УДК 539.3

А.Е.КРУШЕВСКИЙ, А.З.СЕВЕНЮК

ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЖАТИЯ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ОТСУТСТВИИ НАГРУЗКИ НА ЧЕТЫРЕХ ЕГО ГРАНЯХ

В последнее время возрос интерес к решению пространственных задач теории упругости на основе различных вариационных методов [1,2]. При этом вопрос о выборе координатных функций решается по-разному. Одни авторы используют специальные ряды неортогональных функций, например, косинус-биномы [1], ряды функций с радикалами (R-функции) [3]. Однако для решения многих задач могут быть использованы известные стандартные степенные ряды [4]. Для этой цели на стандартные степенные ряды накладываются граничные условия и получаемые при этом зависимости рассматриваются как уравнения связей по отношению к вариационным уравнениям. Если исключить с помощью уравнений связей неизвестные обобщенные перемещения, то получим ряды для перемещений, удовлетворяющие краевым условиям.

Изложенное поясним на примере сжатия упругого параллелепипеда со свободными от нагрузки четырьмя гранями.

Ряды перемещений для данной задачи запишем в виде:

$$u = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-1} y^{2n-2} U_{2m-1,\,2n-2}(z)\ ;$$

$$v = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-1} V_{2m-2,\,2n-1}(z)\ ;$$

$$w = \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m-2} y^{2n-2} W_{2m-2,\,2n-2}(z).$$

На гранях $X = \pm \frac{a}{2}$ выполним условия $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, а на гранях $Y = \pm \frac{b}{2}$ $\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$. В результате исключения уравнений связей мы получим структуру решения задачи сжатия упругого параллелепипеда со свободными от нагрузки четырьмя гранями. Напряженно-деформированное состояние параллелепипеда разбивается на четыре вида состояний.

Первое состояние описывается следующими рядами и двумя связями:

$$u = x \sum_{m=1} \left[\frac{1}{2m+1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - x^{2m} \right) - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z)\ ;$$

$$v = y \sum_{n=1} \left[\frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^{2m}}{4^m} - y^{2m} \right) - \frac{2nb^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z);$$

$$w = W_{00}(z) + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0}(z) + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}(z).$$

Уравнения связей

$$\gamma_2 d_z W_{00}(z) + \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m}}{4^m} \left(\frac{\gamma}{2m+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma m a^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z) +$$

$$+ \gamma_2 \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n}}{4^n (2n+1)} - \frac{2n\, b^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0;$$

$$\gamma_2 d_z W_{00}(z) + \gamma_2 \sum_{m=1} \left[\frac{a^{2m}}{4^m (2m+1)} - \frac{2ma^{2m-2}}{4^{m-1} d_z^2} \right] d_z W_{2m,0}(z) +$$

$$+ \sum_{n=1} \left[\frac{b^{2n}}{4^n} \left(\frac{\gamma}{2n+1} - 2 \right) - \frac{2\gamma n b^{2n-2}}{4^{n-1} d_z^2} \right] d_z W_{0,2n}(z) = 0,$$

где $\gamma = \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$; $\gamma_2 = \gamma - 2$.

Изучение полученных рядов показывает, что при такой деформации грани параллелепипеда $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ преобразуются в цилиндрические поверхности, а грани $z = \pm \frac{c}{2}$ в поверхность, определяемую уравнением $w = W_{00} + \sum_{m=1} x^{2m} W_{2m,0} + \sum_{n=1} y^{2n} W_{0,2n}$.

Второе состояние определяется рядом $u = 0, v = 0$;

$$w = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right)^2 \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right)^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} x^{2m} y^{2n} W_{2m+4,\, 2n+4}.$$

При этом состоянии грани $x = \pm \frac{a}{2}$ и $y = \pm \frac{b}{2}$ неподвижны, а грани $z = \pm \frac{c}{2}$ переходят в поверхность, проходящую через контур прямоугольника $z = \pm \frac{c}{2}$, $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$.

Третье состояние характеризуется рядом

$$u = 0,\ v = 0;\quad w = x^2 y^2 \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left(\frac{a^{2m}}{4^m} - \frac{x^{2m}}{m+1} \right) \left(\frac{b^{2n}}{4^n} - \frac{y^{2n}}{n+1} \right) C_{2m+2,2n+2}.$$

Это состояние показывает, что контур поперечного сечения деформируется лишь в продольном направлении, причем продольное перемещение w не зависит от координаты z .

Приведем ряды, которые описывают четвертое состояние параллелепипеда

$$u = x \sum_{m=1} [y^{2m} - \frac{b^{2m}}{4^m} + \frac{\gamma m(2m-1) b^{2m-2}}{\gamma_2 4^{m-1}} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4})] U_{1,2m} +$$

$$+ x \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ x^{2m} [y^{2n+2} - \frac{(n+1) b^{2n} y^2}{4^n} + \frac{n b^{2n+2}}{4^{n+1}}] + \right.$$

$$+ \frac{2\gamma n(n+1) a^{2m} b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4}) \; U_{2m+1,\, 2n+2} +$$

$$+ x \sum_{m=1} [(m+1) x^{2m} (\frac{b^2}{4} - y^2) + \frac{\gamma}{\gamma_2} (\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} - \frac{x^{2m+2}}{2m+3})] V_{2m+2,\, 1} +$$

$$+ x \sum_{m=1} \sum_{n=1} \frac{(m+1) x^{2m} b^{2n}}{4^n} (\frac{b^2}{4} - y^2) + \frac{\gamma (2n+1) b^{2n}}{\gamma_2 4^n} [\frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} -$$

$$\left. - \frac{x^{2m+2}}{2m+3} + \frac{2n(m+1) a^{2m}}{(2n+1) 4^m} (\frac{x^2}{3} - \frac{a^2}{4})] \right\} V_{2m+2,\, 2n+1} \; ;$$

$$v = y \sum_{m=1} [x^{2m+2} - \frac{a^{2m+2}}{4^{m+1}} + \frac{\gamma (m+1)(2m+1) a^{2m}}{\gamma_2 4^m} (\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4})] \times$$

$$\times V_{2m+2,\, 1} + y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ y^{2n} [x^{2m+2} - \frac{(m+1) a^{2m} x^2}{4^m} + \frac{m a^{2m+2}}{4^{m+1}}] - \right.$$

$$- \frac{(m+1) a^{2m} b^{2n}}{4^{m+n}} (\frac{a^2}{4} - x^2) + \frac{\gamma (m+1)(2m+1) a^{2m} b^{2n}}{\gamma_2 4^{m+n}} \times$$

$$\left. \times (\frac{y^2}{3} - \frac{b^2}{4}) \right\} V_{2m+2,\, 2n+1} +$$

$$+ y \sum_{m=1} [m y^{2m-2} (\frac{a^2}{4} - x^2) + \frac{\gamma}{\gamma_2} (\frac{b^{2m}}{4^m} - \frac{y^{2m}}{2m+1})] U_{1,\, 2m} +$$

$$+ y \sum_{m=1} \sum_{n=1} \left\{ \frac{(n+1) a^{2m}}{4^m} (y^{2n} - \frac{b^{2n}}{4^n}) (\frac{a^2}{4} - x^2) + \right.$$

$$+ \frac{(2m+1)\gamma a^{2m}}{\gamma_2 4^m} \left[\frac{b^{2n+2}}{4^{n+1}} - \frac{y^{2n+2}}{2n+3} + \frac{(n+1) b^{2n}}{4^n} \left(\frac{y^2}{3} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{b^2}{4} \right) \right] \right\} U_{2m+1,\, 2n+2} \; ; \quad w = 0.$$

Четвертое состояние определяет плоскую деформацию упругого параллелепипеда. Первые три из указанных состояний характеризуют продольное напряженно-деформированное состояние параллелепипеда, а последнее — поперечное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Прочность пространственных элементов конструкций. – М., 1972. 2. Крушевский А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. – Мн., 1967. 3. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – Киев, 1967. 4. Крушевский А.Е., Севенюк А.З. Приближенное определение спектра частот продольных колебаний упругого параллелепипеда при точном выполнении краевых условий на его четырех гранях. – В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Мн., 1978, вып. 6.

УДК 539.3

В.Н.АПАНОВИЧ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ТРЕФФЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

В настоящее время для определения объемного напряженно-деформированного состояния деталей значительное развитие получили численные методы на основе вариационного уравнения Лагранжа [1...3]. Вариационное уравнение Лагранжа для конечного объема имеет вид

$$\int_V (\operatorname{div} T + \bar{K})\, \delta\bar{u}\, dV - \int_S (\bar{n}\, T - F_{п})\, \delta\bar{u}\, dS = 0, \qquad (1)$$

где $\bar{K}$ — вектор объемных сил; $\delta\bar{u}$ — вектор возможных перемещений; dV — элемент объема; $\bar{F}_{п}$ — вектор поверхностных сил; dS — элемент поверхности тела; T — тензор напряжений; $\bar{n}$ — вектор направляющих косинусов. При реализации различных методов решения уравнения (1) важным вопросом является выбор системы координатных функций, аппроксимирующих компоненты вектора искомых и возможных перемещений упругого тела. От этого в значительной степени зависят сходимость, точность и численная устойчивость решения, а также простота алгоритмизации расчета. В работе [3] предложено два способа решения задачи теории упругости, удовлетворяющего уравнениям Ляме и граничным условиям в виде напряжений и перемещений,