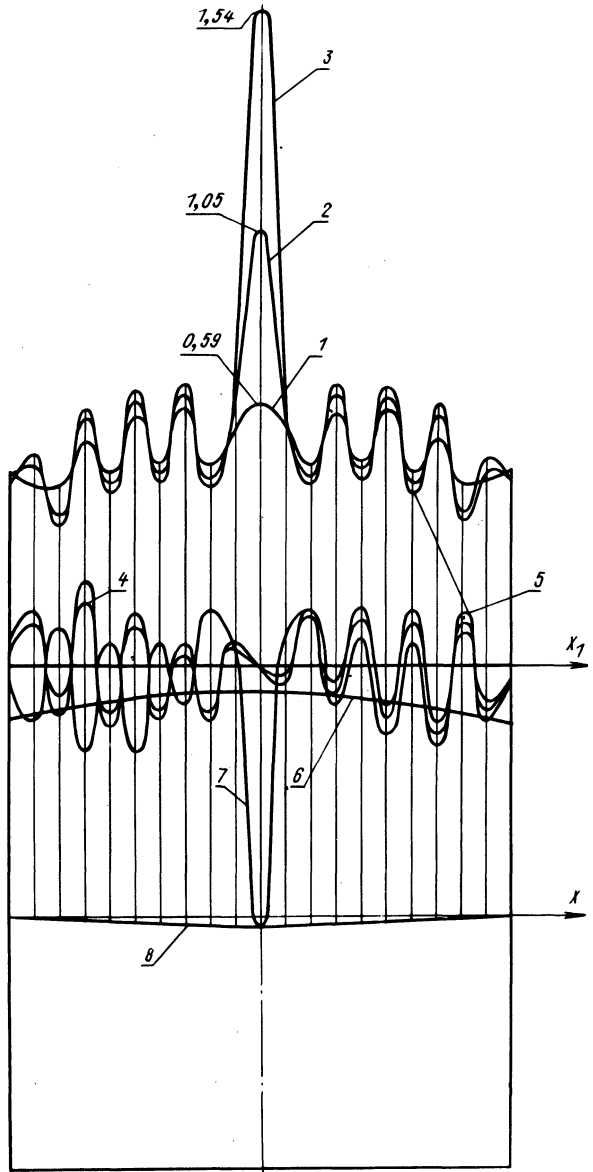
Краевые условия на сторонах $x = \pm \frac{a}{2}$ выполняются строго за счет корней уравнения $\frac{\operatorname{sh} \lambda_k a}{\lambda_k a} + 1 = 0$. Краевые условия на сторонах $y = \pm \frac{a}{2}$ должны быть выполнены следующие:

$$\bar{\sigma}_y \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) = \frac{P}{2a} + \frac{P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi m x}{a};$$

$$\tau_{xy} \left(x, \pm \frac{a}{2} \right) = 0,$$

Рис. 1. Графики напряжений в упругом квадрате, растягиваемом двумя сосредоточенными силами:

- 1 - $\sigma_y(y=1)$ при $m = k = 10$;
- 2 - $\sigma_y(y=1)$ при $m = k = 30$;
- 3 - $\sigma_y(y=1)$ при $m = k = 50$;
- 4 - $\tau_{xy}(y=1) = m = k = 30$;
- 5 - $\tau_{xy}(y=1) = m = k = 50$;
- 6 - $\sigma_y(y=0)$ при $m = k = 50$;
- 7 - $\sigma_x(y=1)$ при $m = k = 50$;
- 8 - $\sigma_x(y=0)$ при $m = k = 50$.



где $P/2$ - сосредоточенная сила, которая приложена в середине стороны квадрата и разложена в ряд Фурье.

В развернутом виде условия на сторонах $y = \pm \frac{a}{2}$ записываются так:

$$\frac{4(\gamma - 1)G}{\gamma} C + 4(\gamma - 1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k x + \right. \\ \left. + \lambda_k (2x \operatorname{sh} \lambda_k x - a \operatorname{ch} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2}) \right] \cos \frac{\lambda_k a}{2} = \\ = \frac{P}{2a} + \frac{P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi m x}{a};$$

$$4(\gamma - 1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k \left[2x \operatorname{ch} \lambda_k x - a \operatorname{sh} \lambda_k x \right. \\ \left. x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right] \sin \frac{\lambda_k a}{2} = 0.$$

Применяя к указанным условиям операцию бесконечного

дифференцирования $\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{d^2}{\lambda_k^2 dx^2} \right)^2$, получим:

$$C = \frac{\gamma P}{8(\gamma - 1)G a};$$

$$A_{km} = - \frac{P (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)^2 a^6 \lambda_k^2 \bar{\lambda}_k}{8M/N^2 (\gamma - 1)G (\bar{\lambda}_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} \cos \frac{\lambda_k a}{2} - \\ N \sin \frac{\bar{\lambda}_k a}{2} \cos \pi m)}; \\ - \lambda_k \sin \frac{\lambda_k a}{2} \cos \frac{\bar{\lambda}_k a}{2}) (1 + \operatorname{ch} \lambda_k a)^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_k a}{2}$$

$$M = 1 + \operatorname{ch} \lambda_k a + \frac{2 \lambda_k}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2} - \frac{4 \pi^2 m^2}{4 \pi^2 m^2 + \lambda_k^2 a^2};$$

$$N = 4 \pi^2 m^2 + \lambda_k^2 a^2.$$

В результате имеем следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_x = 4(\gamma - 1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_k A_{km} \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k x - \lambda_k x \right.$$

$$x \left(2x \operatorname{sh} \lambda_k x - a \operatorname{ch} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right) \cos \lambda_k y;$$

$$\sigma_y = \frac{4(\gamma-1)G}{\gamma} C + 4(\gamma-1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_k A_{km} x$$

$$x \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k x + \lambda_k (2x \operatorname{sh} \lambda_k x - a \operatorname{ch} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2}) \right] x \cos \lambda_k y;$$

$$\tau_{xy} = 4(\gamma-1)G \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_{km} \left[2x \operatorname{ch} \lambda_k x - a \operatorname{sh} \lambda_k x \operatorname{cth} \frac{\lambda_k a}{2} \right] \sin \lambda_k y.$$

Для вычисления напряжений по приведенным формулам составлены программы на языке АКИТ ЭВМ "Минск-22". При

этом были заранее определены корни уравнения $\frac{\operatorname{sh} \lambda_k a}{\lambda_k a} + 1 = 0$

на ЭВМ и записаны в виде массива на магнитной ленте (1000 корней). Вычисления производились при различном количестве корней и натуральных чисел m . Выяснено, что ряды очень быстро сходятся во всех точках, за исключением грани-

цы $y = \pm \frac{a}{2}$, где обнаружена медленная сходимость. На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты вычислений напряжений при значениях $k = m = 10, 30, 50, 100$. Как видно из рис. 1, напря-

жение $\sigma_y(0, \pm \frac{a}{2})$ монотонно возрастает при увеличении чисел k и m . В остальных точках стороны $y = \pm \frac{a}{2}$ напряжения σ_y и τ_{xy} не стремятся к нулю, а совершают бесконечные ограни-

ченные колебания, как и следовало ожидать при разложении импульсивной функции в данный неортогональный ряд. Указанный характер сходимости наблюдается и при разложении импульсивной функции в ортогональный ряд Фурье. Например: сосредоточенная нагрузка $P/2$ разлагается в ряд

$$f(x) = \frac{P}{2a} + \frac{P}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi mx}{a},$$

Таблица 1.

κ/m x	σ _y					
	10	20	30	40	50	100
0,0	0,591	0,814	1,054	1,298	1,542	2,738
0,1	0,556	0,396	0,582	0,382	0,591	0,471
0,2	0,451	0,434	0,425	0,420	0,416	0,405
0,3	0,612	0,449	0,639	0,433	0,650	0,416
0,4	0,469	0,450	0,439	0,431	0,426	0,410
0,5	0,599	0,440	0,633	0,418	0,649	0,390
0,6	0,446	0,422	0,406	0,395	0,385	0,356
0,7	0,535	0,399	0,581	0,365	0,608	0,310
0,8	0,407	0,378	0,357	0,340	0,325	0,268
0,9	0,426	0,377	0,468	0,343	0,499	0,269
1,0	0,437	0,432	0,429	0,428	0,427	0,424

Примечание. Во всех вычислениях, в том числе и в промежуточных, учитывались лишь первые семь цифр.

который во всех точках, за исключением $x=0$, колеблется в пределах

$$-\frac{P}{2a} \leq f(x) \leq \frac{3P}{2a}; \int_{-a/2}^{+a/2} f(x) dx = \frac{P}{2}.$$

2. Сжатие (растяжение) прямоугольника. В задаче о растяжении квадрата выполнялись заранее условия отсутствия нагрузки на сторонах $x = \pm \frac{a}{2}$. Однако можно строить решения так, чтобы заранее были выполнены краевые условия на нагруженных сторонах $y = \pm \frac{h}{2}$. При этом следует заметить, что краевые условия в целях улучшения сходимости нужно выполнять заранее на больших сторонах.

Итак, рассмотрим растяжение прямоугольника двумя соседочечными силами, приложенными в середине длинных сторон. Решение, при котором выполняются условия нагружения, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 u = & Cx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k y + \lambda_k (\gamma - 1) (2y \operatorname{sh} \lambda_k y - \right. \\
 & \left. - h \operatorname{ch} \lambda_k y \operatorname{cth} \frac{\lambda_k h}{2}) \right] \sin \lambda_k x - \frac{\gamma_2 P x}{8(\gamma - 1) G a} + \\
 & + \frac{P}{4\pi(\gamma - 1) G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi m h}{a}}{m \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} + \frac{2\pi m h}{a} \right)} \left[2 \operatorname{ch} \frac{2\pi m y}{a} + \right. \\
 & \left. + \frac{2\pi m}{a} (\gamma - 1) (2y \operatorname{sh} \frac{2\pi m y}{a} - h \operatorname{ch} \frac{2\pi m y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi m h}{a}) \right] \times \\
 & \times \sin \frac{2\pi m x}{a};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & - \frac{\gamma_2}{\gamma} C y + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[2 \gamma \operatorname{sh} \lambda_k y - \lambda_k (\gamma - 1) (2y \operatorname{ch} \lambda_k y - \right. \\
 & \left. - h \operatorname{sh} \lambda_k y \operatorname{cth} \frac{\lambda_k h}{2}) \right] \cos \lambda_k x + \frac{\gamma P y}{8(\gamma - 1) G a} + \\
 & + \frac{P}{4\pi(\gamma - 1) G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi m h}{a}}{m \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} + \frac{2\pi m h}{a} \right)} \left[2 \gamma \operatorname{sh} \frac{2\pi m y}{a} - \right. \\
 & \left. - \frac{2\pi m}{a} (\gamma - 1) (2y \operatorname{ch} \frac{2\pi m y}{a} - h \operatorname{sh} \frac{2\pi m y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi m h}{a}) \right] \times \\
 & \times \cos \frac{2\pi m x}{a}.
 \end{aligned}$$

Это решение состоит из двух частей: первые два слагаемые определяют однородное решение, дающие нулевые напряжения на сторонах $y = \pm \frac{h}{2}$, остальные слагаемые дают решение для бесконечной полосы.

Запишем краевые условия на сторонах $x = \pm \frac{a}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = & \frac{4(\gamma - 1) G}{\gamma} C + 2(\gamma - 1) G \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k \left[2 \operatorname{ch} \lambda_k y + \right. \\
 & \left. + \lambda_k (2y \operatorname{sh} \lambda_k y - h \operatorname{ch} \lambda_k y \operatorname{cth} \frac{\lambda_k h}{2}) \cos \frac{\lambda_k a}{2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P \operatorname{sh} \frac{\pi m h}{a}}{a \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} + \frac{2\pi m h}{a} \right)} \left] 2 \operatorname{ch} \frac{2\pi m y}{a} + \frac{2\pi m}{a} x \right.$$

$$\times \left(2y \operatorname{sh} \frac{2\pi m y}{a} - h \operatorname{ch} \frac{2\pi m y}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi m h}{a} \right) \cos \pi m = 0;$$

$$\tau_{xy} \left(\pm \frac{a}{2}, y \right) = 2(\gamma - 1) G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 A_k \left[2y \operatorname{ch} \lambda_k y - \right. \\ \left. - h \operatorname{sh} \lambda_k y \operatorname{cth} \frac{\lambda_k h}{2} \right] \sin \frac{\lambda_k a}{2} = 0.$$

В результате применения операции бесконечного дифференцирования получим

$$C = 0;$$

$$A_{km} = - \frac{16P\pi^2 m^2 \lambda_k^4 h^8 \operatorname{sh} \frac{\pi m h}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} + \frac{2\pi m h}{a} \right)}{(\gamma - 1) G a^3 (1 + \operatorname{ch} \lambda_k h)^2} x$$

$$\times \frac{(\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)^2 \bar{M} N \operatorname{sh} \frac{\bar{\lambda}_k h}{2} \cos \pi m}{\operatorname{sh}^2 \frac{2\pi m h}{a} / \frac{4\pi^2 m^2 h^2}{a^2} - \lambda_k^2 h^2 / 4} ;$$

$$M = 3 + \operatorname{ch} \lambda_k h - \frac{8 \lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2} ;$$

$$N = 3 + \frac{\pi m h}{a} \left[\frac{4 \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} - \frac{2\pi m h}{a} \operatorname{ch} \frac{2\pi m h}{a} \right)}{8h \frac{2\pi m h}{a} \left(\operatorname{sh} \frac{2\pi m h}{a} + \frac{2\pi m h}{a} \right)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{cth} \frac{\pi m h}{a} - \frac{16\pi m h \left(\frac{8\pi^2 m^2 h^2}{a^2} - \lambda_k^2 h^2 - \bar{\lambda}_k^2 h^2 \right)}{a / \frac{4\pi^2 m^2 h^2}{a^2} - \lambda_k^2 h^2 / 4} \right]$$

Таблица 2

x	Сосредоточенная нагрузка				Треугольная нагрузка				Ступенчатая нагрузка			
	σ_x		σ_y		σ_x		σ_y		σ_x		σ_y	
	y=0	y=1	y=0	y=1	y=0	y=1	y=0	y=1	y=0	y=1	y=0	y=1
0,0	-0,243	1,610	0,912	2,100	-0,031	0,030	0,350	0,385	-0,001	0,006	0,202	0,206
0,5	-0,047	-0,501	0,504	-0,100	-0,023	0,044	0,321	0,320	-0,001	-0,005	0,202	0,193
1,0	0,082	-0,127	0,089	0,100	-0,009	0,013	0,245	0,240	-0,005	0,014	0,204	0,208
1,5	0,057	-0,194	-0,155	-0,100	0,002	-0,003	0,160	0,159	-0,012	0,012	0,202	0,189
2,0	0,022	0,070	-0,019	0,100	0,011	-0,022	0,081	0,080	-0,017	0,072	0,177	0,218
2,5	0,007	-0,105	-0,010	-0,100	0,015	-0,046	0,025	0,007	-0,001	0,000	0,102	0,102
3,0	-0,002	0,102	0,001	0,100	0,007	-0,017	0,005	0,000	0,012	-0,067	0,030	-0,02
3,5	-0,006	-0,089	0,002	-0,100	-0,009	0,011	0,006	-0,00	-0,003	0,009	0,009	0,010
4,0	0,128	0,128	0,003	0,100	-0,030	0,058	0,000	0,001	-0,030	0,048	-0,002	-0,01
4,5	-0,017	-0,041	-0,039	-0,100	-0,037	0,117	-0,075	-0,00	-0,040	0,137	-0,085	0,007
5,0	0,037	0,154	-0,184	0,100	0,080	0,109	-0,378	0,00	0,089	0,115	-0,420	-0,01

Примечание. Во всех вычислениях, в том числе и в промежуточных, учитывались лишь первые семь цифр.

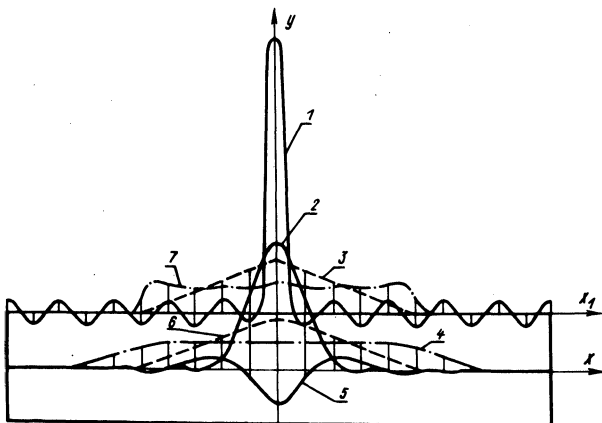


Рис. 2. Графики напряжений в упругом прямоугольнике, растягиваемом сосредоточенной, треугольной и ступенчатой нагрузкой:

$$\begin{aligned}
 1 - \sigma_y(x, \frac{h}{2}); & \quad 2 - \sigma_y(x, 0); \\
 3 - \sigma_y(x, \frac{h}{2}); & \quad 4 - \sigma_y(x, 0); \\
 5 - \sigma_x(x, 0); & \quad 6 - \sigma_y(x, 0); \\
 7 - \sigma_y(x, \frac{h}{2}). &
 \end{aligned}$$

На основании полученных формул составлена программа для вычисления напряжений на ЭВМ "Минск-22". На рис. 2 построены графики напряжений для прямоугольника ($h : a = 1 : 5$) при $y=0$ и $y=\frac{h}{2}$ (сплошные линии).

Кроме сосредоточенной нагрузки рассмотрены случаи треугольной нагрузки (пунктирные линии) и случая ступенчатой нагрузки (точка с пунктиром). Получение решений для этих нагрузок не составляет никакого труда: достаточно в формулах для сосредоточенной нагрузки вместо P/a подставить значения для треугольной нагрузки $\frac{4Pa}{\pi^2 m^2 h^2} \sin^2 \frac{\pi mh}{2a}$, для ступенчатой нагрузки $\frac{P}{\pi mh} \sin \frac{\pi mh}{a}$. В табл. 2 приведены значения напряжений для указанных трех типов нагрузки при $y=0$ и

$u = \frac{h}{2}$. Ввиду быстрой сходимости вычисления производились при двух корнях уравнения $\frac{\text{sh } \lambda h}{\lambda h} + 1 = 0$ и $m = 10$.

3. Равномерное вращение упругого цилиндра вокруг неподвижной оси. Формулы для напряжений и перемещений получены в статье (5). В данной работе приведем результаты вычисления напряжений по указанным формулам. Вычисления производились на ЭВМ "Минск-22", для чего составлена программа на языке АКИ = 400. Значения бесселевых функций от комплексного аргумента, входящие в решение задачи, вычислялись на основе представления бесселевых функций в виде определенных интегралов. Численный анализ показывает, что построенные неортогональные ряды очень быстро сходятся для значений $0 < h < R$. Этим подтверждается высказанное положение о том, что заранее следует выполнять краевые условия на большей части поверхности тела, обеспечивая выполнение краевых условий на остальной части поверхности за счет сходимости построенных рядов. На рис. 3 приводятся графики напряжений для цилиндра $h = R = 1$, для которого площадь цилиндрической поверхности равна площади обоих торцев. Для значений h , малых по сравнению с R , можно отбросить неортогональные ряды и получить приближенное решение в виде:

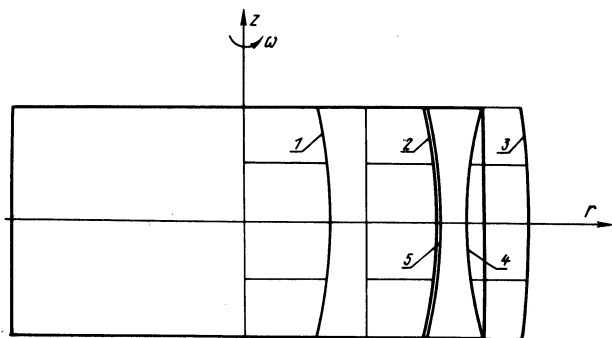


Рис. 3. Графики напряжений в упругом цилиндре, вращающемся вокруг неподвижной оси:

- 1 - $\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z)$; 2 - $\sigma_r(0, 0,5z)$;
 3 - $\sigma_\theta(1, z)$; 4 - $\sigma_z(1, z)$; 5 - $\sigma_\theta(0, 0,5z)$.

$$\sigma_r = \frac{\rho \omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} [4\gamma^2(3\gamma-4)(h^2-3z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2-r^2)];$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho \omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} [4\gamma^2(3\gamma-4)(h^2-3z^2) + 3\gamma(7\gamma-8)(R^2-r^2) + 6\gamma^2 r^2];$$

$$\tau_{rz} = \sigma_z = 0,$$

где ω - угловая скорость; ρ - плотность материала.

Это решение точно удовлетворяет условиям Коши внутри цилиндра и на торцах $z = \pm \frac{h}{2}$ и приближенно на цилиндрической поверхности $r = R$.

Л и т е р а т у р а

1. Лурье А.И. Теория упругости. М., 1970.
2. Клемм Дж.Л., Литтл Р.В. Полубесконечный упругий цилиндр под действием самоуравновешенной торцевой нагрузки. - "Механика". 1972, № 1.
3. Брусиловская Г.А., Ершов Л.В. О напряженно-деформированном состоянии конечного цилиндра, находящегося под действием динамических нагрузок. - "ПММ", 1973, № 4.
4. Крушевский А.Е. Решение задачи о равновесии плиты в точной постановке. - В сб.: 26 науч.-техн. конф. БПИ. Материалы секции теоретической и прикладной механики. Минск, 1970.
5. Крушевский А.Е. Равномерное вращение упругого цилиндра вокруг неподвижной оси. - В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Вып. 1. Минск, 1974.

А.Е. Крушевский, В.Ф. Кондратюк,
Н.Я. Бойко, В.М. Шиповский

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСНЫХ ДЕТАЛЕЙ ПРЕССОВ

В данной статье дается расчет напряженного состояния стола прессы К2535А при затяжке и станины прессы К8544 при рабочей нагрузке на основе методов теории упругости с при-

менением элементов аналитической механики.

1. Стол пресса К2535А. Для решения задачи построим ряды аппроксимирующих функций и возможных состояний в классе степенных функций от всех трех координат X, Y, Z . Предположим, что стол имеет полную симметрию относительно плоскостей XOZ и YOZ и нагружается при затяжке симметрично. Тогда упругие перемещения u (вдоль оси OX) будут четными относительно " Y " и нечетными относительно " X ", v (вдоль оси OY) – четными относительно " X " и нечетными относительно " Y ", w (вдоль оси OZ) – четными относительно координат " X " и " Y ". Что касается координаты Z , то упругие перемещения будут содержать как четные, так и нечетные степени. Учитывая последнее, запишем ряды искомых упругих перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m,n,p=0} U_{2m+1,2n,p} x^{2m+1} y^{2n} z^p; \\
 v &= \sum_{m,n,p=0} V_{2m,2n+1,p} x^{2m} y^{2n+1} z^p; \\
 w &= \sum_{m,n,p=0} W_{2m,2n,p} x^{2m} y^{2n} z^p.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ограничиваясь четвертыми степенями, запишем эти ряды в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 u &= xU_{100} + xzU_{101} + xy^2U_{120} + x^3U_{300} + xz^2U_{102} + x^3zU_{301} + \\
 &+ xy^2zU_{121} + xz^3U_{103}; \\
 v &= yV_{010} + yzV_{011} + x^2yV_{210} + y^3V_{030} + yz^2V_{012} + x^2yzV_{211} + \\
 &+ y^3zV_{031} + yz^3V_{013}; \\
 w &= W_{000} + zW_{001} + x^2W_{200} + y^2W_{020} + z^2W_{002} + x^2zW_{201} + \\
 &+ y^2zW_{021} + zW_{003} + x^4W_{400} + x^2y^2W_{220} + x^2z^2W_{202} +
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$+y^2 z^2 W_{022} + y^4 W_{040} + z^4 W_{004}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов (обобщенных перемещений $U_{100} + U_{103}; V_{010} \div V_{013}; W_{000} \div W_{004}$) построенных рядов (2) составим вариационные уравнения, уравнения внутренних и поверхностных связей.

Вариационные уравнения составим исходя из принципа Лагранжа:

$$\int_V \bar{K} \cdot \delta \bar{u} dV - \int_V T \cdot \delta E dV + \int_S \bar{F}_n \cdot \delta \bar{u} dS = 0, \quad (3)$$

где \bar{K} - вектор объемных сил; $\delta \bar{u}$ - вектор возможных перемещений; T - тензор напряжений, δE - тензор возможной деформации; \bar{F}_n - вектор поверхностных сил, dV - элемент объема тела; $d^n S$ - элемент поверхности тела.

Для определения обобщенных перемещений U_i, V_k и W_h согласно (3) имеем следующую систему алгебраических уравнений [1]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m b_{ji} U_i + \sum_{k=1}^n c_{jk} V_k + \sum_{h=1}^p I_{jh} W_h - P_j &= 0; \\ \sum_{i=1}^m c'_{gi} U_i + \sum_{k=1}^n s_{gk} V_k + \sum_{h=1}^p \delta_{gh} W_h - Q_g &= 0; \\ \sum_{i=1}^m I'_{di} U_i + \sum_{k=1}^n \delta'_{dk} V_k + \sum_{h=1}^p \rho_{dh} W_h - N_d &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как аппроксимирующие функции и возможные перемещения выбраны в классе степенных функций, то все коэффициенты уравнений (4) определяются в виде интеграла $I_{mnp} = \int_V x^m y^n z^p dV$, взятого по всему объему стола. Здесь m, n, p - натуральные числа. Вследствие сложной конструкции стола указанный интеграл для всей области интегрирования записывается слишком громоздко. Поэтому область интегрирования разбивается на отдельные участки (параллелепипеды, цилиндры и призмы) и для каждого из них записывается свое выражение

определенного интеграла. По этим отдельным формулам для определения I_{mnp} составлена программа и реализована на ЭВМ "Минск-22М".

Некоторые значения определенных интегралов I_{mnp} приведены в табл. 1.

Уравнения внутренних связей составляются из условия равновесия элемента внутри тела без учета объемных сил, т.е. из условия $\text{div } T = 0$. Уравнения внутренних связей для построенных рядов (2) записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} 3\gamma U_{300} + U_{120} + U_{102} + (\gamma - 1)(V_{210} + W_{201}) &= 0; \\ 3\gamma U_{301} + U_{121} + 3U_{103} + (\gamma - 1)(V_{211} + 2W_{202}) &= 0; \\ 3\gamma V_{030} + V_{210} + V_{012} + (\gamma - 1)(U_{120} + W_{021}) &= 0; \\ 3\gamma V_{031} + V_{211} + 3V_{013} + (\gamma - 1)(U_{121} + 2W_{022}) &= 0; \\ 2(\gamma W_{002} + W_{200} + W_{020}) + (\gamma - 1)(U_{101} + V_{011}) &= 0; \\ 3\gamma W_{003} + W_{201} + W_{021} + (\gamma - 1)(U_{102} + V_{012}) &= 0; \\ 12\gamma W_{004} + 2W_{202} + 2W_{022} + 3(\gamma - 1)(U_{103} + V_{013}) &= 0; \\ 2(\gamma W_{202} + 6W_{400} + W_{220}) + (\gamma - 1)(3U_{301} + V_{211}) &= 0; \\ 2(\gamma W_{022} + 6W_{040} + W_{220}) + (\gamma - 1)(U_{121} + 3V_{031}) &= 0. \end{aligned} \right\} (5)$$

Уравнения поверхностных связей представляют собой условия закрепления и нагружения стола. При предварительном сжатии стола вводим одну поверхностную кинематическую и одну поверхностную статическую связь. Поверхностная кинематическая связь обращает в нуль вертикальное перемещение w при $X = 0,525$ м, $Y = 0,77$ м и $Z = 0$, т.е. в точках, лежащих на осях шпилек у нижнего края. Кинематическая связь необходима, так как обобщенное перемещение W_{000} не определяется из вариационных уравнений и уравнений внутренних свя-

Таблица 1

m, n, p	$I_{m,n,p}$	m, n, p	$I_{m,n,p}$
0 0 0	0,44846	2 0 1	0,05339
1 0 0	0,00022	3 0 1	0,00001
2 0 0	0,13416	0 1 1	0,00006
3 0 0	0,00001	1 1 1	-0,00002
4 0 0	0,07377	2 1 1	0,00001
0 1 0	0,00012	0 2 1	0,05955
1 1 0	-0,00005	1 2 1	0,00000
2 1 0	0,00002	0 3 1	0,00000
3 1 0	-0,00001	0 0 2	0,09952
0 2 0	0,16320	1 0 2	0,00005
1 2 0	-0,00001	2 0 2	0,03875
2 2 0	0,05577	0 1 2	0,00003
0 3 0	0,00000	1 1 2	-0,00001
1 3 0	0,00000	0 2 2	0,03834
0 4 0	0,08384	0 0 3	0,07251
0 0 1	0,15928	1 0 3	0,00002
1 0 1	0,00011	0 1 3	0,00001
0 0 4	0,05944		

зей. Обобщенное перемещение W_{000} не представляет упругую деформацию тела, а определяет лишь жесткое перемещение его.

Поверхностная статическая связь определяет напряжение $\sigma_z = \frac{P}{4F} = -590 \text{ кг/см}^2$ на поверхности стола при $X = 0,525 \text{ м}$, $Y =$

$0,77 \text{ м}$ и $Z = 0,66 \text{ м}$, где P - усилие затяжки, F - площадь контакта между стойкой и столом.

И уравнения внутренних связей (5), и уравнения поверхностных статических связей служат для улучшения сходимости решения, представленного конечными рядами (2). Кинематические условия не следуют из вариационного уравнения Лагранжа и должны выполняться в обязательном порядке.

Таким образом, задача расчета стола при затяжке на основе изложенного свелась к решению 41 алгебраического уравнения: 30 вариационных уравнений по числу аппроксимирующих функций, 9 уравнений внутренних связей (5) и 2 уравнений поверхностных связей.

Указанные 11 уравнений связей включаются в вариационные уравнения при помощи множителей Лагранжа. Следовательно, 41 уравнение образует совместную систему относительно 30 обобщенных перемещений и 11 множителей Лагранжа. Следует отметить, что указанную систему уравнений можно получить, исходя из условия минимума потенциальной энергии упругого тела при учете связей, наложенных на ряды (2). Функция Лагранжа при этом записывается в виде:

$$L = \frac{1}{2} \int_V T \cdot E dV + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i,$$

где T и E – соответственно тензор напряжений и тензор деформации упругого тела; λ_i – множители Лагранжа; $f_i = 0$ – уравнения связей.

Формирование вариационных уравнений с множителями Лагранжа, уравнений внутренних и поверхностных связей и все вычисления производятся на ЭВМ "Минск-22М", для чего составлены соответствующие программы.

Значения обобщенных перемещений равны:

$$\begin{aligned} U_{100} &= 4,08 & U_{300} &= -10,67 & U_{120} &= 5,92 & U_{101} &= 14,44 \\ U_{301} &= 12,59 & U_{121} &= 103,70 & U_{102} &= 3,89 & U_{103} &= -94,46 \\ V_{010} &= 22,02 & V_{210} &= -1,00 & V_{030} &= 7,52 & V_{011} &= -238,09 \\ V_{211} &= -115,74 & V_{031} &= 66,05 & V_{012} &= 102,71 & V_{013} &= 154,33 \\ W_{000} &= -59,73 & W_{200} &= 6,53 & W_{400} &= -25,39 & W_{020} &= 44,14 \\ W_{220} &= 6,91 & W_{040} &= 92,17 & W_{001} &= -29,17 & W_{201} &= 44,52 \\ W_{021} &= -90,63 & W_{002} &= 57,53 & W_{202} &= 74,47 & W_{022} &= -287,27 \\ W_{003} &= -18,52 & W_{004} &= 1,84 \end{aligned}$$

При вычислении упругих перемещений (в мм) и напряжений (в кг/см²) нужно вычисленные обобщенные перемещения разделить на $8,1 \cdot 10^4$.

Расчетные значения напряжений при затяжке сравнены с экспериментальными результатами исследования напряженного

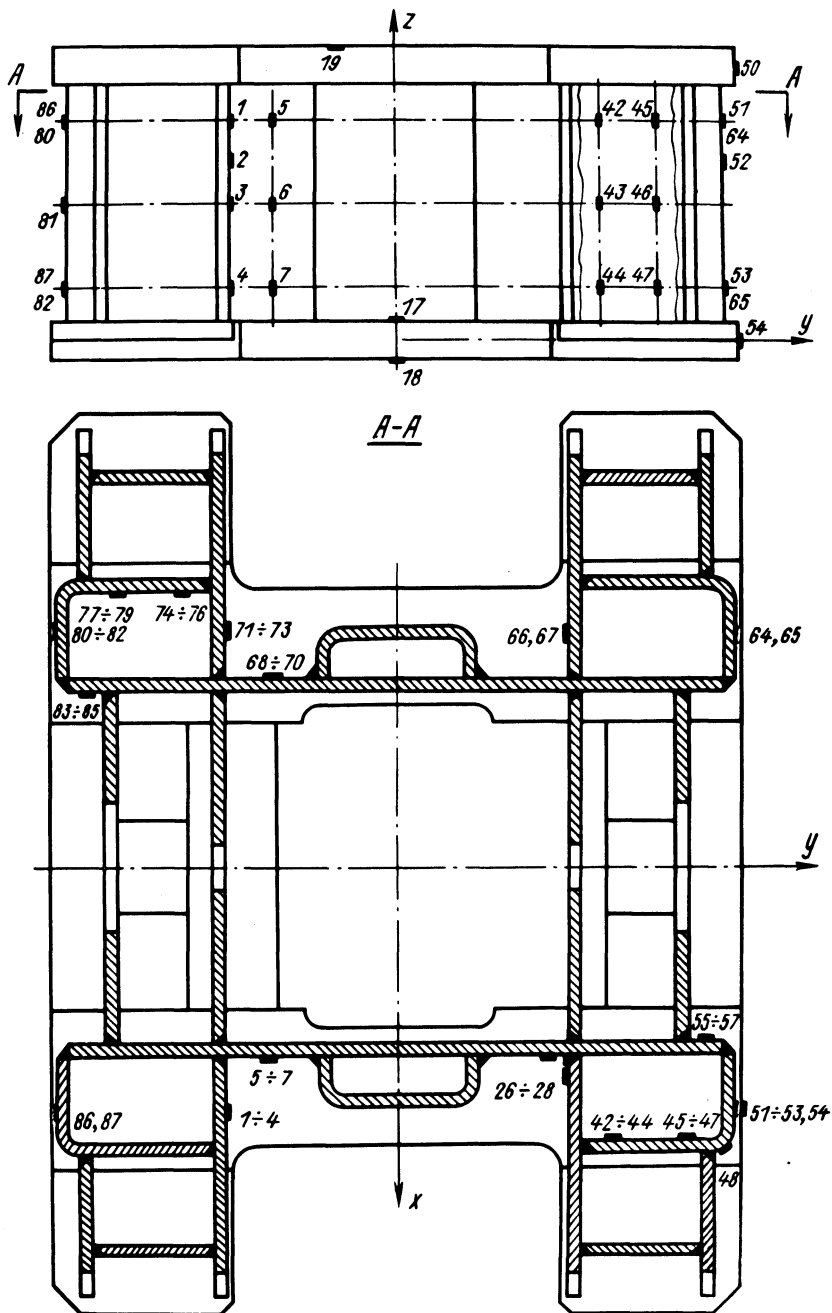


Рис. 1. Схема расположения датчиков стола прессы К2535А.

состояния стола. Схема расположения датчиков изображена на рис. 1, а графическое сопоставление их значений с расчетными результатами показано на рис. 2. Анализ сравнения показывает удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов. Следует отметить, что результаты рас-

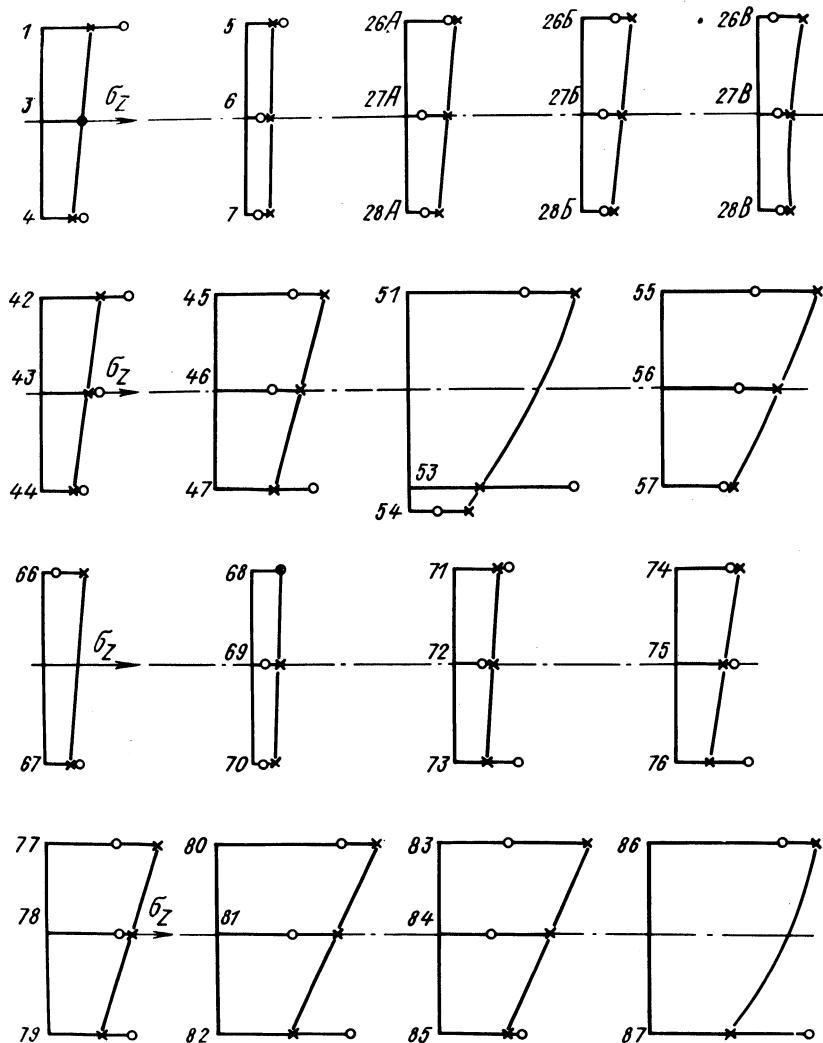


Рис. 2. Графики напряжений σ_z в сечениях стола прессы К2535А:

1 - 87 - номера датчиков; о - экспериментальные данные; х - расчетные результаты.

чета получены в предположении полной симметрии конструкции и нагружения стола. На самом деле конструкция стола не совсем симметричная, а шпильки затянуты не одинаково. Улучшение совпадения расчетных и экспериментальных результатов возможно за счет построения более полных рядов аппроксимирующих функций и уточнения нагрузки на поверхности стола.

2. Станина пресса К8544. Определим напряженное состояние в районе втулки на внутреннем листе станины при статическом действии рабочей нагрузки (усилия прессования). Эта зона станины является наиболее нагруженной, так как именно в этом месте действует на станину усилие прессования и возникает концентрация напряжений вследствие отверстия

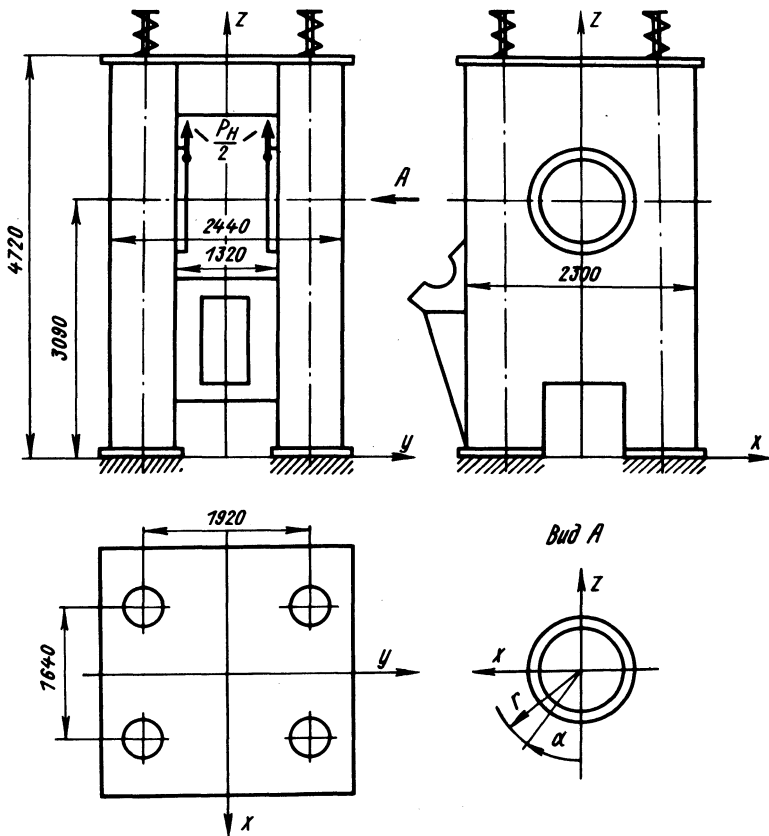


Рис. 3. Расчетная схема станины пресса К8544.

под втулку. Таким образом, задачу расчета станины будем решать локально, используя наиболее полную информацию нагружения указанной зоны.

Благодаря симметрии конструкции и нагрузки относительно плоскости XOZ (рис. 3) и закрепления нижнего края ($Z = 0$) станины искомые перемещения запишем в виде следующих степенных рядов [2]:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m, n, p=0}^{m+n+p=4} U_{m, 2n, p+1} x^m y^{2n} z^{p+1}; \\
 v &= \sum_{m, n, p=0}^{m+n+p=4} V_{m, 2n+1, p+1} x^m y^{2n+1} z^{p+1}; \\
 w &= \sum_{m, n, p=0}^{m+n+p=4} W_{m, 2n, p+1} x^m y^{2n} z^{p+1}.
 \end{aligned}$$

В результате применения вариационного уравнения Лагранжа (3) и уравнения Коши ($\text{div } T = 0$) получим 33 вариационных уравнения и 17 уравнений внутренних связей. Свободные члены вариационных уравнений определяются как работа усилия прессования, равного $0,5 P_n$ ($P_n = 2500 \text{ т}$), приложенного в точке $X = 0$, $Y = 0,66 \text{ м}$, $Z = 3,55 \text{ м}$.

В качестве достаточной информации для определения напряженного состояния в районе втулки следовало бы привлечь связи взаимодействия станины с эксцентриковым валом и шпильками. Однако выяснение этих связей требует детального исследования работы пресса при учете контактных деформаций во всех местах стыка. Составление связей взаимодействия представляет собой задачу более трудную, чем определение напряженного состояния при известных условиях закрепления и нагружения. Поэтому вместо решения задачи в комплексе с другими деталями будем отбрасывать все связи взаимодействия и вводить значения напряжений или перемещений в точках контакта.

Итак, для получения решений в районе втулки на внутреннем листе введем перемещения точек верхнего листа по осям стяжных шпилек (кинематические связи) и напряжения у контура отверстия на внутреннем листе (статические связи). Перемещения этих точек согласно экспериментальным данным составляют порядка 20% удлинения от P_n , а напряжения вбли-

зи места контакта вала и втулки (верхняя точка втулки) составляют 140 мН/м^2 . Остальной контур отверстия предполагается свободным от напряжений. Таким образом, к 50 основным уравнениям добавляются 2 уравнения кинематических связей

$$w(\pm 0,82; 0,96; 4,72) = 0,275 \text{ мм}$$

и 10 уравнений статических связей (табл. 2.).

Таблица 2

Координаты, м			Напряжения, мН/м ²					
X	Y	Z	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
0	0,66	3,705	-	-	-140	-	-	-
0	0,66	2,63	-	-	0	-	0	-
0,46	0,66	3,09	0	-	-	0	0	-
-0,46	0,66	3,09	0	-	-	0	0	-

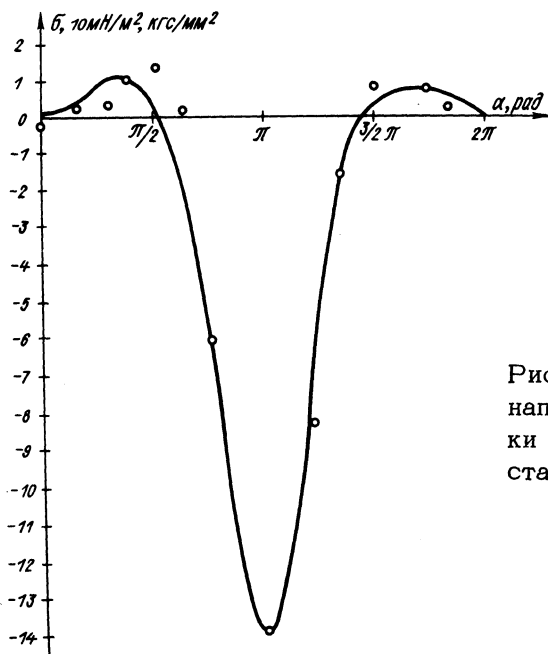


Рис. 4. График радиальных напряжений в районе втулки на внутреннем листе станины прессы K8544.

В результате получим систему 62 уравнений (33 вариационных уравнения, 17 уравнений внутренних связей, 2 кинематические связи, 10 статических связей) с 62-мя неизвестными (33 обобщенных перемещения, 29 множителей Лагранжа).

Все расчеты полностью автоматизированы и производятся на ЭВМ "Минск-22М" по составленным программам. Время счета составляет 15 + 20 мин машинного времени. Результаты расчета приведены на рис. 4. Отсчет угла приведен на рис. 3. На рис. 4 точками отмечены результаты тензометрирования станины в районе втулки. Сравнение радиальных расчетных и экспериментальных напряжений обнаруживает хорошее совпадение их в исследуемой зоне.

Л и т е р а т у р а

1. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967. 2. Кондратюк В.Ф., Крушевский А.Е. К вопросу расчета станины прессы К8544 на прочность. - В сб.: Технология торфяного производства и торфяные машины. Вып. 2. Минск, 1973.

Н.Я. Бойко

К ВОПРОСУ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ЧАСТНЫХ ВИДАХ НАГРУЗКИ

Рассматривается равновесие упругого параллелепипеда в случае растяжения (сжатия) при заданных на двух противоположных гранях касательных напряжениях и нормальных перемещениях и в случае изгиба при заданных на двух противоположных гранях касательных перемещениях и нормальных напряжениях.

Трудность приложения уравнений упругого равновесия к решению задач растяжения, изгиба и кручения различных тел, в том числе и прямоугольного параллелепипеда, состоит в интегрировании этих уравнений при точном удовлетворении граничных условий.

М.М. Филоненко-Бородич (10, 11) для решения задачи об упругом равновесии прямоугольного параллелепипеда ввел в рассмотрение косинус-биномы – последовательность неортогональных функций. Идея решения задачи заключается в разбиении тензора напряжений на две части: основной и корректирующий тензор, построенный при помощи косинус-биномов и их производных. М.М. Филоненко-Бородичу принадлежат соображения о выборе основного тензора для любым образом нагруженного параллелепипеда. Граничные условия удовлетворяются точно.

Изучению задачи о равновесии параллелепипеда при помощи бесконечных систем посвящены работы Г.М. Валова [4], Э.Н. Байды [2], А.А. Баблюяна и С.М. Саакяна [1], Б.С. Бегуна и Е.А. Палатникова [3], С.М. Саакяна [8, 9].

Напряженное состояние упругого параллелепипеда с заданными на границах нормальными напряжениями и смещениями изучает И.П. Цай [13], решение предлагается в рядах. Для ортотропного параллелепипеда [12] решения в перемещениях представлены в виде двойных бесконечных тригонометрических рядов с произвольными коэффициентами и с экспоненциальным сомножителем. Значения коэффициентов рекомендуется находить методом Фурье из краевых условий на гранях параллелепипеда.

На основании уравнений Ламе с использованием кубической решетки и вариационно-разностного метода (5) рассматривалась задача сжатия однородного ортотропного параллелепипеда вдоль вертикальной оси частично распределенной симметричной нагрузкой и задача изгиба кубической ортотропной или изотропной плиты с закрытой полостью, размещенной в центре плиты, заделанной по боковым граням, под действием частично распределенной вдоль вертикальной оси симметричной нагрузки (6).

В этой статье решение поставленных задач ведем на основе вариационного метода перемещений, используя ряды Фурье, неполнота которых на концах отрезка устраняется дополнительными членами.

Искомые перемещения запишем в виде рядов:

$$u = U_0 + \frac{2z}{h} U_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(U_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + U_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \right) ;$$

$$\begin{aligned}
 v &= V_0 + \frac{2z}{h} V_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(V_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + \right. \\
 &+ V_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \left. \right); \\
 w &= W_0 + \frac{2z}{h} W_1 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) W_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(W_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} + \right. \\
 &+ W_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} \left. \right).
 \end{aligned} \quad (1)$$

Причем обобщенные перемещения (дополнительные функции) $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ находятся из условий на торцах:

$$\text{при } z = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau_{zx} = \pm x \frac{\pm}{z}, \quad \tau_{zy} = \pm y \frac{\pm}{z}, \quad w = w \frac{\pm}{z}$$

$$\text{в задаче А и при } z = \pm \frac{h}{2} \quad u = u \frac{\pm}{z}; \quad v = v \frac{\pm}{z}; \quad \sigma_z = \pm Z \frac{\pm}{z};$$

в задаче Б:

$$U_1 = \frac{u_z^+ - u_z^-}{2}; \quad V_1 = \frac{v_z^+ - v_z^-}{2}; \quad W_1 = \frac{w_z^+ - w_z^-}{2};$$

$$U_2 = \frac{h}{12} \left[\frac{X_z^+ + X_z^-}{G} - \frac{d}{dx} (w_z^+ - w_z^-) \right]; \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{h}{12} \left[\frac{Y_z^+ + Y_z^-}{G} - \frac{d}{dy} (w_z^+ - w_z^-) \right];$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \frac{h}{12\gamma} \left[\frac{Z_z^+ + Z_z^- + B(\tau_z^+ + \tau_z^-)}{G} - \gamma_2 \frac{d}{dx} (u_z^+ - u_z^-) - \right. \\
 &- \left. \frac{d}{dy} (v_z^+ - v_z^-) \right].
 \end{aligned}$$

Для определения функций $U_0, V_0, W_0, U_{ic}, V_{ic}, W_{ic}, U_{is}, V_{is}, W_{is}$ используем разложения

$$U_o = U_{oo} + \frac{2y}{b} U_{o1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{o2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_{okc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + U_{oks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$V_o = V_{oo} + \frac{2y}{b} V_{o1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) V_{o2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(V_{okc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + V_{oks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$W_o = W_{oo} + \frac{2y}{b} W_{o1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) W_{o2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(W_{okc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + W_{oks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$U_{ic} = U_{ico} + \frac{2y}{b} U_{ic1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{ic2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_{ickc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + U_{icks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$V_{ic} = V_{ico} + \frac{2y}{b} V_{ic1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) V_{ic2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(V_{ickc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + V_{icks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right); \quad (3)$$

$$W_{ic} = W_{ico} + \frac{2y}{b} W_{ic1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) W_{ic2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(W_{ickc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + W_{icks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$U_{is} = U_{iso} + \frac{2y}{b} U_{is1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{is2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(U_{iskc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + U_{isks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$V_{is} = V_{iso} + \frac{2y}{b} V_{is1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) V_{is2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(V_{iskc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + V_{isks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right);$$

$$W_{is} = W_{iso} + \frac{2y}{b} W_{is1} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) W_{is2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(W_{iskc} \cos \frac{2\pi ky}{b} + W_{isks} \sin \frac{2\pi ky}{b} \right).$$

Для нахождения оставшихся 45 неизвестных функций имеем 27 уравнений равновесия внутри параллелепипеда, полученных из вариационного уравнения равновесия элементарного столбика тела [7], и 18 уравнений равновесия на поверхности (на гранях $y = \pm \frac{b}{2}$), полученных из условий удовлетворения краевым задачам на этих гранях. Причем для краевых задач А и Б по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ дополнительные функции $U_{01}, U_{02}, V_{01}, V_{02}, W_{01}, W_{02}, U_{ic1}, U_{ic2}, V_{ic1}, V_{ic2}, W_{ic1}, W_{ic2}, U_{is1}, U_{is2}, V_{is1}, V_{is2}, W_{is1}, W_{is2}$

находятся сразу из краевых условий на этих гранях. Остальные функции разложений (3) для краевых задач А и Б по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ находятся из дифференциальных уравнений конечного порядка. Для других же краевых задач по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ для отыскания части или большинства дополнительных функций составляются дифференциальные уравнения бесконечного порядка.

В качестве примеров рассмотрим следующие задачи:

- 1) равновесие упругого параллелепипеда при заданных на его гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ нормальных перемещениях и касательных напряжениях и на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ касательных напряжениях и нормальных перемещениях или касательных перемещениях и нормальных напряжениях;
- 2) равновесие упругого параллелепипеда при заданных на его гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ и $z = \pm \frac{h}{2}$ касательных напряжениях и нормальных перемещениях или касательных перемещениях и нормальных напряжениях;
- 3) равновесие упругого параллелепипеда при заданных на его гранях $y = \pm \frac{b}{2}$ напряжениях и на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ касательных напряжениях и нормальных перемещениях или касательных перемещениях и нормальных напряжениях.

Перечисленные три задачи-примеры имеют 27 объемных вариационных уравнений и 18 различных поверхностных уравнений. Кроме того, 45 уравнений для каждой из трех задач-примеров распадаются на несколько независимых групп уравнений, содержащих соответственно несколько групп перемещений.

Приведем несколько таких групп перемещений для трех задач-примеров с решением некоторых частных задач, допускаемых каждой из групп.

Группа, содержащая неизвестные функции W_{00}, W_{02}, W_{0kc}

$$W_{02} = \frac{b}{12Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Z_y^+ + Z_y^-) dz - \frac{b}{6h} \left[V_1 \left(\frac{b}{2} \right) - V_1 \left(-\frac{b}{2} \right) \right];$$

$$\frac{hb}{2} \frac{d^2}{dx^2} W_{00} + \frac{6h}{b} W_{02} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} U_1 dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} V_1 dy + \frac{1}{G} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[Z_z^+ + Z_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_3 dz \right] dy = 0; \quad (4)$$

$$\frac{h}{2} \frac{d^2}{dx^2} W_{02} \left(\frac{3b \cos \pi k}{\pi^2 k^2} + \frac{hb}{4} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{h\pi^2 k^2}{b} \right) W_{0kc} +$$

$$+ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} U_1 \cos \frac{2\pi ky}{b} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dy} V_1 \cos \frac{2\pi ky}{b} dy + \frac{1}{2G} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x$$

$$x (Z_z^+ + Z_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} K_3 dz) \cos \frac{2\pi ky}{b} dy = 0,$$

дает следующие перемещения:

$$u = \frac{2z}{h} U_1; \quad v = \frac{2z}{h} V_1; \quad (5)$$

$$W = W_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) W_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} W_{0kc} \cos \frac{2\pi ky}{b}.$$

Рассмотрим частную задачу этой группы: упругий невесомый параллелепипед, грань которого $x = +\frac{a}{2}$ закреплена, грань $x = -\frac{a}{2}$ свободна, а грани $z = \pm \frac{h}{2}$ с известными касательными перемещениями (при $z = \pm \frac{h}{2}$ $v = u = 0$) и с извест-

ными нормальными напряжениями ($\sigma_z = 0$ при $z = \pm \frac{h}{2}$) свободны, подвержен действию касательной нагрузки при $y = \pm \frac{b}{2} \tau_{zy} = T$ и при $y = -\frac{b}{2} \tau_{zy} = T$, равномерно распределенной по граням $y = \pm \frac{b}{2}$, на которых известны еще нормальные перемещения (при $y = \pm \frac{b}{2} v = 0$) и касательные напряжения (при $y = \pm \frac{b}{2} \tau_{zy} = 0$).

Перемещения и напряжения имеют вид:

$$u = 0; v = 0; w = \frac{T}{bG} \left(\frac{3}{4} a^2 - ax - x^2 \right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{bT}{6G} - \frac{Tb}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi^2 k^2 \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\pi ka}{b} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi ka}{b} \right)} \operatorname{ch} \left[\frac{\pi k}{b} (a+2x) \right] x \cos \frac{2\pi ky}{b}; \quad (6)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{T}{b} (a+2x) - 2T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\pi ka}{b} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi ka}{b} \right)} x \operatorname{ch} \left[\frac{\pi k}{b} (a+2x) \right] \cos \frac{2\pi ky}{b};$$

$$\tau_{zy} = \frac{2T}{b} y - 2T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k}{\pi k \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\pi ka}{b} + \operatorname{ch}^2 \frac{\pi ka}{b} \right)} x \operatorname{ch} \left[\frac{\pi k}{b} (a+2x) \right] \sin \frac{2\pi ky}{b};$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \sigma_z = 0.$$

Это же решение (6) получается и для задачи с теми же условиями по граням $x = \pm \frac{a}{2}$, $z = \pm \frac{h}{2}$ и с теми же касательными напряжениями по граням $y = \pm \frac{b}{2}$, но вместо известных нормальных перемещений по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ заданы нормальные напряжения (при $y = \pm \frac{b}{2} \sigma_y = 0$).

Эта же частная задача для всех трех различных граничных задач по граням $y = \pm \frac{b}{2}$, но с закреплением параллелепипеда и по грани $x = -\frac{a}{2}$ будет иметь решение:

$$u = 0; \bar{v} = 0; w = \frac{T_1}{bG} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{bT_1}{6G} -$$

$$- \frac{T_1 b}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k ch \frac{2\pi k x}{b}}{\pi^2 k^2 ch \frac{\pi k a}{b}} \cos \frac{2\pi k y}{b};$$

$$\tau_{zx} = -\frac{2T_1}{b} x - 2T_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k sh \frac{2\pi k x}{b}}{\pi k ch \frac{\pi k a}{b}} \cos \frac{2\pi k y}{b}; \quad (7)$$

$$\tau_{zy} = \frac{2T_1}{b} y + 2T_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi k ch \frac{2\pi k x}{b}}{\pi k ch \frac{\pi k a}{b}} \sin \frac{2\pi k y}{b};$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0.$$

В случае частично распределенной по площади $c_1 c_3$ грани симметричной касательной нагрузки интенсивности q решение системы уравнений (6) и системы уравнений (7) следует строить при:

$$T = T_1 = \frac{c_1 c_3 q}{ah} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q c_3}{\pi m h} \sin \frac{\pi m c_1}{a} \cos \frac{2\pi m x}{a} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q c_1}{a \pi n} \sin \frac{\pi n c_3}{h} \cos \frac{2\pi n z}{h} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{\pi^2 m n} x$$

$$x \sin \frac{\pi m c_1}{a} \sin \frac{\pi n c_3}{h} \cos \frac{2\pi m x}{a} \cos \frac{2\pi n z}{h}.$$

Группа, содержащая неизвестные функции $U_{00}, U_{02}, U_{0ks}, V_{01}, V_{0ks}$, которые определяются из уравнений:

$$V_{01} = \frac{1}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (v_y^+ - v_y^-) dz; U_{02} = \frac{b}{12Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (X_y^+ + X_y^-) dz - \frac{b}{G} \frac{d}{dx} V_{01}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U_{00} = -\frac{12}{b^2 \gamma} U_{02} - \frac{2(\gamma-1)}{\gamma b} \frac{d}{dx} V_{01} - \frac{2\gamma_2}{b\gamma h} \frac{d}{dx} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} W_1 dy -$$

$$-\frac{1}{G\gamma hb} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[X_z^+ + X_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (K_1 - B \frac{d}{dx} \tau) dz \right] dy;$$

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} \right) U_{0kc} + (\gamma-1) \pi k \frac{d}{dx} V_{0ks} = \\ & = -\frac{3\gamma bc_0 \pi k}{\pi^2 k^2} \frac{d^2}{dx^2} U_{02} - \frac{2\gamma_2}{h} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} W_1 \cos \frac{2\pi ky}{b} dy - \end{aligned} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[X_z^+ + X_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (K_1 - B \frac{d}{dx} \tau) \cos \frac{2\pi ky}{b} dz \right] dy;$$

$$-(\gamma-1) \pi k \frac{d}{dx} U_{0kc} + \frac{b}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} \right) V_{0ks} =$$

$$= \frac{G(\gamma-1) \cos \pi k}{\pi k} \frac{d}{dx} U_{02} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{bc_0 \pi k}{\pi k} V_{01} -$$

$$-\frac{2\gamma_2}{\gamma} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dy} W_1 \sin \frac{2\pi ky}{b} dy - \frac{1}{Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[Y_z^+ + Y_z^- + \right]$$

$$\frac{h}{2} + \int (K_2 - B \frac{d}{dy} \tau) dz \Big] dy, \\ - \frac{h}{2}$$

дает следующие перемещения:

$$u = U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{\gamma}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc} \cos \frac{2\pi ky}{b}; \quad (9)$$

$$v = \frac{2\gamma}{b} V_{01} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{0ks} \sin \frac{2\pi ky}{b}; \quad w = \frac{2z}{h} W_1.$$

Следующая группа уравнений содержит неизвестные U_{01} , V_{02} , V_{00} , U_{0ks} , V_{0kc} :

$$U_{01} = \frac{1}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (u_y^+ - u_y^-) dz; \quad V_{02} = \frac{b}{12\gamma Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Y_v^+ + Y_v^-) dz - \\ - \frac{\gamma_2 b}{G\gamma h} \left[W_1\left(\frac{b}{2}\right) - W_1\left(\frac{b}{2}\right) \right] - \frac{\gamma_2 b d}{G\gamma dx} U_{01};$$

$$\frac{2}{b} (\gamma - 1) \frac{d}{dx} U_{01} + \frac{d^2}{dx^2} V_{00} + \frac{12\gamma}{b^2} V_{02} + \frac{2\gamma_2}{bh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} W_1 dy + \\ - \frac{b}{2}$$

$$+ \frac{1}{Gbh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[Y_z^+ + Y_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (K_2 - B \frac{d}{dy} \tau) dz \right] dy = 0;$$

$$- \gamma b \frac{\cos \pi k}{\pi k} \frac{d^2}{dx^2} U_{01} + \left(\frac{\gamma b}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\pi^2 k^2}{b^2} \right) U_{0ks} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{G(\gamma-1) \cos \pi k}{\pi k} \frac{d}{dx} V_{02} - (\gamma-1) \pi k \frac{d}{dx} V_{0kc} + \\
& + \frac{2\gamma_2}{h} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} W_1 \sin \frac{2\pi ky}{b} dy = - \frac{1}{Gh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [X_z^+ + X_z^- + \\
& + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (K_1 - B \frac{d}{dx} \tau) dz] \sin \frac{2\pi ky}{b} dy; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma-1) \frac{d}{dx} U_{0ks} \pi k + \frac{3b \cos \pi k}{\pi^2 k^2} \frac{d^2}{dx^2} V_{02} + \left(\frac{b}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\
& \left. - \gamma \frac{2\pi^2 k^2}{b} \right) V_{0kc} + \frac{2\gamma_2}{h} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dy} W_1 \cos \frac{2\pi ky}{b} dy + \\
& + \frac{1}{Gh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [Y_z^+ + Y_z^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (K_2 - B \frac{d}{dy} \tau) dz] dy = 0
\end{aligned}$$

и определяет перемещения следующего вида:

$$\left. \begin{aligned}
u &= \frac{2y}{b} U_{01} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc} \sin \frac{2\pi ky}{b}; \\
v &= V_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) V_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{0kc} \sin \frac{2\pi ky}{b}; \\
w &= \frac{2z}{h} W_1.
\end{aligned} \right\} (11)$$

Рассмотрим частную задачу этой группы: упругий невесомый параллелепипед, грани которого $x = \pm \frac{a}{2}$ закреплены, а на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ известны нормальные перемещения ($W_z = 0$) и касательные напряжения ($Y_z = 0, X_z = 0$) подвержен действию нормальных напряжений при $y = \pm \frac{b}{2}$ $\sigma_y = T_4$ по граням $y = \pm \frac{b}{2}$, на которых известны касательные перемещения при $y = \pm \frac{b}{2}$ $u = w = 0$.

Перемещения и напряжения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} + x D_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right) \sin \frac{2\pi k y}{b}; \quad w = 0; \\
 v &= \frac{T_4}{bG} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \frac{bT_4}{6\gamma G} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. x \frac{b}{2\pi k} D_k \right) \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} + x D_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \right] \cos \frac{2\pi k y}{b}; \\
 \sigma_x &= \frac{2\gamma_2 y}{\gamma b} T_4 + 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} + x D_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\gamma-1} D_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right] \sin \frac{2\pi k y}{b}; \quad (12) \\
 \sigma_y &= \frac{2y}{b} T_4 - 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} + x D_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} D_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right] \sin \frac{2\pi k y}{b}; \\
 \sigma_z &= \frac{2\gamma_2 y}{\gamma b} T_4 - \frac{2\gamma_2}{\gamma-1} G \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \sin \frac{2\pi k y}{b}; \\
 \tau_{zx} &= 0; \quad \tau_{zy} = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{2}{b} T_4 x + 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} x \right. \\
 &\quad \left. x \left(A_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} + x D_k \operatorname{ch} \frac{2\pi k x}{b} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} D_k \operatorname{sh} \frac{2\pi k x}{b} \right] x
 \end{aligned}$$

$$x \cos \frac{2\pi ky}{b},$$

$$D_k = -\operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} \frac{T_4 b \cos \pi k}{G \gamma \pi^2 k^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{b}{2\pi k} \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} - \frac{a}{2} \right)};$$

$$A_k = \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \frac{abc \cos \pi k T_4}{2\gamma G \pi^2 k^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{b}{2\pi k} \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} - \frac{a}{2} \right)};$$

Еще одна частная задача для этой группы уравнений (10) и перемещений (11): упругий невесомый параллелепипед, грани которого закреплены, a на гранях $z = \pm \frac{h}{2}$ известны нормальные перемещения ($w_z^+ = 0$) и касательные напряжения ($Y_z^+ = 0, X_z^+ = 0$) испытывает касательные смещения при $y = \pm \frac{b}{2} u = u_y^+ = s_3$ и при $y = -\frac{b}{2} u = -u_y^- = s_3$ на свободных гранях $y = \pm \frac{b}{2}$, на которых известны нормальные напряжения (при $y = \pm \frac{b}{2} \sigma_y = 0$) и касательные перемещения (при $y = \pm \frac{b}{2} w = 0$).

Перемещения и напряжения имеют вид:

$$u = \frac{2y}{b} s_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b} + x C_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} \right) \sin \frac{2\pi ky}{b};$$

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(B_k + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{b}{2\pi k} C_k \right) \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} + x C_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b} \right] \cos \frac{2\pi ky}{b};$$

$$w = 0; \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 0;$$

$$\sigma_x = 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} \left(B_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} + x C_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b} \right) + \frac{1}{\gamma-1} C_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} \right] \sin \frac{2\pi ky}{b};$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} (B_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} + x C_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b}) + \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} C_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} \right] \sin \frac{2\pi ky}{b}; \\ \sigma_z = & -\frac{2\gamma_2}{\gamma-1} G \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b} \sin \frac{2\pi ky}{b}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & \frac{2s_3}{b} G + 2G \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi k}{b} (B_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b} + x C_k \operatorname{sh} \frac{2\pi kx}{b}) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\gamma-1} C_k \operatorname{ch} \frac{2\pi kx}{b} \right] \cos \frac{2\pi ky}{b}; \end{aligned}$$

$$\text{где } C_k = -\frac{2s_3 \cos \pi k \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b}}{\pi k \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{b}{2\pi k} \operatorname{sh} \frac{\pi ka}{b} \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b} + \frac{a}{2} \right)};$$

$$B_k = -\frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{\pi ka}{b} C_k + \frac{2s_3 \cos \pi k}{\pi k \operatorname{ch} \frac{\pi ka}{b}}.$$

Следующая группа уравнений содержит неизвестные $U_{is0}, U_{is2}, V_{is1}, W_{ic0}, W_{ic2}$

$$V_{is1} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (v_y^+ - v_y^-) \sin \frac{2\pi iz}{h} dz + \frac{\cos \pi i}{\pi i} \left[V_1 \left(\frac{b}{2} \right) - V_1 \left(-\frac{b}{2} \right) \right]$$

$$U_{is2} = \frac{b \cos \pi i}{6\pi i} \frac{d}{dy} \left[U_1 \left(\frac{b}{2} \right) - U_1 \left(-\frac{b}{2} \right) \right] + \frac{b \cos \pi i}{6\pi i} \frac{d}{dx} x$$

$$x \left[V_1 \left(\frac{b}{2} \right) - V_1 \left(-\frac{b}{2} \right) \right] - \frac{b}{6} \frac{d}{dx} V_{is1} + \frac{b}{6Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (X_y^+ + X_y^-) \sin \frac{2\pi iz}{h} dz;$$

$$W_{ic2} = \frac{b}{6Gh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Z_y^+ + Z_y^-) \cos \frac{2\pi iz}{h} dz - \frac{b\pi i}{3h} V_{is1} -$$

$$- \frac{b \cos \pi i}{2\pi i} \frac{d}{dy} \left[W_2 \left(\frac{b}{2} \right) - W_2 \left(-\frac{b}{2} \right) \right]; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & b \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} - \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) U_{is0} + \frac{12}{b} U_{is2} + 2(\gamma - 1) \frac{d}{dx} V_{is1} - \\ & - \frac{2b\pi i(\gamma - 1)}{h} \frac{d}{dx} W_{ic0} - \frac{2 \cos \pi i}{\pi i} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\gamma \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) U_1 dy - \\ & - \frac{2(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} V_1 dy - \frac{12(\gamma - 1) \cos \pi i}{\pi i h} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d}{dx} W_2 dy + \\ & + \frac{2}{Gh} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(K_1 - B \frac{d}{dx} \tau \right) \sin \frac{2\pi iz}{h} dz \Big] dy = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b\pi i(\gamma - 1) \frac{d}{dx} U_{is0} + 2\pi i(\gamma - 1) V_{is1} + \frac{hb}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) W_{ic0} - \\ & - 2\gamma_2 \cos \pi i \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{d}{dx} U_1 + \frac{d}{dy} V_1 \right) dy + \frac{3h \cos \pi i}{\pi i} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \right. \\ & \left. + \frac{d^2}{dy^2} - \gamma \frac{4\pi^2 i^2}{h^2} \right) W_2 dy + \frac{1}{G} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[(Z_z^+ + Z_z^-) \cos \pi i + \right. \\ & \left. + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(K_3 \cos \frac{2\pi iz}{h} + B \frac{2\pi i}{h} \sin \frac{2\pi iz}{h} \right) dz \right] dy = 0. \end{aligned}$$

Ряды для перемещений этой группы уравнений (14) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{2z}{h} U_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[U_{is0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{is2} \right] \sin \frac{2\pi iz}{h}; \\
 v &= \frac{2z}{h} V_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2y}{b} V_{is1} \sin \frac{2\pi iz}{h}; \\
 w &= \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) W_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[W_{ic0} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) W_{ic2} \right] \cos \frac{2\pi iz}{h}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим частную задачу для систем (14) и (15): уп-

ругий невесомый параллелепипед, грани которого $x = \pm \frac{a}{2}$ закреплены, находится в абсолютно жестких гладких направляющих по граням $y = \pm \frac{b}{2}$ и подвержен действию касательных смещений при $z = \frac{h}{2} u = u_z = s_2$ и при $z = -\frac{h}{2} u = -u_z = s_2$ по граням $z = \pm \frac{h}{2}$, на которых известны касательные перемещения (при $z = \pm \frac{h}{2} v = 0$) и нормальные напряжения (при $z = \pm \frac{h}{2} \sigma_z = 0$).

Для этой частной задачи напряжения и перемещения будут иметь вид:

$$u = \frac{2z}{h} s_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(B_i \operatorname{ch} \frac{2\pi ix}{h} + x C_i \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} \right) \sin \frac{2\pi iz}{h}; \quad v = 0;$$

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(B_i + \frac{h}{2\pi i} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} C_i \right) \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} + x C_i \operatorname{ch} \frac{2\pi ix}{h} \right] \cos \frac{2\pi iz}{h};$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2G \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{h} B_i \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} + \frac{2\pi i}{h} x C_i \operatorname{ch} \frac{2\pi ix}{h} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\gamma-1} C_i \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} \right) \sin \frac{2\pi iz}{h};
 \end{aligned}$$

$$\sigma_y = -G \frac{2\gamma_2}{\gamma-1} \sum_{i=1}^{\infty} C_i \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} \sin \frac{2\pi iz}{h}; \quad \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0;$$

$$\sigma_z = -2G \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{h} B_i \operatorname{sh} \frac{2\pi i x}{h} + \frac{2\pi i}{h} x C_i \operatorname{ch} \frac{2\pi i x}{h} + \right. \\ \left. + \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} C_i \operatorname{sh} \frac{2\pi i x}{h} \right) \sin \frac{2\pi i z}{h}; \\ \tau_{xy} = \frac{2s_2}{h} + 2G \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi i}{h} B_i \operatorname{ch} \frac{2\pi i x}{h} + \frac{2\pi i}{h} x C_i \operatorname{sh} \frac{2\pi i x}{h} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\gamma-1} C_i \operatorname{ch} \frac{2\pi i x}{h} \right) \cos \frac{2\pi i z}{h},$$

$$\text{где } C_i = -\operatorname{sh} \frac{\pi i a}{h} \frac{2s_2 \cos \pi i}{\frac{a}{2} + \frac{h}{2\pi i} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \operatorname{sh} \frac{\pi i a}{h} \operatorname{ch} \frac{\pi i a}{h}} \pi i;$$

$$B_i = \frac{2s_2 \cos \pi i}{\pi i \operatorname{ch} \frac{\pi i a}{h}} - \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{\pi i a}{h} C_i.$$

В приведенных частных задачах приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu}; \quad B = 2G\alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu},$$

где ν – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига; α – коэффициент линейного расширения; τ – закон распределения температуры тела.

Таким образом, решение рассмотренных задач построено в ортогональных рядах, коэффициенты которых определяются из условий нагружения (закрепления) параллелепипеда по граням

$$x = \pm \frac{a}{2}.$$

Путем совмещения решений построенных частных задач можно получить решение более сложных задач при точном удовлетворении краевых условий.

Л и т е р а т у р а

1. Баблоян А.А., Саакян С.М. О двух задачах о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. – "Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук", 1964, № 6.
2. Байда Э.Н. Напряженное состояние упругого параллелепипеда. – Труды Ленингр. инж.-строит. ин-та,

1966, вып. 49. 3. Бегун Б.С., Палатников Е.А. Пространственная задача теории упругости для прямоугольного параллелепипеда. – Труды Гипронеавиапрома, 1968, вып. 3. 4. Валов Г.М. Первая основная задача теории упругости для прямоугольного параллелепипеда. – ПММ, 1966, № 6. 5. Варвак П.М., Коновалюк Д.М. Напряженно-деформированное состояние сплошного ортотропного параллелепипеда. – В сб.: Расчет пространственных и строительных конструкций. Вып. 2. Куйбышев, 1971. 6. Варвак П.М., Коновалюк Д.М. Об одном случае изгиба кубической плиты с закрытой полостью. – В сб.: Расчет пространственных и строительных конструкций. Вып. 2. Куйбышев, 1971. 7. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. Минск, 1967. 8. Саакян С.М. Об одной смешанной задаче упругого равновесия прямоугольной призмы. – ДАН Арм. ССР, № 2, 1965. 9. Саакян С.М. Об одной задаче равновесия прямоугольного параллелепипеда. – "Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук", № 5, 1965. 10. Филоненко-Бородич М.М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. – ПММ, 1951, т. 15, вып. 2. 11. Филоненко-Бородич М.М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. – ПММ, 1951, т. 15, вып. 5. 12. Цай И.П. Напряженное состояние ортотропного параллелепипеда. – В сб.: Математика и механика. Тезисы докл. 4-й Казах. межвуз. науч. конф. по математике и механике. Ч. 2. Алма-Ата, 1971. 13. Цай И.П. Напряженное состояние упругого параллелепипеда. – Труды семинара кафедр теор. механики и высш. математики. Джембульск. технол. ин-та легкой и пищевой пром. 1972. вып. 2.

С.С. Гурин, Е.Н. Ламбина

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В БИМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОТЛИВКАХ

Постановка задачи. Рассмотрим один из методов изготовления биметаллических отливок. В форме соосно с ней устанавливают сердечник, представляющий собой сплошной или

полый толстостенный цилиндр. Поверхность последнего покрывается тонким слоем легкоплавкого металла. В пространство между сердечником и формой заливается металл, образующий после затвердевания внешнюю часть биметаллической отливки. При малой по сравнению с диаметром высоте отливка будет представлять собой биметаллический диск. Нами ставится задача определить термоупругие напряжения в диске, возникающие при его изготовлении.

Примем следующие обозначения: $\sigma_r^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}$ - радиальные и окружные напряжения в сердечнике; $\sigma_r^{(2)}, \sigma_\theta^{(2)}$ - радиальные и окружные напряжения во внешней части диска; E_1, ν_1, α_1 и E_2, ν_2, α_2 - модули Юнга, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного расширения металлов внутренней и внешней части диска соответственно; ρ и R_1 - внутренний и внешний радиусы сердечника; R_2 - радиус формы; $T=T(r, t)$ - температура в момент времени в точке на расстоянии от центра диска; $T_0 = \text{const}$ - температура после окончательного охлаждения диска; $u_r^{(1)} = u_r^{(1)}(r, t)$ и $u_r^{(2)} = u_r^{(2)}(r, t)$ - радиальные перемещения; t_1 - момент времени, соответствующий затвердеванию материала промежуточного слоя, покрывающего сердечник.

Приведем обозначения для средних температурных резкостей в кольцевых областях с радиусами ρ, r и R_1, r .

$$\theta_1(r, t) = \frac{2}{r^2 - \rho^2} \int_{\rho}^r (T - T_0) r dr \quad (\rho \leq r \leq R_1);$$

$$\theta_2(r, t) = \frac{2}{r^2 - R_1^2} \int_{R_1}^r (T - T_0) r dr \quad (R_1 \leq r \leq R_2).$$

Определение термоупругих напряжений до момента затвердевания промежуточного слоя. Будем полагать напряженное состояние диска плоским. Расплавленный металл слоя играет роль зазора между сердечником и внешней частью диска. Поэтому напряжения вычисляются по известным формулам теории термоупругости (1, 2) для кольце-

вых областей со свободными границами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{\alpha_1 E_1}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \left[\theta_1(R_1, t) - \theta_1(r, t) \right]; \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\alpha_1 E_1}{2} \left[\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \theta_1(R_1, t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \theta_1(r, t) - 2(T - T_0) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= \frac{\alpha_2 E_2}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) \left[\theta_2(R_2, t) - \theta_2(r, t) \right]; \\ \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{\alpha_2 E_2}{2} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) \left[\theta_2(R_2, t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) \theta_2(r, t) - 2(T - T_0) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если в формулах (1) и (2) положить $t = t_1$, то получим напряжения в момент затвердевания слоя.

Формулы (1) и (2) могут быть справедливыми лишь в небольшом промежутке времени, предшествовавшем моменту затвердевания слоя, в связи с изменением свойств материалов

при повышенных температурах. При высоких температурах напряжения, вычисленные по (1) и (2), можно рассматривать лишь как условные термоупругие напряжения.

Определение температурных напряжений после затвердевания легкоплавкого слоя. Введем обозначения:

$$S_1 = \theta_1(R_1, t_1); \quad S_2 = \theta_2(R_2, t_1).$$

Вычислим радиальные напряжения на стыке внешней и внутренней части диска в момент t_1 .

$$\left. \begin{aligned} u_2^{(1)}(R_1, t_1) &= \alpha_1 R_1 S_1 ; \\ u_r^{(2)}(R_1, t_1) &= \alpha_2 R_1 S_1 . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Рассмотрим граничные условия задачи

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=\rho} &= 0 ; \\ \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_1} ; \\ \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_2} &= 0 ; \\ u_r^{(2)} \Big|_{r=R_1} - u_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} &= R_1 (\alpha_2 S_2 - \alpha_1 S_1) . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Последнее граничное условие эквивалентно условию

$$\varepsilon_\theta^{(2)} \Big|_{r=R_1} - \varepsilon_\theta^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \alpha_2 S_2 - \alpha_1 S_1 , \quad (5)$$

где $\varepsilon_\theta^{(1)}$ и $\varepsilon_\theta^{(2)}$ - окружные деформации.

(При формулировке граничных условий полагаем, что напряжения в диске при $t > t_1$ будут такими же, какими они были бы при непосредственном контактировании частей диска. Это предположение выполняется точно при полном выдавливании материала легкоплавкого промежуточного слоя из отливки.)

$$\text{Обозначим } \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_1} = -p .$$

Тогда напряжения в диске можно рассматривать как совокупность температурных напряжений, возникающих в кольцевых областях со свободными границами, и напряжений, вызванных

внешним давлением p (для сердечника) и внутренним давлением p (для наружной части диска).

Напряжения, вызываемые внешним и внутренним давлением в кольцевых областях, известны (3).

Получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{\alpha_1 E_1}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \left[\theta_1(R_1, t) - \theta_1(r, t) \right] - \\ &- \frac{R_1^2}{R_1^2 - \rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) p ; \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\alpha_1 E_1}{2} \left[\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) \theta_1(R_1, t) + \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right) \theta_1(r, t) - \right. \\ &\left. - 2(T - T_0) \right] - \frac{R_1^2}{R_1^2 - \rho^2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) p . \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= \frac{\alpha_2 E_2}{2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) \left[\theta_2(R_2, t) - \theta_2(r, t) \right] + \\ &+ \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) p ; \\ \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{\alpha_2 E_2}{2} \left[\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) \theta_2(R_2, t) + \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) \theta_2(r, t) - \right. \\ &\left. - 2(T - T_0) \right] + \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) p . \end{aligned} \right\} (7)$$

При этом первые три граничных условия (4) выполняются непосредственно.

Вычислим

$$\varepsilon_{\theta}^{(1)}(R_1, t) \quad \varepsilon_{\theta}^{(2)}(R_2, t).$$

Получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^{(2)}(R_2, t) &= \alpha_2 \theta_2(R_2, t) + \frac{p}{E_2} \left[\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \gamma_2 \right]; \\ \varepsilon_{\theta}^{(1)}(R_1, t) &= \alpha_1 \theta_1(R_1, t) + \frac{p}{E_1} \left[\gamma_1 - \frac{R_1^2 + \rho^2}{R_1^2 - \rho^2} \right]. \end{aligned} \right\} (8)$$

Подставляя (7) в (5), определяем p :

$$p = \frac{\alpha_2 S_2 - \alpha_1 S_1 - [\alpha_2 \theta_2(R_2, t) - \alpha_1 \theta_1(R_1, t)]}{L}; \quad (9)$$

$$\text{где } L = \frac{1}{E_2} \left[\frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \gamma_2 \right] + \frac{1}{E_1} \left[\frac{R_1^2 + \rho^2}{R_1^2 - \rho^2} - \gamma_1 \right]. \quad (10)$$

Таким образом, температурные напряжения после затвердевания промежуточного слоя определяются по формулам (6) и (7), где p вычисляется по формуле (9).

Определение остаточных термоупругих напряжений. Положим в (6) и (7) $T = T_0$.

Тогда

$$\theta_1(r, t) = \theta_2(r, t)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0}^{(1)} &= - \frac{R_1^2}{R_1^2 - \rho^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) p_0; \\ \sigma_{\theta_0}^{(1)} &= - \frac{R_1^2}{R_1^2 - \rho^2} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) p_0. \end{aligned} \right\} (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0}^{(2)} &= \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right) p_0 ; \\ \sigma_{\theta_0}^{(2)} &= \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) p_0 , \end{aligned} \right\} (12)$$

где

$$p_0 = \frac{\alpha_2 S_2 - \alpha_1 S_1}{L} .$$

Таким образом, остаточные термоупругие напряжения определяются температурным полем диска в момент затвердевания промежуточного слоя.

Положив во всех формулах $\rho = 0$, получим решение задачи для случая сплошного сердечника.

Л и т е р а т у р а

1. Безухов Н.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М., 1965.
2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев, 1970.
3. Никифоров С.Н. Теория упругости и пластичности. М., 1955.

А.Н. Дубко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСС ТЯЖЕЛЫХ ТОЧЕК НА ПРИВЕДЕННЫХ СХЕМАХ БАЛОК ПРИ РАСЧЕТАХ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для определения частот собственных изгибных колебаний балки приведенную схему этой балки целесообразно представлять в виде невесомой упругой связи с некоторым количеством тяжелых точек. Частоты колебаний такой схемы получа-

ются в результате решения векового уравнения, структура которого не зависит от способа закрепления балки и закона распределения полезной нагрузки. Это обстоятельство весьма ценно при решении задач на ЭЦВМ, так как оно позволяет составить всего одну программу, которая может быть использована в задачах об определении частот балок с самыми разнообразными конструктивными особенностями. Если же балку привести к схеме с распределенной массой, то ее частоты получаются путем решения частотного трансцендентного уравнения, вид которого изменяется очень резко при самых незначительных изменениях в схеме балки или ее полезной нагрузки. Например, частотное уравнение однородной консольной балки с защемленным концом имеет вид

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \alpha + 1 = 0.$$

Если же поместить на балку массу, сосредоточенную в одной точке, то частоты ее собственных изгибных колебаний определяются из уравнения [1]

$$\begin{aligned} S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha) + \alpha n S[\alpha(1-x)] \{ S(\alpha)V(\alpha x) - \\ - T(\alpha)U(\alpha x) \} + \alpha n T[\alpha(1-x)] \{ S(\alpha)U(\alpha x) - \\ - V(\alpha)V(\alpha x) \} = 0, \end{aligned}$$

где S, T, U, V – балочные функции А.Н. Крылова; n – отношение массы полезной нагрузки к массе балки; x – относительная координата тяжелой точки.

Значительное структурное различие представленных уравнений не позволяет составить одну общую для них программу машинного решения. Вообще можно утверждать, что применение стандартных программ для решения частотных уравнений балок с распределенными параметрами практически невозможно. Именно поэтому приведенную схему балки в виде упругой невесомой связи с тяжелыми точками можно рассматривать как достаточно перспективную.

Однако теории построения таких схем пока уделяется недостаточное внимание, а некоторые серьезные работы допускают неточности в этом вопросе, рекомендуя массы тяжелых точек принимать равными распределенным массам соответствующих участков балок. Ошибочность этого тезиса может быть обнаружена с помощью самых простых примеров. Допустим, что надо определить низшую собственную частоту однородной балки на двух шарнирных опорах. Учет распределения массы по всей длине дает

$$k = \frac{\pi^2}{l} \sqrt{\frac{E I}{m l}} .$$

Если же теперь решить ту же задачу о колебаниях модели балки в виде невесомой связи с одной тяжелой точкой на середине пролета, то

$$k = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{48 E I}{m_{\text{пр}} l}} .$$

Из сравнения частот следует

$$m_{\text{пр}} \approx 0,4863 m ,$$

т.е. величина массы тяжелой точки в данном случае приблизительно в два раза меньше массы балки. Для ступенчатых балок подобные соотношения значительно сложнее. Ясно, что простое сосредоточение массы, распределенной вдоль некоторого участка, приводит в одной точке к значительным искажениям значений частот. Поэтому при построении приведенной схемы балки сразу возникает вопрос об отыскании величин масс тяжелых точек. Решение этой задачи можно получить, если выполнить следующее условие. Рассматриваемая балка и ее приведенная схема должны быть динамически подобными, т.е. все их частоты с одинаковыми номерами должны совпадать. Математическое выполнение этого требования приводит к следующему результату.

Согласно формуле Рэлея [4], максимум кинетической энергии T_{max} и потенциальной энергии колеблющегося тела

Π_{max} при сохранении количества энергии одинаковы.

Так как $T_{\text{max}} = k^2 A$, где k – частота собственных колебаний, то $k^2 = \frac{\Pi_{\text{max}}}{A}$.

Составив подобные соотношения для приведенной схемы и сравнив частоты балки и ее схемы, можно установить, что кинетические и потенциальные энергии балки и ее схемы должны быть соответственно пропорциональными и, в частности, совпадать. Равенство потенциальных энергий используется при подборе изгибной жесткости приведенной схемы. А равенство кинетических энергий может быть взято в качестве условия, с помощью которого определяются массы тяжелых

точек на схеме балки. Если количество таких точек на схеме балки взять равным количеству мест естественной концентрации массы балки, то массы этих точек можно определить так. Сначала балку, если она имеет ступени, надо привести к постоянной жесткости, выбрав одно из сечений балки в качестве основного (например, № 1) и введя коэффициенты $\xi_i = \frac{I_i}{I_1}$. Тогда масса каждого участка новой балки равна $m_i^* = m_1 \xi_i$. Далее удобно массы всех участков выразить через массу одного какого-либо участка и коэффициенты пропорциональности масс. Тогда $m_i^* = m_1 \nu_i \xi_i$.

Здесь $\nu_i = \frac{m_i}{m_1}$.

Если предположить теперь, что каждый участок однороден и задать уравнение динамической упругой линии в виде $y(x, t) = f(x) \sin k t$, то кинетическая энергия элемента бесконечно малой длины i -ой ступени определится так:

$$dT_i = \frac{m_1 \nu_i}{2 \Delta l_i} dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2,$$

а всей балки

$$T_0 = \frac{m_1 k^2 \cos^2 k t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i \xi_i^2}{\Delta l_i}, \quad (1)$$

Здесь $\xi_i = \frac{1}{l} \int_{l_{i-1}}^{l_i} f^2(x) dx$,

где l_{i-1} - координата начала i -ой ступени; l_i - координата конца этой ступени.

Функцию ξ_i можно назвать функцией конструктивных особенностей балки. Ее значения для балок с различными способами закрепления можно вычислить и табулировать для использования в качестве справочного материала при численном решении задачи.

Теперь определим кинетическую энергию приведенной схемы балки. Массы тяжелых точек ее также можно выразить через некоторую массу m_0 и введенные выше коэффициенты пропорциональности масс ν_i . Кинетическая энергия i -ой точки определится выражением

$$T_i = \frac{m_0 \nu_i}{2} \left[\frac{\partial y(x_i, t)}{\partial t} \right]^2,$$

а всей схемы

$$T_c = \frac{m_0 k^2 \cos^2 kt}{2} \sum_{i=1}^n \nu_i f^2(x_i, 0). \quad (2)$$

Из сравнения выражений (1) и (2) следует

$$m_0 = m_1 l \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i \xi_i \zeta_i}{\Delta l_i}}{\sum_{i=1}^n \nu_i f^2(x_i)}$$

Имея массу m_0 и коэффициенты пропорциональности ν_i можно определить величины масс тяжелых точек на приведенной схеме балки.

Решение данной задачи проведено с предположением о пренебрежимо малом влиянии инерции поворота поперечного сечения изогнутой балки на ее жесткость. Точность решения оказывается теоретически равной точности метода Рэлея [4], [2], [3].

Л и т е р а т у р а

1. Ананьев И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. М., 1946. 2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М., 1958. 3. Пономарев С.Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. М., 1952. 4. Рэлей Дж., Стретт В. Теория звука, М., 1955.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ТЕНЗОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ
ТРАНСЛЯЦИЙ И ПОВОРОТОВ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В ряде задач механики абсолютно твердого тела возникает необходимость преобразования тензоров не только при изменении ориентации системы координат относительно тела, но и при изменении положения ее начала (полюса). Такая необходимость возникает, в частности, при анализе броуновского движения жесткой несферической частицы [1 - 3].

Условимся в дальнейшем в качестве обобщенных координат q^\wedge , определяющих положение твердого тела, выбирать координаты полюса и набор угловых переменных, определяющих ориентацию тела. Тогда в шестимерном пространстве трансляций тела вдоль осей системы координат Ox_1, x_2, x_3 и вращений относительно этих же осей удобно ввести векторы обобщенных сил X_O^\vee и скоростей W_O^\wedge

$$X_O^\vee = \begin{pmatrix} F \\ M_O \end{pmatrix}; \quad W_O^\wedge = \begin{pmatrix} V_O \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (1)$$

компонентами которых являются главный вектор F и главный момент M_O относительно полюса O системы сил, действующей на тело, и линейная скорость V_O полюса и угловая скорость ω тела.

Динамические уравнения движения в шестимерном пространстве могут быть записаны в тензорной форме [2 - 4]

$$\frac{dp_O^\vee}{dt} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial I_O^{\vee\vee}}{q^\wedge} \cdot W_O^\wedge \right) \cdot W_O^\wedge = X_O^\vee, \quad (2)$$

где $I_O^{\vee\vee}$ - тензор коэффициентов инерции, играющий роль ковариантного метрического тензора. Вид этого тензора определяется кинетической энергией тела [3]

$$2K = \widetilde{W}_O^\wedge \cdot I_O^{\vee\vee} \cdot W_O^\wedge. \quad (3)$$

Тензорные обозначения не являются традиционными. Ковариантные составляющие тензоров в рассматриваемом римановом

новом пространстве с метрикой I обозначаются индексом \vee , а контравариантные - индексом \wedge . В уравнение (2) входит обобщенный импульс (или ковариантные составляющие обобщенной скорости)

$$p_{\circ}^{\vee} = \partial K / \partial W_{\circ}^{\wedge} = I_{\circ}^{\vee\vee} \cdot W_{\circ}^{\wedge} = W_{\circ}^{\vee}. \quad (4)$$

Внутреннее произведение тензоров обозначается точкой, а операция транспонирования - тильдой.

Рассмотрим прежде всего преобразование векторов при изменении положения полюса.

Контравариантные составляющие преобразуются согласно выражению

$$W_{\text{P}}^{\wedge} = \begin{pmatrix} V_{\text{P}} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\circ} + (\varepsilon \cdot r) \cdot \omega \\ \omega \end{pmatrix} = \beta^{\wedge\vee} \cdot W_{\circ}^{\wedge}. \quad (5)$$

Отсюда следует явный вид матрицы преобразования контравариантных составляющих

$$\beta^{\wedge\vee} = \begin{pmatrix} E & \varepsilon \cdot r \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где E и ε - единичный тензор и тензор Леви-Чивитта соответственно в трехмерном пространстве, а $r = \overrightarrow{OP}$.

Для определения закона преобразования ковариантных составляющих вектора рассмотрим обобщенную силу

$$X_{\text{P}}^{\vee} = \begin{pmatrix} F \\ M_{\text{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ M_{\circ} + (\varepsilon \cdot r) \cdot F \end{pmatrix} = \beta^{\vee\wedge} X_{\circ}^{\vee}. \quad (7)$$

Матрица искомого преобразования имеет вид

$$\beta^{\vee\wedge} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \varepsilon \cdot r & E \end{pmatrix}, \quad (8)$$

и, как и следовало ожидать, выполняется условие

$$\gamma^{\wedge\vee} \cdot \beta^{\vee\wedge} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = E^{\wedge\vee}; \quad \gamma^{\wedge\vee} = \tilde{\beta}^{\vee\wedge} = \begin{pmatrix} E & -\varepsilon \cdot r \\ 0 & E \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отметим, что выполнение соотношения (9) необходимо для инвариантности мощности системы сил относительно выбора полуса

$$N = \tilde{X}_P^{\vee} \cdot W_P^{\wedge} = \tilde{X}_O^{\vee} \cdot (\gamma^{\wedge} \cdot \beta^{\wedge \vee}) \cdot W_O^{\wedge} = \tilde{X}_O^{\vee} \cdot W_O^{\wedge} \cdot (10)$$

На основании инвариантности кинетической энергии частицы относительно выбора полуса находим закон преобразования ковариантных составляющих метрического тензора:

$$2K = \tilde{W}_P^{\wedge} \cdot I_P^{\vee \vee} \cdot W_P^{\wedge} = \tilde{W}_O^{\wedge} \cdot (\beta^{\wedge \vee} \cdot I_P^{\vee \vee} \cdot \beta^{\wedge \vee}) \cdot W_O^{\wedge}; (11)$$

$$I_P^{\vee \vee} = \beta^{\wedge \vee} \cdot I_O^{\vee \vee} \cdot \gamma^{\wedge \vee} \quad (\beta^{\wedge \vee} \cdot \tilde{\beta}^{\wedge \vee} = E^{\wedge \vee}).$$

Это преобразование является обобщением теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей.

Важной характеристикой взаимодействия частицы со средой при линейном сопротивлении движению является тензор коэффициентов трения [1-3,5]. Ковариантные составляющие этого тензора могут быть записаны в виде

$$\xi_O^{\vee \vee} = P \langle \tilde{X}_O^{\vee} X_O^{\vee} \rangle = \begin{pmatrix} P \langle \tilde{F} F \rangle & P \langle \tilde{F} M_O \rangle \\ P \langle \tilde{M}_O F \rangle & P \langle \tilde{M}_O M_O \rangle \end{pmatrix}, (12)$$

где оператор P представляет операцию интегрирования временных корреляционных функций

$$P \langle AB \rangle = \int_0^{\infty} \langle A(t) B(t+\tau) \rangle d\tau. (13)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю при фиксированном состоянии рассматриваемой частицы.

Из определения (12) и закона преобразования (7) сразу же следует и закон преобразования для $\xi^{\vee \vee}$:

$$\xi_P^{\vee \vee} = \beta^{\wedge \vee} \cdot \xi_O^{\vee \vee} \cdot \gamma^{\wedge \vee}, (14)$$

который, естественно, совпадает с (11).

Обратный тензор коэффициентов инерции представляется контравариантными составляющими метрического тензора

$$I_P^{\wedge\wedge} = (I_P^{VV})^{-1} = \beta^{\wedge V} \cdot I_O^{\wedge\wedge} \cdot \gamma^{\wedge V}; \quad \gamma^{\wedge V} = \tilde{\beta}^{\wedge V} = \begin{pmatrix} E & O \\ -\varepsilon \cdot r & E \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Рассмотрим также преобразование смешанного тензора коэффициентов трения

$$\xi_P^{\wedge V} = I_P^{\wedge\wedge} \cdot \xi_P, \quad (16)$$

который играет определяющую роль при рассмотрении релаксационных характеристик несферической броуновской частицы [3].

На основании (15) и (14) находим

$$\begin{aligned} \xi_P^{\wedge V} &= \beta^{\wedge V} \cdot I_O^{\wedge\wedge} \cdot \gamma^{\wedge V} \cdot \beta^{\wedge V} \cdot \xi_O^{\wedge V} \cdot \gamma^{\wedge V} = \\ &= \beta^{\wedge V} \cdot \xi_O^{\wedge V} \cdot \gamma^{\wedge V}, \end{aligned} \quad (17)$$

что соответствует полученному в [3] результату.

Отметим далее, что

$$\gamma^{\wedge V} = (\beta^{\wedge V})^{-1} \quad (18)$$

(обращение матриц преобразования β и γ по смыслу этой операции соответствует замене $r \rightarrow -r$; тот же результат получается и при непосредственном выполнении обращения матриц). Поэтому преобразование матриц смешанных тензоров второго ранга является преобразованием подобия, и времена релаксации, определяемые собственными значениями матрицы $\xi^{\wedge V}$, инвариантны относительно выбора полюса. Однако, как следует из непосредственных вычислений [2, 3], в общем случае вид матрицы, при помощи которой производится диагонализация тензора $\xi^{\wedge V}$, отличается от $\beta^{\wedge V}$. Поэтому невозможно диагонализировать матрицу $\xi^{\wedge V}$ только за счет изме-

нения положения полюса и физический смысл независимо релаксирующих параметров не просматривается.

Матрицы $\beta^{\vee\wedge}$ и $\beta^{\wedge\vee}$ определяют преобразование тензоров любого ранга при параллельном переносе системы отсчета $Ox_1 x_2 x_3$ в трехмерном декартовом пространстве на вектор $r = OP$. Это преобразование неортогонально ($\beta^{\vee\wedge} \neq \beta^{\wedge\vee}$).

Преобразование тензоров при изменении ориентации системы координат $Ox_1 x_2 x_3$ описывается шестимерной клеточной матрицей α , составленной из матриц поворота α_3 в обычном трехмерном пространстве

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Это преобразование является ортогональным ($\alpha \cdot \tilde{\alpha} = E$) и поэтому матрица α описывает изменения как ковариантных, так и контравариантных составляющих тензоров.

Полная группа преобразований в шестимерном пространстве, охватывающая трансляции и повороты, определяется произведением матриц α и β . В матрицу β входят вектор r , тензоры E и ε , инвариантные относительно изменения ориентации системы координат, и поэтому операции, представляемые матрицами α и β , коммутативны. Тем не менее следует иметь в виду, что компоненты вектора r неинвариантны относительно вращений, так что коммутационное соотношение имеет вид:

$$\alpha \cdot \beta = \beta' \cdot \alpha ; \quad \beta' = \alpha \cdot \beta \cdot \tilde{\alpha}. \quad (20)$$

Здесь в матрице β компоненты вектора r определены при старой ориентации системы координат, а в матрице β' — при новой.

Л и т е р а т у р а

1. Brenner H. Coupling between the Translation and Rotational Brownian motion of Rigid Particles of Arbitrary Shape. -- Journ. Collond Sci., 1965, no. 1; 1967, no. 3.
2. Вихренко В.С. Броуновская частица в полном μ - пространстве. Связь между различными степенями свободы. - ДАН БССР, 1970, № 7.
3. Вихренко В.С., Кулак М.И. Релаксационные характеристики несферической броуновской частицы. Взаимосвязь ориентационных и трансляционных степеней свободы. - "Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат.,

1973, № 4. 4. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков, М., 1965. 5. Вихренко В.С., Ротт Л.А., Немцов В.Б. Статистическое вычисление времени релаксации анизотропии через параметры межмолекулярного взаимодействия. - "Оптика и спектроскопия", 1970, № 2.

М.А. Левин

К ВОПРОСУ О ПОНИЖЕНИИ ПОРЯДКА ВЫРАЖЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РЕАКЦИИ СВЯЗИ КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

В сравнении с работой автора [1] ниже дается подробный вывод выражений более низкого порядка для реакций связи катящегося деформируемого колеса.

Будем исходить из следующей системы выражений, приведенных в работе [1] (эту систему будем называть основным вариантом или вариантом I):

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha_0 \\
 P_1(\varphi) = & k_1 \int_0^{2\alpha_0} W_1(\varphi - \mu) d\mu + k_2 [W_1(\varphi - 2\alpha_0) + W_1(\varphi)] - \\
 & - k_3 u_1(\varphi); \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2(\varphi) = & k_4 \int_0^{2\alpha_0} W_2(\varphi - \mu) d\mu + k_5 [W_2(\varphi - 2\alpha_0) + W_2(\varphi)] - \\
 & - k_6 u_2(\varphi); \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3(\varphi) = & k_7 - k_8 u_3(\varphi) + k_9 [W_1(\varphi) - W_1(\varphi - 2\alpha_0)]; \\
 M_1(\varphi) = & P_2(\varphi) z_{c_0} + k_9 b [W_0(\varphi - 2\alpha_0) - W_0(\varphi)] - \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$-k_8 b^2 \psi(\varphi) + k_{10} \int_0^{2\alpha_0} W_2(\varphi - \mu) d\mu - k_{11} u_2(\varphi); \quad (4)$$

$$M_2(\varphi) = -P_1(\varphi) z_{c0} - k_{12} \int_0^{2\alpha_0} W_1(\varphi - \mu) d\mu - \\ - k_{13} [W_1(\varphi - 2\alpha_0) + W_1(\varphi)] + k_{14} u_1(\varphi); \quad (5)$$

$$M_3(\varphi) = k_1 b \int_0^{2\alpha_0} W_0(\varphi - \mu) d\mu + k_2 b [W_0(\varphi - 2\alpha_0) + \\ + W_0(\varphi)] - k_3 b^2 \theta(\varphi) + k_{15} [W_2(\varphi) - W_2(\varphi - 2\alpha_0)] - \\ - k_{16} \theta(\varphi); \quad (6)$$

$$W_1(\varphi) + k_{17} dW_1(\varphi)/d\varphi = u_1(\varphi) + k_{18} u_3(\varphi); \quad (7)$$

$$W_2(\varphi) + k_{19} dW_2(\varphi)/d\varphi = u_2(\varphi) + k_{20} \theta(\varphi); \quad (8)$$

$$W_0(\varphi) + k_{17} dW_0(\varphi)/d\varphi = b\theta(\varphi) - k_{18} b\psi(\varphi); \quad (9)$$

$$u_1(\varphi) = x_c(\varphi) - r\varphi; \quad u_2(\varphi) = y_c(\varphi) + z_{c0}\psi(\varphi); \\ u_3(\varphi) = z_c(\varphi) - z_{c0}. \quad (10)$$

При построении выражений более низкого порядка примем за основу теорию М.В. Келдыша [2] и способы получения упрощенных теорий, разработанные Ю.И. Неймарком и Н.А. Фурфаевым в [3] для случая "больших скоростей" и "больших кинематических параметров".

В задачах о движении сложных систем с качением, когда число элементов в системе велико, в ряде случаев может оказаться, что упрощенные выражения для реакций связи, вытекающие из выражений (1) - (10), после подстановки в уравнения движения позволяют достаточно хорошо описывать динамику системы, приводя к системе уравнений более низкого порядка, чем в случае использования соотношений (1) - (10). Это мо-

жет иметь место, например, для сильно инерционных систем, и в особенности когда нас интересует поведение элементов с большой инерцией, входящих в такую систему. Следовательно, задача о понижении порядка выражений, описывающих реакции связи, с последующей оценкой точности такой процедуры имеет большое практическое значение.

Отметим также то, что развитие теории качения шло в направлении повышения порядка уравнений, описывающих реакции связи. Поэтому, рассматривая серию систем выражений все более и более низкого порядка, вытекающих из (1) - (10) мы должны получить все известные и хорошо зарекомендовавшие себя теории, в противном случае система выражений (1) - (10) вызвала бы законные возражения.

Основным критерием близости к системе (1) - (10) предлагаемых ниже систем выражений более низкого порядка является здесь степень совпадения изображений по Лапласу при нулевых начальных условиях для реакций связи, определенных по выражениям (1) - (10) и рассматриваемых ниже выражений более низкого порядка.

Как уже отмечалось, за основу принимается теория М.В. Келдыша, которой соответствуют следующие выражения:

$$P^* = -f_1^* \sigma^* - f_2^* \psi, M_\psi^* = -f_2^* \sigma^* - f_3^* \psi, M_\theta^* = f_4^* \psi^* ; \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx} (y - \sigma^*) = \theta + \psi^* ; \quad (12)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (y - \sigma^*) = \frac{d}{dx} (\theta + \psi^*) = s_1^* \sigma^* - s_2^* \psi^* - s_3^* \psi . \quad (13)$$

Отметим, что выражения теории [2] (11) - (13) записаны в иной системе отсчета, чем выражения (1) - (10). Действительно, составляющая P^* лежит в плоскости xu , в то время как составляющая P_2 направлена вдоль орта \vec{e}_2 , который перпендикулярен плоскости колеса. Далее σ^* измеряется в плоскости xu , а σ_2 в направлении орта \vec{e}_2 и т.д.

По аналогии с выражениями (11) - (13) используем в рассматриваемой здесь системе отсчета следующую систему выражений для нахождения P_2 :

$$P_2 = -f_2 \sigma_2, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_2 - \sigma_2) = \nu_2 + \theta ;$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (\nu_2 + \theta) = s_4 \sigma_2 - s_5 \nu_2 .$$

Отметим, что в последнем уравнении отсутствует член, аналогичный члену $s_3^* \psi$ в уравнении (13). Дело в том, что выражение (13) определяет кривизну на плоскости xu , а в выбранной здесь системе отсчета из условия совпадения изображений по Лапласу для реакций связи по различным подходам в определенной области изменения параметра изображения получаем коэффициент, аналогичный s_3 , равным нулю. В выражении для P_2 отсутствует член, аналогичный $f_2^* \psi$ в (11). В дальнейшем будет показано, что при переходе к системе отсчета, используемой в теории М.В. Келдыша, член, аналогичный $f_2^* \psi$, присутствует.

В силу аналогии между выражениями для P_1 и P_2 (см. выражения (1), (7) и (2), (8)) можем записать

$$P_1 = -f_1 \sigma_1; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_1 - \sigma_1) = \nu_1 ;$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} \nu_1 = s_1 \sigma_1 - s_2 \nu_1 + s_3 u_3 .$$

Интересно, что здесь коэффициент s_3 , аналогичный s_3^* в уравнении (13), как показывает в дальнейшем сравнение изображений по Лапласу, не обращается в ноль.

Структура выражения (3) подсказывает, что P_3 следует искать в форме

$$P_3 = f_3 - f_4 u_3 + f_5 \nu_1 .$$

При этом член $f_5 \nu_1$ учитывает влияние u_1 и u_3 (появление члена с ν_1 связано с разностью $W_1(\varphi) - W_1(\varphi - 2\alpha_0)$).

При вычислении моментных составляющих обратим внимание на то, что здесь моментные составляющие приведены к центру колеса C , тогда как в теории [2] они приведены к точке K — точке встречи линии наибольшего наклона в срединной плоскости колеса и плоскости качения xu .

Выражение для M_1 ищем в форме выражения M_ψ^* из (11) с добавлением $P_2 z_{co}$ и члена, содержащего ψ_o в связи с присутствием в соотношении (4) разности $W_o(\psi - 2\alpha_o) - W_o(\psi)$:

$$M_1 = P_2 \cdot z_{co} - f_6 \sigma_2 - f_7 \psi - f_8 \psi_o.$$

Из рассмотрения выражения (5) вытекает, что M_2 следует искать в виде

$$M_2 = -P_1 z_{co} + f_9 \sigma_1,$$

так как сумма $M_2(\psi) + P_1(\psi) z_{co}$ (5) аналогична по структуре выражению $P_1(\psi)$ из (1).

Упрощенное выражение для M_3 следует искать в форме M_θ^* из (11) с добавлением члена, пропорционального σ_o , так как переменные W_o и θ , входящие в выражение (6), образуют слагаемое, аналогичное по форме (1) и поэтому

$$M_3 = -f_{10} \sigma_o + f_{11} \psi_2; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\psi} (b\theta - \sigma_o) = \psi_o;$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi_o}{d\psi} = s_6 \sigma_o - s_7 \psi_o - s_8 b\psi,$$

(заметим, что появление члена $f_{11} \psi_2$ опять связано с разностью $W_2(\psi) - W_2(\psi - 2\alpha_o)$ в выражении (6)).

Итак в силу высказанных выше соображений строим систему выражений для реакций связи более низкого порядка в следующем виде:

$$P_1 = -f_1 \sigma_1; \quad (14)$$

$$P_2 = -f_2 \sigma_2; \quad (15)$$

$$P_3 = f_3 - f_4 u_3 + f_5 \psi_1; \quad (16)$$

$$M_1 = P_2 z_{co} - f_6 \sigma_2 - f_7 \psi - f_8 \psi_o; \quad (17)$$

$$M_2 = -P_1 z_{co} + f_9 \sigma_1; \quad (18)$$

$$M_3 = -f_{10} \sigma_0 + f_{11} \nu_2, \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_1 - \sigma_1) = \nu_1; \quad \frac{1}{r} \frac{d\nu_1}{d\varphi} = s_1 \sigma_1 - s_2 \nu_1 + s_3 u_3; \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_2 - \sigma_2) = \nu_2 + \theta; \quad \frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (\nu_2 + \theta) = s_4 \sigma_2 - s_5 \nu_2 \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (b\theta - \sigma_0) = \nu_0; \quad \frac{1}{r} \frac{d\nu_0}{d\varphi} = s_6 \sigma_0 - s_7 \nu_0 - s_8 b\psi. \quad (22)$$

Систему выражений (14) - (22) в дальнейшем будем называть вариантом II.

Каков бы ни был способ построения системы варианта II окончательная оценка правильности этой системы с точки зрения ее близости к варианту I может быть дана в результате сравнения изображений по Лапласу для реакций связи по обоим вариантам при малых и больших значениях параметра изображения p (случай $|p| \rightarrow 0$ и случай $|p| \rightarrow \infty$). Одновременно из условия совпадения изображений при $|p| \rightarrow 0$ и $|p| \rightarrow \infty$ выразим коэффициенты $f_1, f_2, \dots, f_{11}, s_1, s_2, \dots, s_8$ через коэффициенты K_1, K_2, \dots, K_{20} в выражениях варианта I.

Поясним важность рассмотрения двух предельных случаев $|p| \rightarrow 0$ и $|p| \rightarrow \infty$. Как известно, при замене в выражениях для изображений по Лапласу параметра изображения p на мнимую величину, например вида $p = i \nu / 2\omega_0$, приходим к комплексным передаточным коэффициентам, которые представляют собой реакцию на гармоническое воздействие вида $\sin(\frac{\nu}{2\omega_0} \varphi)$. Если за время поворота диска колеса на угол φ , равный углу контакта в невозмущенном движении $2\omega_0$, имело место k_B циклов гармонического воздействия, то $\nu = 2\pi k_B$. При движении, мало отличающемся от равномерного качения, $\omega_0 = \text{const}$, получаем

$$k_B = 2\omega_0 / \omega_0 T_B,$$

где T_B - период гармонического воздействия.

Окончательно для кинематической частоты ν имеем

$$\nu = 2\pi k_B = \frac{4\pi\omega_0}{\omega_0 T_B} = |p| / 2\omega_0. \quad (23)$$

Таким образом, случай малых $p(p \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0)$ соответствует качению, при котором время поворота диска колеса на угол $2\alpha_0$ (время прохождения центром колеса пути порядка длины области контакта) составляет весьма малую долю от периода гармонического воздействия. В частности, это имеет место при большой скорости качения ω_0 . Поэтому этот случай соответствует случаю, иногда называемому "случаем больших скоростей", хотя такой же эффект достигается и при малых значениях ω_0 , когда T_B велико,

Случай больших $p(p \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty)$ означает, что за время поворота диска колеса на угол $2\alpha_0$ имело место большое число циклов воздействия. В частности, это имеет место при весьма малой скорости ω_0 , или тогда, когда колесо неподвижно ($\omega_0 = 0$).

Сравнение P_1 . Для изображения \bar{P}_1 по Лапласу из (1) и (7) находим

$$\bar{P}_1 = \left[\frac{k_1}{p} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) + k_2 (1 + e^{-2\alpha_0 p}) \right] \frac{\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3}{1 + k_{17} p} - k_3 \bar{u}_1. \quad (24)$$

Удерживая члены порядка не выше p^2 , из соотношения (24) получаем

$$\bar{P}_1 = k_3 \left\{ 1 - (\alpha_0 + k_{17})p + [(\alpha_0 + k_{17})^2 - \alpha_0 k_{17} - \frac{2}{3} \frac{k_1}{k_3} \alpha_0^3] p^2 \right\} \times (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - k_3 \bar{u}_1. \quad (24')$$

Из выражений (14) и (20) для \bar{P}_1 следует

$$\bar{P}_1 = \frac{f_1 \frac{s_3}{k_{18}}}{s_1 + \frac{s_2}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - f_1 \frac{\frac{s_3}{k_{18}} + \frac{s_2}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2}{s_1 + \frac{s_2}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} \bar{u}_1. \quad (25)$$

Сравнивая (24) и (25) из условия равенства коэффициентов при \bar{u}_1 в обоих выражениях получаем $s_1 = s_3/k_{18}$, $f_1 = k_3$. В результате, удерживая члены порядка не выше p^2 , из выражения (25) следует

$$\bar{P}_1 = k_3 \left\{ 1 - \frac{s_2}{s_1 r} p + \frac{1}{r^2} \left(\frac{s_2^2}{s_1^2} - \frac{1}{s_1} \right) p^2 \right\} \times$$

(25')

$$x (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - k_3 \bar{u}_1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p в выражениях (24') и (25'), находим

$$s_1 = \frac{1}{r^2 (\alpha_0 k_{17} + \frac{2}{3} \frac{k_4}{k_3} \alpha_0^3)}; \quad s_2 = r (\alpha_0 + k_{17}) s_1.$$

Таким образом, изображение \bar{P}_1 определяется системой (14) - (22) (вариант II) при малых p с точностью, соответствующей удержанию членов порядка p .

Сравнение P_2 . Данное сравнение производится аналогично. Поскольку результат получается аналогичным предыдущему, что может вызвать удивление в связи с использованием только двух членов с коэффициентами s_4 и s_5 в выражении (21) в сравнении с тремя членами с коэффициентами s_1, s_2, s_3 , в выражении (20), то приведем здесь соответствующие преобразования.

Из выражений (2) и (8) находим

$$\bar{P}_2 = \left[\frac{k_4}{p} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) + k_5 (1 + e^{-2\alpha_0 p}) \right] \frac{\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}}{1 + k_{19} p} - k_6 \bar{u}_2, \quad (26)$$

а удерживая члены порядка не выше p^2 , из последнего получим

$$\bar{P}_2 = k_6 \left\{ 1 - (\alpha_0 + k_{19}) p + [(\alpha_0 + k_{19})^2 - \alpha_0 k_{19} - \frac{2}{3} \frac{k_4}{k_6} \alpha_0^3] p^2 \right\} x (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - k_6 \bar{u}_2. \quad (26')$$

С другой стороны, из выражений (15) и (21) следует

$$\bar{P}_2 = \frac{f_2 \frac{s_5}{k_{20}}}{s_4 + \frac{s_5}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) -$$

$$- f_2 \frac{\frac{s_5}{k_{20}} + \frac{s_5}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2}{s_4 + \frac{s_5}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} \bar{u}_2. \quad (27)$$

Из сравнения коэффициентов при \bar{u}_2 в выражениях и (27) получаем $s_4 = s_5 / k_{20}$, $f_6 = k_6$. Удерживая те члены порядка не выше p^2 из (27), находим

$$\bar{P}_2 = k_6 \left\{ 1 - \frac{s_5}{s_4 r} p + \frac{1}{r^2} \left(\frac{s_5^2}{s_4} - \frac{1}{s_4} \right) p^2 \right\} \times \\ \times (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - k_6 \bar{u}_2.$$

Сравнивая выражения (26') и (27') и учитывая, что $k = r(\alpha_0 + k_{19})$ получаем

$$s_4 = \frac{1}{r^2 (\alpha_0 k_{19} + \frac{2}{3} \frac{k_4}{k_6} \alpha_0^3)}, \quad s_5 = r(\alpha_0 + k_{19}) s_4$$

Сравнение P_3 . Из выражений (3) и (7) следует изображения P_3 .

$$\bar{P}_3 = \frac{k_7}{p} + k_9 [1 - e^{-2\alpha_0 p}] \frac{\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3}{1 + k_{17} p} - k_8 \bar{u}_3,$$

которое с учетом членов порядка не выше p^2 принимает

$$\bar{P}_3 = \frac{k_7}{p} + k_9 [2\alpha_0 p - 2\alpha_0 (\alpha_0 + k_{17}) p^2] (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - k_8 \bar{u}_3.$$

Одновременно из выражений (16) и (20) вытекает

$$\bar{P}_3 = \frac{f_3}{p} + \frac{f_5 \frac{s_1}{r} p}{s_1 + \frac{s_2}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - f_4 \bar{u}_3.$$

Сравнивая (28) и (29) при $|p| \rightarrow \infty$, находим $f_3 = k_7, f_4 = k_8$.
Для малых значений p из выражения (29) получаем

$$\bar{P}_3 = \frac{f_3}{p} + f_5 \frac{1}{r} \left(p - \frac{s_2}{s_1 r} p^2 \right) (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - f_4 \bar{u}_3. \quad (29')$$

Из условия совпадения (28') и (29') имеем $f_5 = 2\alpha_0 r k_9$
и еще раз ранее полученное соотношение $s_2 = r(\alpha_0 + k_{17}) s_1$.

Таким образом, и в этом случае изображения при малых p совпадают с точностью до членов, содержащих p^2 включительно.

Сравнение M_1 . Найдем изображение по Лапласу для M_1 с учетом (4), (8) и (9):

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \bar{P}_2 z_{c0} + k_9 b (e^{-2\alpha_0 p} - 1) \frac{b\bar{\theta} - k_{18} b\bar{\psi}}{1 + k_{17} p} - k_8 b^2 \bar{\psi} + \\ & + k_{10} \frac{1}{p} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) \frac{\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}}{1 + k_{19} p} - k_{11} \bar{u}_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Для малых p находим, учитывая члены порядка p^2 ,

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \bar{P}_2 z_{c0} + 2\alpha_0 k_9 b \left[-p + (\alpha_0 + k_{17}) p^2 \right] (b\bar{\theta} - k_{18} b\bar{\psi}) - \\ & - k_8 b^2 \bar{\psi} + 2\alpha_0 k_{10} \left\{ 1 - (\alpha_0 + k_{19}) p + [(\alpha_0 + k_{19})^2 - \right. \\ & \left. - \alpha_0 (\alpha_0 + k_{19}) + \frac{2}{3} \alpha_0^2 \right] p^2 \right\} (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - k_{11} \bar{u}_2. \end{aligned} \quad (30')$$

С другой стороны, из выражений (17), (21) и (22) вытекает

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \bar{P}_2 z_{c0} + \frac{f_8}{r} \frac{-s_6 p}{s_6 + \frac{s_7}{r} p + \frac{1}{2} p^2} (b\bar{\theta} - k_{18} b\bar{\psi}) - \\ & - f_7 \bar{\psi} + \frac{f_6}{1 + \frac{s_5}{s_4 r} p + \frac{1}{s_4 r^2} p^2} (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_6 \bar{u}_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Сравнивая (30) и (31) при $|p| \rightarrow \infty$, находим $f_6 = k_{11}$, $f_7 = b^2 k_8$. Для малых p из (31) получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \bar{P}_2 z_{co} + \frac{f_8}{r} (-p + \frac{s_7}{s_6 r} p^2) (b\bar{\theta} - k_{18} b\bar{\psi}) - f_7 \bar{\psi} + \\ & + f_6 \left[1 - \frac{s_5}{s_4 r} p + \frac{1}{r^2} \left(\frac{s_5^2}{s_4} - \frac{1}{s_4} \right) p^2 \right] (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_6 \bar{u}_2. \end{aligned} \quad (31')$$

Приравнивая коэффициенты в соотношениях (30') и (31') при членах порядка p и p^2 и учитывая, что $k_{11} = 2\alpha_0 k_{10}$, находим

$$f_8 = r 2\alpha_0 b k_9, \quad s_7 = r(\alpha_0 + k_{17}) s_6.$$

Отметим, что выражение для s_5 уже было получено выше.

Из совпадения подчеркнутых членов вытекало бы, что s_4 равно $r^{-2} (\alpha_0 k_{19} + \frac{1}{3} \alpha_0^2)^{-1}$. Это отличается от ранее полученного значения s_4 . Так как различие возникает из-за учета членов порядка p^2 , то можно говорить о совпадении изображений при $|p| \rightarrow 0$ с учетом членов порядка не выше p . При этом за основу принимается ранее полученное значение s_4 , так как оно подтверждается сравнением изображений для p^4 (отметим, что если опустить в обоих выражениях для s_4 члены порядка α_0 и α_0^2 в сравнении с $\alpha_0 k_{19}$, то можно говорить о совпадении изображений с учетом членов порядка p^2).

Сравнение M_2 . Изображение по Лапласу для M_2 в силу выражений (5) и (7) равно

$$\bar{M}_2 = -\bar{P}_1 z_{co} - \left[\frac{k_{12}}{p} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) + k_{13} (1 + e^{-2\alpha_0 p}) \right] \frac{\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3}{1 + k_{17} p} + k_{14} \bar{u}_1. \quad (32)$$

При $p \rightarrow 0$, учитывая члены порядка не выше p^2 и значения k_1, \dots, k_{20} , находим

$$\bar{M}_2 = -\bar{P}_1 z_{co}^{-k_{14}} \left\{ 1 - (\alpha_0 + k_{17})p + [(\alpha_0 + k_{17})^2 - \alpha_0 k_{17} - \frac{2}{3} \frac{k_{12}}{k_{14}} \alpha_0^3] p^2 \right\} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) + k_{14} \bar{u}_1. \quad (32')$$

Из выражений (18) и (20) для \bar{M}_2 получаем

$$\bar{M}_2 = -\bar{P}_1 z_{co}^{-k_{14}} - \frac{f_9 s_1}{s_1 + \frac{s_2}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) + f_9 \bar{u}_1. \quad (33)$$

Сравнивая выражения (32) и (33) при $p \rightarrow \infty$, получаем, что $f_9 = k_{14}$. При малых p из (33) следует

$$\bar{M}_2 = -\bar{P}_1 z_{co}^{-k_{14}} \left[1 - \frac{s_2}{s_1} r p + \frac{1}{r^2} \left(\frac{s_2}{s_1} - \frac{1}{s_1} \right) p^2 \right] (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) + k_{14} \bar{u}_1. \quad (33')$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в выражениях (32') и (33'), находим уже известное значение

$$s_2 = r(\alpha_0 + k_{17}) s_1 \quad \text{и значение } s_1, \text{ равное } r^{-2} (\alpha_0 k_{17} +$$

$$+ \frac{2k_{12}}{3k_{14}} \alpha_0^3) - 1$$

. Поэтому, как и в случае сравнения \bar{M}_1 , находим, что значения изображений \bar{M}_2 при малых p совпадают с учетом членов порядка p (отметим, что если в обоих выражениях для s_1 опустить члены порядка α_0 и α_0^3 в сравнении с $\alpha_0 k_{17}$, то совпадение получается с учетом членов порядка p^2).

Сравнение \bar{M}_3 . Из соотношений (6), (8) и (9) находим для изображения \bar{M}_3 по Лапласу

$$\bar{M}_3 = \left[\frac{k_1 b}{p} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) + k_2 b (1 + e^{-2\alpha_0 p}) \right] \frac{b\bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}}{1 + k_{17} p} - k_3 b^2 \bar{\theta} +$$

$$+ k_{15} (1 - e^{-2\alpha_0 p}) \frac{\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}}{1 + k_{19} p} - k_{16} \bar{\theta} \quad (34)$$

Для малых p с учетом членов порядка не выше p^2 и членов коэффициентов, входящих в выражения (1) - (10), чаем

$$\bar{M}_3 = k_3 b \left\{ 1 - (\alpha_0 + k_{17}) p + [(\alpha_0 + k_{17})^2 - \alpha_0 k_{17} - \frac{2}{3} \frac{k_1}{k_3} \alpha_0^3] p^2 \right\} (b\bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) - k_3 b^2 \bar{\theta} + k_{15} 2\alpha_0 [p - (k_{19}) p^2] (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - k_{16} \bar{\theta} \quad .$$

Из уравнений (19), (21) и (22) вытекает

$$\bar{M}_3 = \frac{f_{10} \frac{s_8}{k_{18}}}{s_6 + \frac{s_7}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} (b\bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) - f_{10} b x$$

$$x \frac{\frac{s_8}{k_{18}} + \frac{s_7}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2}{s_6 + \frac{s_7}{r} p + \frac{1}{r^2} p^2} \bar{\theta} + f_{11} \frac{p}{r} \frac{1}{1 + \frac{s_5}{s_4 r} p + \frac{1}{s_4 r^2} p^2}$$

$$x (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_{11} \bar{\theta} \quad .$$

Из условия совпадения коэффициентов при p в выра (34) и (35) следует, что $f_{10} = k_3 b$, $f_{11} = k_{16}$, $s_8 = k_{18}$. Удерживая члены порядка не выше p^2 , из выражения (35) ходим

$$\bar{M}_3 = k_3 b \left[1 - \frac{s_7}{s_6 r} p + \frac{1}{r^2} \left(\frac{s_7^2}{s_6^2} - \frac{1}{s_6} \right) p^2 \right] (b\bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) -$$

$$+ \frac{k_{16}}{r} \left(p - \frac{s_5}{s_4 r} p^2 \right) (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - k_{16} \bar{\theta} .$$

Из необходимого равенства выражений (34') и (35') следует

$$s_7 = r(\alpha_0 + k_{17})s_6 = s_2, \quad s_6 = \frac{1}{r} \left(\alpha_0 k_{17} + \frac{2}{3} \frac{k_1}{k_3} \alpha_0^3 \right)^{-1} = s_1,$$

$$s_5 = r(\alpha_0 + k_{19})s_4, \quad s_8 = k_{18} \cdot s_6 = k_{18} \cdot s_1 = s_3.$$

При этом должно выполняться равенство $k_{15} 2\alpha_0 r = k_{16}$. Последнее действительно выполняется [1], если в коэффициентах перед малыми отклонениями удерживать члены порядка не выше α_0 . Обратим внимание на то, что при $p/r \rightarrow 0$ рассматриваемые изображения совпадают с учетом членов порядка p^2 .

Таким образом, значения коэффициентов, входящих в выражения (14) - (22) варианта II, оказываются следующими

$$f_1 = k_3, \quad f_2 = k_6, \quad f_3 = k_7, \quad f_4 = k_8, \quad f_5 = 2\alpha_0 r k_9,$$

$$f_6 = f_3 = k_{11}, \quad f_7 = b^2 k_8, \quad f_8 = 2\alpha_0 r b k_9, \quad f_9 = k_{14},$$

$$f_{10} = b k_3, \quad f_{11} = k_6,$$

$$s_1 = s_6 = \frac{1}{r} \left(\alpha_0 k_{17} + \frac{2}{3} \frac{k_1}{k_3} \alpha_0^3 \right)^{-1}, \quad s_2 = s_7 = r(\alpha_0 + k_{17})s_1, \quad (36)$$

$$s_3 = k_{18} s_1 = s_8, \quad s_4 = \frac{1}{r} \left(\alpha_0 k_{19} + \frac{2}{3} \frac{k_4}{k_6} \alpha_0^3 \right)^{-1},$$

$$s_5 = r(\alpha_0 + k_{19})s_4.$$

В выражениях для s_1 и s_4 в ряде случаев можно опустить члены, содержащие α_0^3 .

В соответствии с методом, развитым в работе [3, с. 329], рассмотрим случай больших величин кинематических параметров s_1, s_2, \dots, s_8 . Как показано в работе [3], во вторых из равенств, входящих в систему (20) - (22), в этом случае

следует опустить производные по φ . В результате система уравнений варианта II в случае больших кинематических параметров преобразуется к виду

$$P_1 = -f_1 \sigma_1; \quad (14)$$

$$P_2 = -f_2 \sigma_2; \quad (15)$$

$$P_3 = f_3 - f_4 u_3 + f_5 \psi, \quad (16)$$

$$M_1 = P_2 z_{co} - f_6 \sigma_2 - f_7 \psi - f_8 \psi_o, \quad (17)$$

$$M_2 = -P_1 z_{co} + f_9 \sigma_1, \quad (18)$$

$$M_3 = -f_{10} \sigma_o + f_{11} \psi_2, \quad (19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_1 - \sigma_1) = \psi_1, \quad \psi_1 = \frac{1}{f_{12} r} \sigma_1 + \frac{1}{f_{13} r} u_3, \quad (37)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (u_2 - \sigma_2) = \psi_2 + \theta, \quad \psi_2 = \frac{1}{f_{14} r} \sigma_2, \quad (38)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\varphi} (b\theta - \sigma_o) = \psi_o, \quad \psi_o = \frac{1}{f_{12} r} \sigma_o - \frac{1}{f_{13} r} b\psi, \quad (39)$$

$$f_{12} = \frac{s_2}{s_1 r} = \frac{s_7}{s_6 r} = \alpha_o + k_{17}, \quad f_{13} = \frac{s_2}{s_3 r} = \frac{s_7}{s_8 r} = (\alpha_o + k_{17}) / k_{18},$$

$$f_{14} = \frac{s_5}{s_4 r} = \alpha_o + k_{19}. \quad (40)$$

Систему выражений (14) - (19), (37) - (39) в дальнейшем будем называть вариантом III, вытекающим из соотношений варианта II. Близость варианта III к варианту I оценим, сравнивая изображения по Лапласу для реакций связи по обоим вариантам.

Вместо соотношений (25) и (25') теперь имеем

$$\bar{P}_1 = \frac{f_1}{1 + f_{12} p} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) - f_1 \bar{u}_1, \quad (41)$$

$$\bar{P}_1 = f_1(1 - f_{12}p + f_{12}^2 p^2)(\bar{u}_1 + k_{18}\bar{u}_3) - f_1\bar{u}_1. \quad (41')$$

Отсюда следует, что при $|p| \rightarrow \infty$ выражение (24) совпадает с (41). При $|p| \rightarrow 0$ совпадают выражения (24') и (41') с учетом членов порядка не выше p .

Аналогично, вместо (27) и (27') получаем

$$\bar{P}_2 = \frac{f_2}{1 + f_{14}p}(\bar{u}_2 + k_{20}\bar{\theta}) - f_2\bar{u}_2, \quad (42)$$

$$\bar{P}_2 = f_2(1 - f_{14}p + f_{14}^2 p^2)(\bar{u}_2 + k_{20}\bar{\theta}) - f_2\bar{u}_2. \quad (42')$$

Здесь также совпадают изображения (26) и (42) при $|p| \rightarrow \infty$. Для случая $|p| \rightarrow 0$ выражения (26') и (42') совпадают с учетом членов порядка не выше p .

Далее вместо (29) и (29') находим

$$\bar{P}_3 = \frac{f_3}{p} + \frac{f_5}{r} \frac{p}{1 + f_{12}p}(\bar{u}_1 + k_{18}\bar{u}_3) - f_4\bar{u}_3, \quad (43)$$

$$\bar{P}_3 = \frac{f_3}{p} + \frac{f_5}{r}(p - f_{12}p^2)(\bar{u}_1 + k_{18}\bar{u}_3) - f_4\bar{u}_3. \quad (43')$$

В случае $|p| \rightarrow \infty$ из формулы (43) следует, что

$$\bar{P}_3 = \frac{f_5}{rf_{12}}(\bar{u}_1 + k_{18}\bar{u}_3) - k_8\bar{u}_3.$$

Последнее отличается от значения $\bar{P}_3 = -k_8\bar{u}_3$, вытекающего из (28). Таким образом, при $|p| \rightarrow \infty$ появляется погрешность. В случае $|p| \rightarrow 0$ выражения (43') и (28') в точности совпадают с учетом членов порядка p^2 .

Для изображения \bar{M}_1 вместо (31) и (31') получаем

$$\bar{M}_1 = \bar{P}_2 z_{co} - \frac{f_8}{r} \frac{p}{1 + f_{12}p}(b\bar{\theta} - k_{18}b\bar{\varphi}) - f_7\bar{\varphi} + \quad (44)$$

$$+ \frac{f_6}{1+f_{14}p} (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_6 \bar{u}_2 ,$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 = & \bar{P}_2 z_{co} + \frac{f_8}{r} (-p + f_{12} p^2) (b \bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) - f_7 \bar{\psi} + \\ & + f_6 (1 - f_{14} p + f_{14}^2 p^2) (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_6 \bar{u}_2 . \end{aligned} \quad (44')$$

Сравнивая (44) и (30) при $p/\rightarrow \infty$, как и в предыдущем случае, получаем погрешность. Выражения же (44') и (30') совпадают с учетом членов порядка не выше p .

Вместо выражений (33) и (33') для изображения \bar{M}_2 имеем

$$\bar{M}_2 = -\bar{P}_1 z_{co} - \frac{f_9}{1+f_{12}p} (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) + f_9 \bar{u}_1 , \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_2 = & -\bar{P}_1 z_{co} - f_9 (1 - f_{12} p + f_{12}^2 p^2) (\bar{u}_1 + k_{18} \bar{u}_3) + f_9 \bar{u}_1 . \\ & (45') \end{aligned}$$

При $p/\rightarrow \infty$ выражение (45) совпадает с (32), а в случае $p/\rightarrow 0$ (45') совпадает с (32'), если учитывать члены порядка не выше p .

Для изображения \bar{M}_3 вместо (35) и (35') находим

$$\begin{aligned} \bar{M}_3 = & \frac{f_{10}}{1+f_{12}p} (b \bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) - f_{10} b \bar{\theta} + \\ & + \frac{f_{11}}{r} \frac{p}{1+f_{14}p} (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_{11} \bar{\theta} , \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_3 = & f_{10} (1 - f_{12} p + f_{12}^2 p^2) (b \bar{\theta} - k_{18} b \bar{\psi}) - f_{10} b \bar{\theta} + \\ & + \frac{f_{11}}{r} (p - f_{14} p^2) (\bar{u}_2 + k_{20} \bar{\theta}) - f_{11} \bar{\theta} . \end{aligned} \quad (46')$$

Сравнивая выражения (46) и (34) при $p/\rightarrow \infty$, находим, что имеет место погрешность. Изображения (46') и (34') совпадают, если учитывать члены порядка не выше p .

Следует отметить в общем неплохое совпадение изображений по Лапласу для реакций связи, определенных по вариантам II и III. В случае варианта III число уравнений может быть уменьшено на три, так как вторые из уравнений (37) - (39) позволяют исключить из системы три переменные φ_1^* , φ_2^* , φ_0^* .

Рассмотрим теперь случай "движения с большой скоростью" на основе метода, изложенного в работе [3, с. 327]. При этом аналогично тому, как это показано в [3], исходим из предположения о допустимости пренебрежения в выражениях (20) - (22) производными по ψ от величин σ_1 , σ_2 , σ_0 , φ_1^* , φ_2^* , φ_0^* в сравнении с другими членами, входящими в эти выражения. В результате система варианта II преобразуется к следующему виду

$$P_1 = -a_1 \frac{du_1}{d\varphi} + a_2 u_3 \quad (47)$$

$$P_2 = -a_3 \frac{du_2}{d\varphi} + a_4 \theta - \underline{a_5} \frac{d\theta}{d\varphi}, \quad (48)$$

$$P_3 = a_6 - a_7 u_3 + a_8 \frac{du_1}{d\varphi}, \quad (49)$$

$$M_1 = P_2 z_{co} - a_9 \frac{du_2}{d\varphi} + a_{10} \theta - (a_{11} + \underline{a_{12}}) \frac{d\theta}{d\varphi} - a_{13} \psi; \quad (50)$$

$$M_2 = -P_1 z_{co} + a_{14} \frac{du_1}{d\varphi} - a_{15} u_3; \quad (51)$$

$$M_3 = -a_{16} \theta - a_{17} \frac{d\theta}{d\varphi} + a_{18} \frac{du_2}{d\varphi} - a_{19} \psi. \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{f_1 s_2}{r s_1}; & a_2 &= \frac{f_1 s_3}{s_1}; & a_3 &= \frac{f_2 s_5}{r s_4}; & a_4 &= \frac{f_2 s_5}{s_4}; \\ a_5 &= \frac{f_2}{s_4 r}; & a_6 &= f_3; & a_7 &= f_4; & a_8 &= \frac{f_5}{r}; & a_9 &= \frac{f_6 s_5}{r s_4}; \\ a_{10} &= \frac{f_6 s_5}{s_4}; & a_{11} &= \frac{f_8 b}{r}; & a_{12} &= \frac{f_6}{s_4 r}; & a_{13} &= f_7; \end{aligned} \right\} (53)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{14} &= \frac{f_9 s_2}{r s_1}; & a_{15} &= \frac{f_9 s_3}{s_1}; & a_{16} &= f_{11}; & a_{17} &= \frac{f_{10} b s_7}{r s_6}; \\ a_{18} &= \frac{f_{11}}{r}; & a_{19} &= \frac{f_{10} s_8 b}{s_6}. \end{aligned} \right\} (53)$$

Полученную систему выражений для реакций связи назовем вариантом IV. По выражениям варианта IV можно легко найти изображения по Лапласу для составляющих реакции связи. Нетрудно убедиться, что при $|p| \rightarrow \infty$ все изображения стремятся к бесконечности, в то время как изображения в соответствии с вариантом I остаются ограниченными. Таким образом, для больших p выражения варианта IV дают большую ошибку, что и следовало ожидать, так как они соответствуют случаю "большой скорости движения", а точнее малых p ($|p| \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 0$). При малых p сравнение изображений по Лапласу в соответствии с вариантами IV и I показывает, что для слагаемых, входящих в выражения варианта IV и содержащих u_3 , θ и ψ , имеется погрешность даже с учетом членов порядка не выше p .

Рассмотрим теперь случай движения с "большой скоростью" и при "больших кинематических параметрах". Группа уравнений (20) - (22) варианта II принимает здесь следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{du_1}{d\varphi} &= \psi_1; & s_1 \sigma_1 - s_2 \psi_1 + s_3 u_3 &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{du_2}{d\varphi} &= \psi_2 + \theta; & s_4 \sigma_2 - s_5 \psi_2 &= 0; \\ \frac{b}{r} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \psi_0; & s_6 \sigma_0 - s_7 \psi_0 - s_8 b \psi &= 0. \end{aligned}$$

В результате выражения варианта II в данном случае преобразуются к системе, которую назовем вариантом V и которая отличается от варианта IV отсутствием членов, подчеркнутых в выражениях (48) и (50) (т.е. $a_5 = a_{12} = 0$).

Возможны варианты записи выражений для реакций связи деформируемого колеса, основанные на одновременном использовании выражений из всех рассмотренных вариантов I - V.

Например, можно взять выражения для P_1 и P_3 из варианта V, P_2 - из варианта I, а остальные выражения из варианта II и т.д. Все зависит от того, каким составляющим реакции связи следует отдать предпочтение с точки зрения точности их описания, при рассмотрении движения конкретной механической системы.

Перейдем теперь к системе отсчета, используемой в работе [2]. В соответствии с выражениями (14) - (19) и обозначая $M_{1k}^* = M_1 - P_2 z_{co}$, $M_{2k}^* = M_2 + P_1 z_{co}$, находим

$$\left. \begin{aligned} P^* &= P_2 \cos \psi - P_3 \sin \psi = -f_2 \sigma_2 - f_3 \psi, \\ M_{\psi}^* &= M_{1k}^* = -f_6 \sigma_2 - f_7 \psi - f_8 \vartheta_0^*, \\ M_{\theta}^* &= M_3 \cos \psi + M_{2k}^* \sin \psi = -f_{10} \sigma_0 + f_{11} \vartheta_2^*. \end{aligned} \right\} (54)$$

Так как при ширине колеса равной нулю ($b = 0$) имеем $f_8 = f_{10} = 0$, то последние выражения (54) вместе с уравнениями (21) соответствуют теории М.В. Келдыша. При этом кривизна линии качения явно не зависит от ψ .

Найдем теперь связь с теорией В.С.Гоздека [4]. В теории [4] находятся четыре составляющие реакции связи. Две из них определяются в соответствии с выражениями варианта II (15), (19), (21) при ширине колеса равной нулю, а две другие - по выражениям варианта III (14), (16), (37), что соответствует случаю "больших кинематических параметров".

Укажем также, что теории Ф. Картера [5] здесь соответствуют выражения (47) и (48) варианта IV при $a_2 = a_5 = 0$.

Л и т е р а т у р а

1. Левин М.А. Понижение порядка зависимостей для реакций связей катящегося деформируемого колеса. - ДАН БССР, 1974, № 6.
2. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. - Труды ЦАГИ, 1945, № 564.
3. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М., 1967.
4. Гоздек В.С. Устойчивость качения заблокирован-

ных колес шасси самолета. - Труды ЦАГИ, 1970, № 1196. 5.
5. Carter F.W. On the stability of running of locomotives. - "Proceedings of the Royal Society of London, 1928, v. 121, NA 788.

М.А. Левин, Ю.А. Гурвич

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПНЕВМАТИКА ПРИ БОКОВЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

При рассмотрении динамики и устойчивости механических систем с качением (например, автомобиль, трактор, самолет на взлетно-посадочной полосе) необходимо знать силы, действующие со стороны плоскости качения (дороги) на деформируемое колесо (пневматик). Причем эти силы (реакции связей), изменяются во времени, т.е. являются нестационарными. Теоретически эти реакции исследовались многими авторами. Известные экспериментальные работы в основном рассматривают стационарные реакции.

В данной работе изучаются нестационарные характеристики деформируемого колеса. Для этой цели используются специализированная установка, впервые позволяющая получать частотные характеристики катящегося деформируемого колеса.

В работе излагаются результаты экспериментального исследования некоторых характеристик нестационарного и стационарного увода катящегося деформируемого колеса, имеющего в своем составе пневматическую шину 135-254 (5,00-10) модели В-19А. В частности, получены амплитудно-частотные характеристики в функции кинематической частоты при больших боковых силах, т.е. с учетом проскальзывания в области контакта и характеристики увода при постоянных боковых силах. Без этих данных невозможно рассмотрение колебаний в системе управляемых колес и исследования устойчивости движения транспорта с пневматическими шинами.

В работах [3 - 6] используется кинематическая частота, которая связана с путевой частотой, применяемой в работах [1, 2].

При исследовании нестационарных характеристик увода шины важно также определять их независимо от времени. Необходимо учесть быстроту изменения бокового воздействия, например, перемещение при прохождении центром колеса, движущегося со скоростью v , расстояния, равного длине площадки контакта $2a$. Если T – период бокового гармонического воздействия, то соотношение $k = \frac{2a}{vT}$ показывает, сколько циклов бокового возмущения имело место за время прохождения центром колеса пути $2a$. Если τ – время одного оборота барабана, а d – диаметр бегового барабана, то линейная скорость точек периферии барабана определяется зависимостью $v = \frac{\pi d}{\tau}$, при этом соотношение $\nu = \frac{2a}{vT} 2\pi$ будем называть кинематической безразмерной круговой частотой. Кинематическая частота линейно зависит от времени τ . Формула для кинематической частоты принимает вид:

$$\nu = \frac{4a}{dT} \tau .$$

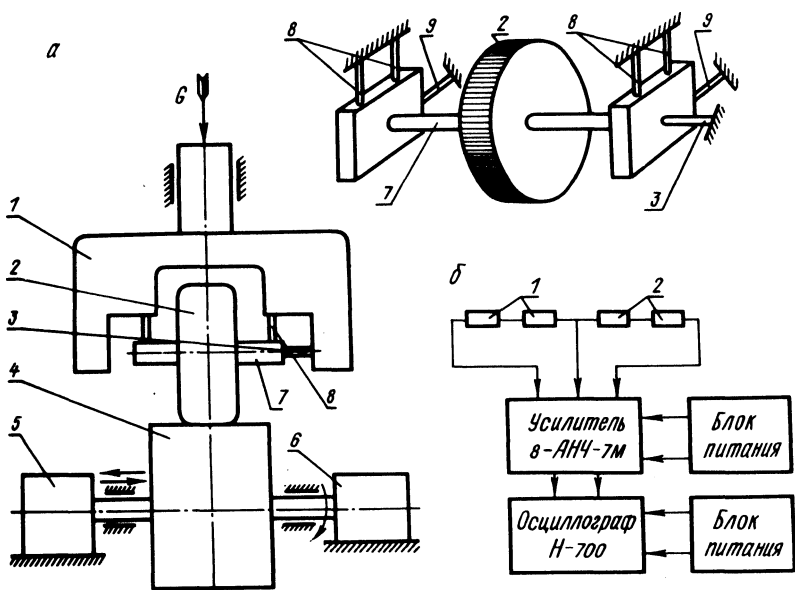


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки для получения характеристик нестационарного увода (а) и схема усиления (б):

1 – основные тензорезисторы; 2 – компенсационные .

Для экспериментального определения характеристик нестационарного и стационарного увода авторами спроектирован и изготовлен стенд, принципиальная схема которого представлена на рис. 1, а.

Каретка 1 может совершать возвратно-поступательное и вращательное движение в вертикальных направляющих, при этом колесо 2, вращающееся на оправке 7, прижимается к поверхности бегового барабана 4. Беговой барабан 4 приводится во вращение двигателем постоянного тока 6 с регулируемой скоростью вращения.

Осциллятор 5 с регулируемой величиной амплитуды придает беговому барабану осциллирующее движение.

Кинематическая частота может изменяться за счет T и v .

С целью исключения инерции колеса с шиной кинематическая частота изменяется не за счет изменения частоты осциллятора (что при больших частотах вносило бы значительную погрешность из-за инерции), а за счет изменения скорости v или времени τ , в то время как входящий в состав стенда низкочастотный осциллятор имеет фиксированный период T , который равняется приблизительно четырем секундам (0,25 гц). Это дает возможность пройти диапазон кинематической частоты от $\nu = 0$ до $\nu = \infty$.

Для того чтобы еще больше уменьшить влияние инерции колеса с шиной, гармоническое перемещение в осевом направлении придается беговому барабану, а не шине с колесом.

Колесо с шиной 2 устанавливается на оправке 7, которая закрепляется в каретке 1 при помощи пространственной системы стержней 8, 9, 3.

Пространственная система стержней состоит из четырех вертикальных стержней 8, которые сжимаются при приложении вертикальной нагрузки, двух поперечных стержней 9, которые сжимаются или растягиваются при приложении тангенциальной нагрузки к колесу с шиной, и одного продольного стержня 3, который растягивается или сжимается при приложении боковой нагрузки к колесу с шиной. При сжатии стержня на какую-то величину конец стержня, расположенный перпендикулярно к этому стержню, перемещается на ту же самую величину, т.е. второй стержень изгибается. Длина и поперечные размеры стержней подобраны таким образом, что усилие, необходимое для изгиба одного стержня, составляет около 0,5% от усилия, необходимого для растяжения (сжатия) второго стержня, при этом также выполняются условия устойчивости стержней под действием осевой нагрузки.

Для снятия характеристик нестационарного увода, амплитудно-частотных характеристик пневматической шины 135-254, испытываемое колесо с шиной 2 нагружается вертикальной силой G . При этом вертикальные стержни 8 сжимаются и наклеенные на них фольговые тензорезисторы ФКПА-10-100, собранные в полумостовую схему, реагируют на деформацию. Сигналы от тензорезисторов усиливаются с помощью усилителя 8-АНЧ-7М и фиксируются осциллографом Н-700. Схема усиления показана на рис. 1, б.

Затем включается двигатель постоянного тока 6 с регулируемой скоростью вращения, а осциллографом фиксируется погрешность нуля при измерении боковых сил в зависимости от вертикальных нагрузок, причем для каждой вертикальной нагрузки существует своя погрешность нуля.

Для вертикальной нагрузки $G = 500$ кг погрешность нуля при измерении боковой силы равна 350 кгс/м, для $G = 400$ кгс погрешность нуля составляет 250 кгс/м и для $G = 200$ кгс погрешность нуля равна 150 кгс/м (в единицах измерения Q / e).

Далее осуществляется пуск осциллятора при предварительно установленной определенной амплитуде (эксцентриситете) гармонического перемещения бегового барабана. Изменяя скорость вращения бегового барабана или время τ , определяем при этом значение амплитуды боковой силы Q , под действием которой стержень 3 сжимается или растягивается, а тензорезисторы, наклеенные на стержень 3, реагируют на деформацию и результат фиксируется осциллографом.

Для каждого значения ν или τ на осциллограмме получено по 11 амплитуд боковой силы.

Обработка экспериментальных данных ведется по средней арифметической измеренных амплитуд боковой силы для каждого значения ν .

Далее подсчитывается дисперсия и стандарт. Дисперсия обозначается через σ^2 и выражается формулой

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [A(Q_i) - A(\bar{Q})]^2}{(n-1)e^2},$$

где $A(Q_i)$ - результат i -го измерения амплитуды боковой силы; $A(\bar{Q})$ - средняя арифметическая измеренных значений

Таблица 1

τ, c	$A(\bar{Q}),$ кгс	$A(\bar{Q})/e$ кгс/м	$\sigma^2 \cdot 10^{-5},$ кгс ² /м ²	$\sigma,$ кгс/м
3,0	36,0	3600	0,40	200
5,0	46,0	4600	4,80	690
6,0	48,0	4800	2,70	520
9,2	52,0	5200	3,32	576
11,0	54,0	5400	4,10	640
16,0	52,0	5200	2,95	543
20,0	51,0	5100	2,92	540
23,5	48,0	4800	1,81	432
29,5	46,0	4600	2,72	521
32,5	46,1	4610	1,61	402
45,0	47,0	4700	0,76	277
58,0	48,4	4840	1,53	392
70,0	50,6	5060	0,43	208
80,5	51,0	5100	0,70	264
118	55,4	5540	1,22	330

амплитуд боковой силы ($n=11$); e - эксцентриситет (амплитуда) осциллятора, а стандарт равен σ .

В табл. 1 приведены цифровые результаты обработки экспериментальных данных для вертикальной нагрузки $G=500$ кгс.

По вычисленным средним значениям амплитуд боковых сил $A(\bar{Q})$ строим графики амплитудно-частотных характеристик боковых сил в функции кинематической частоты ν . По оси абсцисс откладываем время τ , которое пропорционально кинематической частоте ν , а по оси ординат амплитуду боковой силы, поделенной на величину эксцентриситета (амплитуду) гармонического осциллятора $\frac{A(Q)}{e}$.

Результаты экспериментов по определению амплитудно-частотных характеристик боковых сил в функции кинематической частоты приведены на рис. 2, причем все кривые получены для одного значения эксцентриситета гармонического осциллятора $e=0,005$ м и для одного давления воздуха в пневматике $p=2,3$ кгс/см² при этом $2a$ равно 0,2, 0,18, 0,13 м при G равных соответственно 500, 400, 200 кгс.

Обратим внимание на то, что начальные участки кривых (рис. 2.), снятых даже при наличии проскальзывания, совпа-

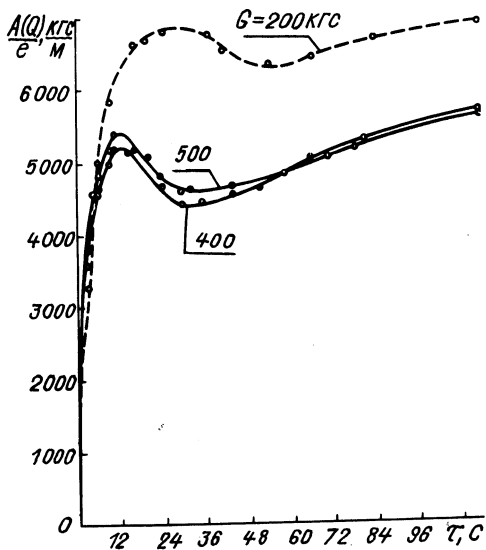


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики боковой силы пневматика 135 — 254.

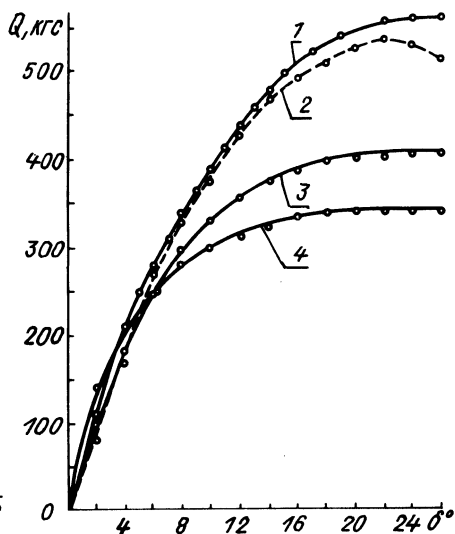


Рис. 3. Зависимость боковой силы от угла увода $Q = Q(\delta)$;
1 — $G = 500$ кгс; 2 — 400;
3 — 300; 4 — 200; $P = 2,3$ ати.

дают по характеру с аналогичными теоретическими кривыми, полученными в работе [5].

В заключение отметим экспериментальную работу Д.А. Антонова [7], в которой рассматриваются нестановившиеся значения боковой силы при вращательном движении каретки с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси.

Для снятия характеристик стационарного увода боковой силы в функции угла увода $Q = Q(\delta)$ каретка 1 с колесом 2 (рис. 1) устанавливается под разными углами (углами увода) к срединной плоскости бегового барабана, нагружается вертикальной силой G . Предварительно до поворота каретки фиксируется осциллографом погрешность нуля при измерении боковых сил, причем для каждой вертикальной нагрузки фиксируется погрешность нуля боковой силы. Затем замеряется боковая сила Q .

При обработке экспериментальных данных подсчитывалась средняя арифметическая боковой силы \bar{Q} , определялась дисперсия σ^2 и вычислялся стандарт σ .

Графики зависимости $Q = Q(\delta)$ для разных вертикальных нагрузок приведены на рис. 3, причем все эксперименты проводились при одном давлении воздуха в пневматике $p = 2,3 \text{ кгс/см}^2$.

Л и т е р а т у р а

1. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. – Труды ЦАГИ, 1945, № 564. 2. Певзнер Я.М. О качении автомобильных шин при быстроменяющихся режимах увода. – "Автомобильная промышленность", 1968, № 6. 3. Левин М.А. Новая теория бокового увода колеса, приводящая к интегрально-разностным или дифференциально-разностным уравнениям. – В сб.: Мат-лы секции теор. и прикл. механики. 25 науч.-техн. конф. БПИ. Минск, 1969. 4. Левин М.А. Нестационарный увод колеса с учетом проскальзывания в области контакта. – В сб.: Мат-лы секции теор. и прикл. механики. 26 науч.-техн. конф. БПИ. Минск, 1970. 5. Левин М.А. Примеры определения условий самовозбуждения автоколебаний в системах с деформируемым колесом. – В сб.: Мат-лы секции теор. и прикл. механики. 26 науч.-техн. конф. БПИ. Минск, 1970. 6. Левин М.А. Зависимость тангенциальной реакции от псевдоскольжения при качении упругого колеса. – ДАН БССР, 1971, № 5. 7. Анисимов Д.А. Экспериментальные зависимости по боковому уводу шин. – "Автомобильная промышленность", 1963, № 5.

В.П. Бадеев, Ш.Ф. Марголин

О МЕХАНИЗМАХ ДВИЖЕНИЯ ПО СЛОЖНОМУ ЗАКОНУ В ОДНОМ НАПРАВЛЕНИИ С ОСТАНОВКАМИ

Механизм подачи слоттера представляет собой сложный пространственный улиточный механизм, состоящий из кулачка барабанного типа, совершающего равномерное вращательное движение, и ведомого звена, которое выполняет неравномерное вращательное движение в одном направлении с остановкой. Диаграмма зависимости угла α поворота ведомого звена от угла φ поворота кулачка представлена на рис. 1, а (кривая α).

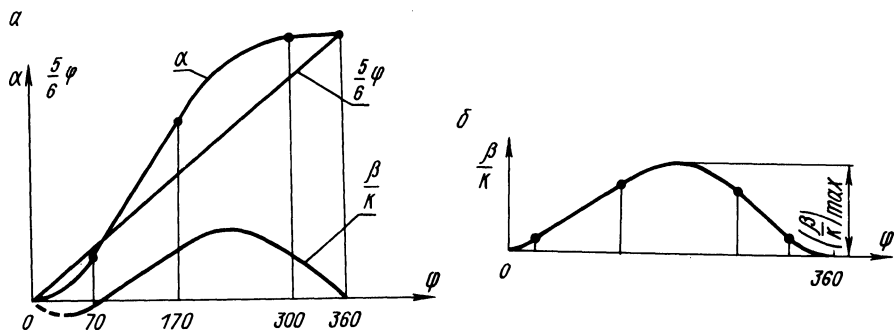


Рис. 1.

За полный оборот кулачка ведомое звено в соответствии с заданной диаграммой поворачивается на 300° ($5/6$ оборота).

Механизм слоттера, несмотря на свою внешне кажущуюся простоту, имеет существенные недостатки.

Главным недостатком механизма подачи слоттера, где ведущее звено представляет собой сложный кулачок барабанного типа большого диаметра (около 450 мм), является повышенный износ кулачка. Он выходит из строя после сравнительно небольшого срока работы. Другим недостатком является невозможность изготовления кулачка на наших отечественных станках без довольно сложного приспособления. Последним недостатком является высокая стоимость кулачка.

Все эти причины заставляют нас работать над новым механизмом, который может полностью заменить механизм подачи слоттера, сохраняя, естественно, заданный закон движения ведомого звена.

Механизм, кинематическая схема которого приведена на рис. 2, может полностью заменить механизм подачи слоттера, который представлен дифференциальным механизмом, состоящим в свою очередь из центрального колеса с внутренним зацеплением $2'$, сателита 3, водила Н и другого центрального колеса 4, жестко связанного с ведомым валом II. Центральное колесо $2'$ получает вращательное движение от ведущего вала I при помощи зубчатых колес 1 и 2 с внешним зацеплением, из которых первое жестко сидит на ведущем валу I, а второе жестко связано с колесом $2'$. Водило Н, являясь толкателем кулачкового механизма, получает возвратно-вращательное движение от плоского дискового кулачка К, который жестко сидит на ведущем валу I. Таким образом, закон вра-

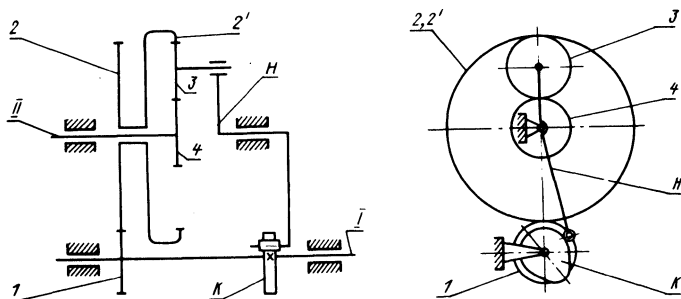


Рис. 2.

шательного движения центрального колеса 4 и вместе с ним ведомого вала II будет зависеть от вращательного движения колеса 2' и возвратно-вращательного движения водила Н, движение которым передается от ведущего вала I. Подбирая нужный профиль дискового кулачка, можно осуществить требуемое движение ведомого вала II.

Произведем кинематический расчет механизма.

Для дифференциального механизма можно написать

$$i_{24}^H = \frac{n_2 - n_H}{n_4 - n_H}, \quad (1)$$

где i_{24}^H - передаточное отношение от колеса 2' (2) к колесу 4 в предположении, что водило Н остановлено; n_2, n_4 и n_H - число оборотов соответствующих звеньев механизма.

Переходя от оборотов к углам, уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$i_{24}^H = \frac{\varphi_2 - \beta}{\alpha - \beta}, \quad (1a)$$

где φ_2 - угол поворота колес 2 и 2'; α - угол поворота ведомого звена (колеса 4 и вала II); β - угол поворота водила.

Величина i_{24}^H равна

$$i_{24}^H = -\frac{z_4}{z_{2'}}. \quad (2)$$

Выразим угол поворота φ_2 звена 2 через угол поворота ведущего звена I. Для этого обозначим

$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi} ,$$

откуда

$$\varphi_2 = i_{21} \varphi .$$

Тогда уравнение (1, а) примет вид

$$i_{24}^H = \frac{i_{21} \varphi - \beta}{\alpha - \beta} . \quad (2a)$$

Определим из этого уравнения требуемый закон изменения угла β поворота водила. Решая уравнение относительно β , получим

$$\beta = \frac{1}{1 - i_{24}^H} (i_{21} \varphi - i_{24}^H \alpha) . \quad (3)$$

Определим соотношение между передаточными отношениями i_{21} и i_{24}^H .

В соответствии с диаграммой, изображенной на рис. 1, а, имеем, что в начале цикла углы $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$. Следовательно, согласно уравнению (3) и угол $\beta = 0$.

Из этой же диаграммы следует, что в конце цикла $\varphi = 360^\circ$ и $\alpha = 300^\circ$. Но конец одного цикла есть начало следующего. Следовательно, в конце цикла, как и в начале, $\beta = 0$. Тогда, подставляя эти значения в уравнение (3), получим

$$0 = \frac{1}{1 - i_{24}^H} (i_{21} \cdot 360 - i_{24}^H \cdot 300)$$

или

$$i_{21} = \frac{5}{6} i_{24}^H . \quad (4)$$

Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$\beta = \frac{i_{24}^H}{1 - i_{24}^H} \left(\frac{5}{6} \varphi - \alpha \right) . \quad (5)$$

Обозначим

$$\frac{i_{24}^H}{1 - i_{24}^H} = k. \quad (6)$$

Тогда

$$\beta = k \left(\frac{5}{6} \varphi - \alpha \right). \quad (5a)$$

Таким образом, угол поворота β водила пропорционален величине $\left(\frac{5}{6} \varphi - \alpha \right)$.

На рис. 1, а построены диаграммы $\frac{5}{6} \varphi = f(\varphi)$, $\alpha = f(\varphi)$ и диаграмма $\frac{\beta}{k} = f(\varphi)$, как разность первых двух (величина k при этом принята отрицательной).

На рис. 1, б диаграмма $\frac{\beta}{k} = f(\varphi)$ построена отдельно. На ней изменена система отсчета углов φ и $\frac{\beta}{k}$. Последняя принята от одного из крайних положений водила.

По этой диаграмме следует строить профиль дискового кулачка.

Максимальная ордината диаграммы $\left(\frac{\beta}{k} \right)_{\max}$ есть величина пропорциональная углу размаха водила. Расчеты показали (мы их здесь не приводим), что эта величина равна

$$\left(\frac{\beta}{k} \right)_{\max} = 102^\circ.$$

Выберем величину i_{24}^H и соответственно величины i_{24}^H , k и β_{\max} . В табл. 1 приведены различные значения i_{24}^H и соответствующие им значения i_{21} и k , подсчитанные по формулам (4) и (6), а также значения углов β_{\max} , подсчитанные по формуле

$$\beta_{\max} = k \left(\frac{\beta}{k} \right)_{\max}. \quad (7)$$

Из табл. 1 видно, что механизмы с положительным значением i_{24}^H не могут удовлетворить требованиям конструкции, так как они требуют большого угла размаха водила, что трудно осуществимо кулачковым механизмом. Кроме того, это требует усложнения дифференциального механизма.

На нашей схеме (рис. 2) величина i_{24}^H является отрицательной. Из отрицательных величин наиболее приемлемой, пожалуй, является величина $i_{24}^H = -\frac{1}{3}$, так как при этой вели-

Таблица 1

i_{24}^H	i_{21}	k	β_{\max}
- 1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	51°
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	34°
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{4}$	$25,5^\circ$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{24}$	$-\frac{1}{5}$	$20,4^\circ$
$+\frac{1}{4}$	$+\frac{5}{24}$	$+\frac{1}{3}$	34°
$+\frac{1}{3}$	$+\frac{5}{18}$	$+\frac{1}{2}$	51°
$+\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{12}$	+ 1	102°

чине вполне допустимы и угол размаха водила $\beta_{\max} = 25,5^\circ$,
и передаточное отношение $i_{21} = -\frac{5}{18}$.

Остановившись на этих величинах, количество зубьев зубчатых колес можно принять равными: $z_1 = 20$, $z_2 = 72$, $z_2' = 72$, $z_3 = 24$, $z_4 = 24$. Легко проверить, что эти количества зубьев удовлетворяют выбранному варианту.

В ы в о д

Импортный механизм подачи слоттера, несмотря на свою внешне кажущуюся простоту, обладает целым рядом недостатков: сильно изнашивается, труден в изготовлении, очень дорог.

Предлагаемый нами механизм, заменяющий механизм подачи слоттера, устраняет эти недостатки, полностью сохраняя при этом требуемый закон движения ведомого звена. Он состоит из простого дифференциального механизма, водило которого является толкателем плоского кулачкового механизма, выполнение которых не представляет большого труда.

СТЕНД ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИКИ ТРЕНИЯ

Пары трения современных механизмов работают в условиях сложно-напряженного состояния при больших удельных давлениях и скоростях скольжения. В этих условиях исследования механики трения на лабораторных машинах не могут дать полного представления о ряде процессов, происходящих на поверхностях скольжения. В первую очередь это связано с тем, что такие испытания проводятся на образцах, которые по своей форме и размерам существенно отличаются от узлов трения реальных механизмов. Применение принципов моделирования и распространение результатов, полученных при моделировании, на реальный механизм, как правило, сопряжено с большими трудностями и дает недостаточно надежные показатели. В частности, размеры и форма поверхностей трения существенным образом влияют на гидродинамику масляного клина и на эпору давлений в зоне трения, а эти факторы определяют теплофизические характеристики узла в целом. Поэтому исследования параметров трения антифрикционных материалов должно завершаться стендовыми испытаниями реального узла машины.

Изготовленный нами стенд предназначен для испытания подшипников скольжения с различными смазывающе-охлаждающими жидкостями, подаваемыми под различным давлением в нагруженную или ненагруженную зону подшипника, консистентными смазками и всухую. Нагрузка на подшипник и скорость скольжения могут изменяться в процессе испытаний в широких пределах и поддерживаться в заданном режиме с высокой точностью. На стенде предусмотрено измерение суммарного износа вала и подшипника, измерение температурного поля подшипника и температурного градиента в его теле.

Стенд состоит из жесткой станины, установленной на сварной тумбе, внутри которой размещены: автономная система для подачи смазывающе-охлаждающей жидкости, электродвигатель постоянного тока 9 (рис. 2) для привода в движение вала контртела, два регулятора напряжения типа РНО-250-5, вентилятор для охлаждения регуляторов напряжения.

На станине закреплены: пульт управления стендом, задняя бабка и рабочая камера.

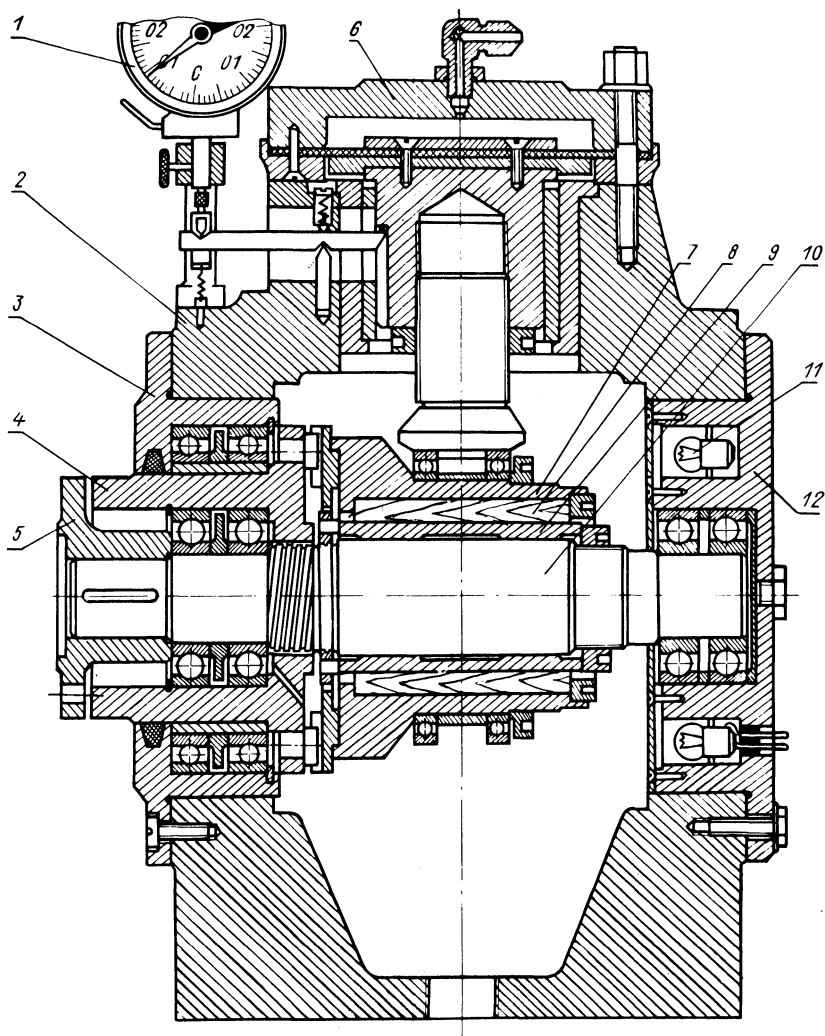


Рис. 1. Рабочая камера испытательного стенда.

Чугунная рабочая камера (рис. 1) состоит из двух половин, которые соединяются между собой болтами. Камера с торцов закрыта крышками: задней 12 глухой и передней 3 сквозной для выхода вала. Вал 10 вращается в шариковых подшипниках, посаженных в крышках. На валу плотно насаживаются и закрепляются гайкой сменные втулки (контртела) 9. В отверстиях

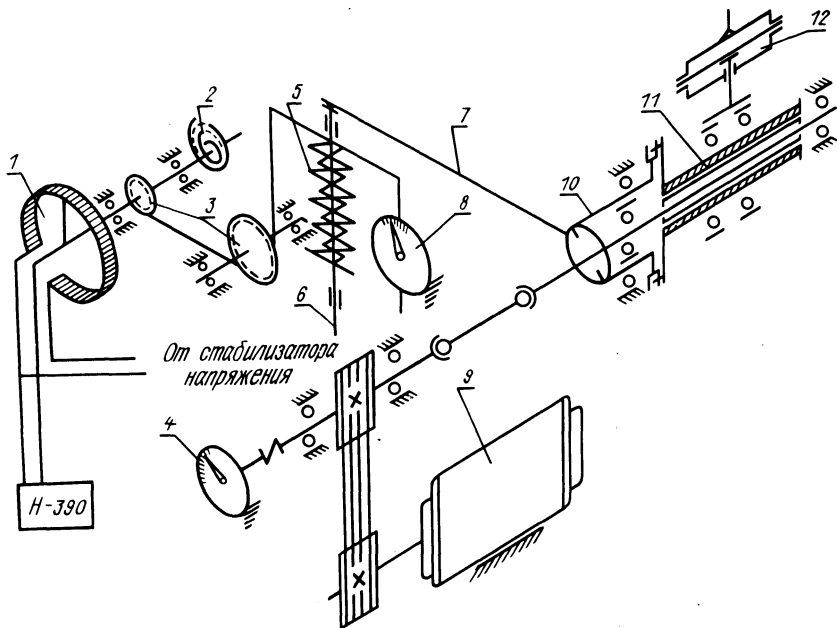


Рис. 2. Кинематическая схема испытательного стенда.

верхней части камеры вставлена бронзовая втулка, в которой перемещается шток камеры нагружения 6. Со штоком камеры нагружения через специальный механизм связан индикатор часового типа 1 с ценой деления 0,001 мм для измерения суммарного износа.

Испытываемый подшипник 8 находится в корпусе 7. Для уменьшения трения между штоком камеры нагружения и корпусом подшипника нагружение осуществляется через подшипники качения. Корпус испытываемого подшипника зацепляется с помощью двух шипов с приводной втулкой 4. На конце втулки жестко насажен рычаг устройства для измерения силы трения.

Для наблюдения за работой подшипника в задней крышке вмонтированы низковольтные лампы накаливания 11, а на передней стенке корпуса 2 рабочей камеры имеется смотровое окно.

Задняя бабка служит промежуточной опорой. В корпусе бабки на шариковых подшипниках вращается вал, на одном

конце которого находится шкив клиноременной передачи, а на втором – фланец для присоединения карданного вала. Карданный вал соединяет вал задней бабки с валом контртела через фланец 5.

В пульте управления собрана вся электрическая схема управления стендом. Здесь же располагается автоматический самопишущий потенциометр ПС-1-11 для измерения и записи температуры в 12 точках и самопишущий прибор Н-390 для контроля и записи силы трения. Измерение температуры в зоне трения осуществляется с помощью хромель-копелевых термомпар диаметром 0,2 мм, которые устанавливаются в сверлениях тела подшипника.

В средней части станины находится панель, на которой расположены манометры для контроля за давлением воздуха в системе нагружения и давлением смазывающе-охлаждающей жидкости, подаваемой в испытываемый подшипник.

Продолжительность испытаний отсчитывается по счетчику моточасов, установленному на станине слева. Для контроля за скоростью скольжения установлен тахометр 4 (рис. 2) типа ТМ-1, 5Л, имеющий привод от конца вала задней бабки.

Система нагружения подшипника. Рабочим телом в системе нагружения является сжатый воздух, который из баллона поступает к редукционному вентилю, назначение которого – изменять давление воздуха и поддерживать это давление с заданной точностью. Из редукционного вентиля воздух поступает в камеру нагружения 12 (рис. 2). Камера состоит из двух половин, между которыми находится резиновая диафрагма. Верхняя половина камеры и диафрагма образуют полость, в которую подводится сжатый воздух. С диафрагмой связан шток. Давление воздуха передается от диафрагмы через шток на испытываемый подшипник. Контроль давления воздуха, подаваемого в камеру, производится образцовым манометром с ценой деления 0,5 кгс/см².

Система нагружения тарируется с помощью динамометра. Для разгрузки подшипника воздух с помощью клапана стравливается в атмосферу.

Емкость баллона позволяет без его подкачки произвести около тысячи сбросов нагрузки. Давление воздуха в баллоне контролируется манометром.

Система измерения силы трения работает следующим образом: под действием силы трения между испытываемым подшипником 11 (рис. 2) и контртелом подшипник вместе с кор-

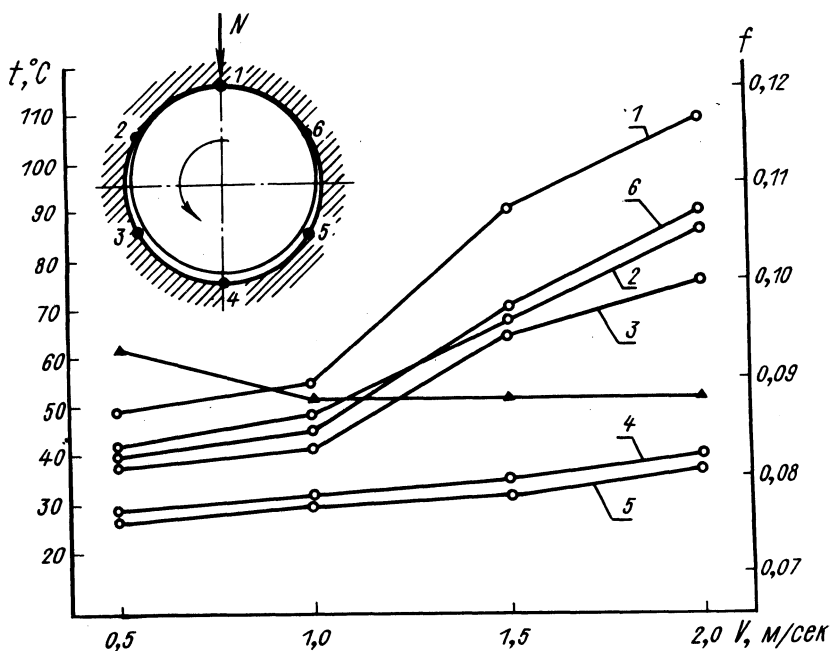


Рис. 3. Зависимость температуры и коэффициента трения от скорости скольжения :

сплошная линия – температура; линия с треугольниками – коэффициент трения.

пусом начинает поворачиваться. Поскольку корпус подшипника посредством двух шипов соединен с приводной втулкой 10, то она также приходит в движение. Круговому вращению корпуса подшипника, равно как и ведомой втулке, препятствуют пружины 5, свободно надетые на направляющий шток 6, на который в свою очередь опирается нагружающий рычаг 7, жестко соединенный с приводной втулкой 10.

Визуально сила трения фиксируется индикатором часового типа 8. Запись силы трения осуществляется на приборе Н-390, входной сигнал на который подается от стабилизатора напряжения через резистор 1. Перемещение движка резистора осуществляется спиральной пружиной 2 и стальным канатиком Φ 1 мм, переброшенным через блоки 3. Один конец канатика связан с направляющим штоком. Такой привод движка позволяет устранить его свободный ход.

Соотношение плеч нагружающего рычага 1 : 5. При изменении диаметра контртела предусмотрено изменение длины рычага.

Система подачи смазывающе-охлаждающей жидкости. Смазывающе-охлаждающая жидкость, из бака, пройдя через сетчатый фильтр и теплообменник, насосом подается в зону трения испытываемого подшипника.

Отбор тепла в теплообменнике осуществляется за счет циркуляции воды из водопровода.

Смазочная жидкость может быть подана в нагруженную или ненагруженную зону испытываемого подшипника. Температура жидкости на входе и выходе из зоны трения контролируется термометрами.

Давление жидкости регулируется числом оборотов двигателя постоянного тока.

Нами проводились стендовые испытания подшипников скольжения из древесины березы, модифицированной фенолоформальдегидной смолой, содержание которой в древесине составляло 12% по сухому остатку.

Целью испытаний на первом этапе было определение температурного поля подшипника при постоянной нагрузке ($P = 5 \text{ кгс/см}^2$) в зависимости от скорости скольжения и определение величины коэффициента трения в зависимости от этих режимов при работе с жидкой смазкой. Смазка подводилась в ненагруженную зону подшипника под давлением $3 \pm 0,2 \text{ кгс/см}^2$.

Измерение температуры проводилось в шести точках подшипника. Термомпары располагались по окружности подшипника через 60° на расстоянии $0,2 - 0,4 \text{ мм}$ от поверхности трения.

Результаты испытаний представлены на рис. 3. Линии 1 - 6 иллюстрируют температуры в каждой точке в зависимости от скорости скольжения. При изменении скорости скольжения от $0,5 \text{ м/с}$ до 2 м/с температура в ненагруженной зоне (точки 4, 5) почти не изменяется, что можно объяснить хорошим отводом тепла из этой зоны за счет подводимой смазки.

При подводе смазки в нагруженную (верхнюю) зону подшипника наблюдался интенсивный рост температуры даже в точках 4, 5.

Коэффициент трения при изменении скорости скольжения от $0,5 \text{ м/с}$ до 2 м/с изменяется в небольших пределах.

Некоторое уменьшение коэффициента трения с увеличением скорости скольжения происходит за счет улучшения условий смазки, условий образования масляного клина между трущимися поверхностями.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

З. П. Ш у л ь м а н, Э. А. З а л ь ц г е н д л е р, В. И. Б а й к о в. Свободная конвекция нелинейновязких жидкостей при граничных условиях второго рода	3
З. П. Ш у л ь м а н, В. И. Б а й к о в, Э. А. З а л ь ц г е н д л е р. Пространственная свободная конвекция нелинейновязких жидкостей около тонких тел вращения	13
В. М. Н о с о в. Влияние свойств материала диэлектрика на скорость его вращения в электрореологической суспензии в электрическом поле	20
Г. Н. А л е х н о в и ч. Влияние бензина АИ93 на вязкостные свойства масел М10Г ₃ и М12Г	24
Ю. М. П и к у с. Некоторые вопросы расчета неизотермического ламинарного течения реологически сложных жидкостей в щелевых каналах	27
Ю. М. П и к у с. Влияние центробежных сил инерции при ламинарном течении реологически сложных жидкостей в щелевых каналах	34
В. П. Я щ е р и ц ы н. Влияние магнитного поля на реологические характеристики ферросуспензий	38
В. П. Я щ е р и ц ы н. Магнитореометр для исследования реологических свойств ферромагнитных текучих сред в магнитном поле	41
М. П. К о з е е в. Исследование пристенного скольжения при движении вязко-пластичных систем в плоских конических насадках	44

- В. И. Г л у б о к и й. Реологические свойства кремнийор-
ганических полимеров 46
- М. Д. У с т и н о в. К задаче о движении сильной ударной
волны в покоящемся газе 49
- Р. В. Ш а й м у р а т о в. К расчету фильтрационного по-
тока жидкостей в системе скважин 58
- Ю. А. К а ш и н, Л. Б. Ш к о л ь н и к о в. Анализ рабо-
ты делителя потока 66
- В. П. С т а в р о в, В. И. Т и т е н о к. К расчету диа-
грамм растяжения композитного материала 73
- В. П. С т а в р о в, Л. А. К р у т ь. О распределении на-
чальных напряжений в композитном материале 82
- А. Е. К р у ш е в с к и й, В. М. Ч у р а к о в. Примеры
решения некоторых задач математической теории упругости в
неортогональных рядах 91
- А. Е. К р у ш е в с к и й, В. Ф. К о н д р а т ю к, Н. Я.
Б о й к о, В. М. Ш и п о в с к и й. Применение методов ана-
литической механики к задаче определения напряженного со-
стояния корпусных деталей прессов 102
- Н. Я. Б о й к о. К вопросу о равновесии упругого парал-
лелепипеда при частных видах нагрузки 113
- С. С. Г у р и н, Е. Н. Л а м б и н а. Приближенный рас-
чет термоупругих напряжений в биметаллических отливках . 130
- А. Н. Д у б к о. Определение масс тяжелых точек на при-
веденных схемах балок при расчетах частот собственных из-
гибных колебаний 136
- В. С. В и х р е н к о, М. И. К у л а к. О преобразовании
тензоров в пространстве трансляций и поворотов твердого
тела 141
- М. А. Л е в и н. К вопросу о понижении порядка выраже-

ний, описывающих реакции связи катящегося деформируемого колеса 146

М. А. Левин, Ю. А. Гурвич. Экспериментальное определение характеристик пневматика при боковых гармонических воздействиях 166

В. П. Бадеев, Ш. Ф. Марголин. О механизмах движения по сложному закону в одном направлении с остановками 172

А. В. Моисеев, Ф. М. Олехнович, Ф. И. Матюшенко. Стенд для исследования механики трения . 178

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. ВЫП.2.

Редактор Вагабова Г.В.

Худож. редактор Беленькая И.Е.

Техн. редактор Жук Л.И.

Корректоры Боборыко З.Б., Михайлова С.И.

График Журавлева Н.В.

Операторы Маль А.И., Прохорова И.В.

АТ 11642. Подписано к печати 17/1-1975г. Бумага 60x90 1/16
Типогр. офсет. Печ. л. 12,25. Уч.-изд. л. 11,55. Изд. № 74-33.
Тип. зак. 5479. Тираж 700 экз. Цена 1р. 16к.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета
Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли. Редакция межведомственных сборников и за-
казной литературы. Минск, 220600, ул. Кирова, 24.

Типография "Победа" Государственного комитета Совета Мини-
стров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной тор-
говли. Молодечно, Привокзальный переулок, 11.

РЕФЕРАТЫ

УДК 536.25;532.135

Свободная конвекция нелинейновязких жидкостей при граничных условиях второго рода. Шульман З.П., Зальцгендлер Э.А., Байков В.И. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Получены автомодельные решения задач стационарной свободной конвекции нелинейновязких жидкостей при граничных условиях второго рода. Рассмотрены случаи: 1) вертикальной пластины; 2) клина; 3) плоской критической точки; 4) вертикального цилиндра; 5) вертикального конуса и 6) пространственной критической точки. Проанализированы возможности получения автомодельных решений при учете осложняющих факторов: 1) теплозависимости коэффициента консистенции; 2) переменных тепловых потоков на стенке. - Библ. 6.

УДК 536.25;532.135

Пространственная свободная конвекция нелинейновязких жидкостей около тонких тел вращения. Шульман З.П., Байков В.И., Зальцгендлер Э.А. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Получены и проанализированы автомодельные решения пространственной задачи свободной конвекции нелинейновязких жидкостей около тонких тел вращения. Исследовано влияние поперечной кривизны на теплообмен и трение на стенке. Численные расчеты, проведенные модифицированным методом Ньютона, показали, что в тех случаях, когда толщина пограничного слоя сопоставима с радиусом тела вращения, влияние поперечной кривизны весьма значительно. - Ил. 2. Библ. 8.

УДК 532.135:537.212

Влияние свойств материала диэлектрика на скорость его вращения в электрореологической суспензии в электрическом поле. Носов В.М. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Приводятся результаты экспериментального исследования вращения диэлектрика в постоянном электрическом поле в электрореологических дисперсных системах.

Показано влияние материала диэлектрического ротора на скорость его вращения в электрическом поле. Обнаружена корреляция скоростью вращения n и электрофизическими характеристиками материала: удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Установлена возможность интенсификации эффекта вращения диэлектрика путем изменения электрофизических характеристик материала тела вращения. - Ил. 2. Табл. 1. Библ. 7.

УДК 532.135.541.182.001.5.

Влияние бензина АИ93 на вязкостные свойства масел М10Г₃ и М12Г. Алехнович Г.Н. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

В результате попадания бензина в систему смазки изменяются вязкостные свойства масла. В работе приведены данные, полученные в результате исследования в большом диапазоне скоростей сдвига и температур, о влиянии степени концентрации бензина на вязкостные свойства масла. - Ил. 2. Табл. 1.

УДК 621.822:532.135

Некоторые вопросы расчета неизотермического ламинарного течения реологически сложных жидкостей в щелевых каналах. Пикус Ю.М. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2.

Рассмотрено неизотермическое течение реологически сложной жидкости в щелевом канале между коническими поверхностями применительно к задаче теории смазки конических гидростатических упорных подшипников с центральной камерой. В качестве исходной реологической модели использовано уравнение нелинейно-вязкопластичной среды. Получены формулы

для определения расхода и нагрева смазочной среды, затрат мощности на ее прокачку, несущей способности с учетом диссипативного тепловыделения при работе опоры в режиме медленных перемещений. – Ил. 1. Библ. 5.

УДК 621.822:532.135.

Влияние центробежных сил инерции при ламинарном течении реологически сложных жидкостей в щелевых каналах. Пикус Ю.М. "Теоретическая и прикладная механика". 1975, вып. 2, с.

Рассмотрено влияние центробежных сил инерции при изотермическом ламинарном течении в щелевых каналах реологически сложной нелинейно-вязкой жидкости применительно к задачам теории смазки конических и плоских гидростатических подпятников с центральной камерой. Приведены формулы для расчета основных характеристик этих опор с учетом центробежных сил. Получены зависимости, позволяющие установить границы влияния этих сил для сред с различными значениями показателя неньютоновского поведения. – Ил. 1. Библ. 6.

УДК 532.135.

Влияние магнитного поля на реологические характеристики ферросуспензий. Ящерицын В.П. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Приводятся кривые течения суспензий на основе ферропорошка Р10 в однородном поперечном магнитном поле. Под воздействием внешнего магнитного поля ферросуспензии приобретают ярко выраженные неньютоновские свойства, значительно повышается предел текучести. Показано, что кривые течения вполне адекватно описываются обобщенным уравнением нелинейно-вязкопластичной среды Шульмана. Получены экспериментальные зависимости параметров этого уравнения от величины напряженности магнитного поля. – Ил. 1. Библ. 1.

УДК 532.135

Магнитореометр для исследования реологических свойств ферромагнитных текучих сред в магнитном поле. Ящерицын В.П. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Описывается устройство соосноцилиндрического реометра для исследования реологических сред в однородном магнитном поле, ориентированном по нормали к поверхностям сдвига. Рассмотрен ряд специфических требований, предъявляемых к приборам подобного типа. – Ил. 1. Библ. 1.

УДК 532.135.541.182.001.5

Исследование пристенного скольжения при движении вязкопластичных систем в плоских конических насадках. Козеев М.П. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

В работе произведено исследование движения консистентной смазки ЦИАТИМ-201, строительной глины и мучного теста в плоских конических насадках. Получены числовые значения коэффициента пристенного скольжения. Установлена зависимость этого коэффициента от угла раствора конического насадка и влажности исследуемой системы. – Табл. 1.

УДК 532.135 - 541.6

Реологические свойства кремнийорганических полимеров. Глубокий В.И. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Приведены результаты исследования реологических свойств растворов полиорганосилоксановых смол и некоторых композиций на их основе. Установлено их реологическое состояние и влияние концентрации смолы и модифицирующего полиэфира, а также температурного фактора на реологические свойства. – Ил. 3.

УДК 533.6.011

К задаче о движении сильной ударной волны в покоящемся газе. Устинов М.Д. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

При исследовании ряда задач одномерной газовой динамики в некоторых случаях постоянные, фигурирующие в условиях задачи, и независимые переменные позволяют образовать две независимые безразмерные комбинации, но анализ граничных условий (и уравнений движения) позволяет нелинейную

систему уравнений в частных производных, описывающих течение газа, свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе рассмотрена обратная задача о нахождении движения поршня, порождающего заданную ударную волну, двигающуюся в покоящейся газе. – Библ. 10.

УДК 622.276.43.

К расчету фильтрационного потока жидкостей в системе скважин. Шаймуратов Р.В. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Приводится алгоритм численного решения задачи вытеснения нефти водой при площадном заводнении пласта до и после прорыва воды в эксплуатационные скважины. – Ил. 2. Библ. 2.

УДК 532.5

Анализ работы делителя потока. Кашин Ю.А., Школьников Л.Б. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Выполнен анализ работы делителя потока. Задача решена для плоского случая. Рассмотрено равновесие регулирующего органа, находящегося под действием сил вязкого трения и гидростатического давления. – Ил. 3. Библ. 2.

УДК 678.01:539.4.015.1

К расчету диаграмм растяжения композитного материала. Ставров В.П., Титенок В.И. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Простейшая статистическая (континуальная) модель, учитывающая хрупкие разрушения в структуре, применена для построения диаграмм деформирования хаотически армированного композитного материала, расчета предела прочности и меры микрповрежденности при одноосном растяжении. Показана связь нелинейного поведения композитных материалов под нагрузкой с микрповреждениями в структуре, обусловленными ее неоднородностью. – Ил. 3. Библ. 11.

УДК 539.3.

О распределении начальных напряжений в композитном материале. Ставров В.П., Круть Л.А. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Дано решение статистической краевой задачи теории упругости в реализациях. С помощью метода статистических испытаний выведен закон распределения случайных напряжений в компонентах композитного материала. - Ил. 3. Библ. 8.

УДК 539.3

Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах. Крушевский А.Е., Чураков В.М. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Дается замкнутое решение в неортогональных рядах задачи о равновесии упругого квадрата и прямоугольника под действием ступенчатой, треугольной и сосредоточенной нагрузки. Все вычисления, на основании которых построены графики напряжений, произведены на ЭВМ "Минск-22". Приводится также численное исследование задачи о равномерном вращении упругого цилиндра вокруг неподвижной оси на основе замкнутого решения в неортогональных рядах. - Ил. 3. Табл. 2. Библ. 5.

УДК 621.81:539.4.

Применение методов аналитической механики к задаче определения напряженного состояния корпусных деталей прессов. Крушевский А.Е., Кондратюк В.Ф., Бойко Н.Я., Шиповский В.М. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Для выполнения равновесия внутри и в отдельных точках на поверхности составляются уравнения связей, которые включаются в вариационные уравнения с помощью множителей Лагранжа. Весь процесс формирования расчетных уравнений, решение и вычисление напряжений производится на ЭВМ "Минск-22". Выполненные конкретные расчеты стола пресса К25 35А и станины пресса К8544 обнаруживают удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов. - Ил. 4. Табл. 2. Библ. 2.

УДК 539.3.

К вопросу о равновесии упругого параллелепипеда причастных видах нагрузки. Бойко Н.Я. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

На основе вариационного метода перемещений с помощью рядов Фурье и дополнительных членов дано решение некоторых частных задач о равновесии упругого параллелепипеда при заданных на его двух противоположных гранях касательных напряжениях и нормальных перемещениях или касательных перемещениях и нормальных напряжениях. Граничные условия удовлетворяются точно. Постоянные интегрирования определяются из условий закрепления параллелепипеда по двум граням. - Библ. 13.

УДК 539.319.096 + 016.3

Приближенный расчет термоупругих напряжений в биметаллических отливках. Гурин С.С., Ламбина Е.Н. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

В статье вычисляются термоупругие напряжения, возникающие при изготовлении биметаллического диска с легкоплавкой перегородкой между цилиндрической и кольцевой его частями. Определяются также остаточные термоупругие напряжения, обусловленные спецификой конструкции биметаллического диска. - Библ. 3.

УДК 534.11

Определение масс тяжелых точек на приведенных схемах балок при расчетах частот собственных изгибных колебаний. Дубко А.Н. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Рассмотрена задача о построении приведенной схемы балки в виде невесомой упругой связи с тяжелыми точками для определения частот собственных изгибных колебаний. Выведена формула, позволяющая вычислять величины масс тяжелых точек в зависимости от всех конструктивных и геометрических особенностей балки. - Библ. 4.

УДК 533.723 + 531.36

О преобразовании тензоров в пространстве трансляций и поворотов твердого тела. Вихренко В.С., Кулак М.И. "Теоретическая и прикладная механика", вып. 2, с.

Динамические характеристики абсолютно твердого тела рассматриваются как тензоры в шестимерном римановом пространстве с метрикой, определяемой тензором коэффициентов инерции. Исследуется преобразование указанных характеристик при изменении положения полюса и ориентации, связанной с полюсом декартовой системы координат относительно тела. – Библ. 5.

УДК 531.3 + 629.11.012.5

К вопросу о понижении порядка выражений, описывающих реакции связи катящегося деформируемого колеса. Левин М.А. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Дается подробный вывод выражений более низкого порядка для изменяющихся во времени реакций связи деформируемого колеса, катящегося по абсолютно твердой плоскости качения при пренебрежимо малом проскальзывании в области контакта. – Библ. 5.

УДК 531.78 + 629.11.012.5

Экспериментальное определение характеристик пневматика при боковых гармонических воздействиях. Левин М.А., Гурвич Ю.А. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Излагаются результаты экспериментального определения нестационарных характеристик деформируемого колеса с шиной (пневматика) 135-254 модели В-19А на специализированной установке, позволяющей снимать амплитудно-частотные характеристики боковых сил в функции кинематической частоты, и некоторые результаты экспериментального исследования стационарного увода того же пневматика. – Ил. 3. Табл. 1. Библ. 7.

УДК 621.835

О механизмах движения по сложному закону в одном направлении с остановками. Бадеев В.П., Марголин Ш.Ф. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Рассматриваются два механизма, в которых ведомое звено вращается все время в одном направлении по сложному закону с остановками. Один механизм улиточного типа очень сложен в изготовлении и дорог. Другой механизм, предложенный авторами, состоящий из простых плоского кулачкового и дифференциального механизмов, может с успехом его заменить при сохранении требуемого закона движения. – Ил. 2. Табл. 1.

УДК 620.1.05:531.44

Стенд для исследования механики трения. Моисеев А.В., Олехнович Ф.М., Матюшенко Ф.И. "Теоретическая и прикладная механика", 1975, вып. 2, с.

Приведено описание конструкции стенда для исследования механики трения. Стенд позволяет испытывать подшипники скольжения из различных антифрикционных материалов в широком диапазоне нагрузки на подшипник в широком интервале скоростей скольжения.

Испытания можно проводить как в условиях сухого трения, так и при подаче различных смазывающе-охлаждающих жидкостей. – Ил. 3.