

$$= - \frac{\alpha^2 a^2}{[\alpha(x^2 - a^2)]^{3/2}} ;$$

$$\rho = \frac{[1 + y_1'^2]^{3/2}}{y_1''} = \frac{[x^2(\alpha^2 + \alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{-\alpha^2 a^2} ;$$

$$\rho_{\min} = - \frac{\tau_0}{i} = \frac{[a^2(\alpha^2 + \alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{\alpha^2 a^2} = \frac{a^3 \alpha^3}{\alpha^2 a^2} = \alpha a < 0,$$

$$\text{откуда } \alpha = - \frac{\tau_0}{i a} ; \quad y = \sqrt{\frac{\tau_0}{i a} (x^2 - a^2)} ; \quad y_1' = - \frac{1}{y_1''} = - \frac{\sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}}{\alpha x} .$$

Зная y_1' , можно найти уравнение нормали к эллипсу в каждой точке, радиус кривизны, а затем расстояние Δn до изолинии $\varphi = C_1$. Когда все изолинии построены и найдена изолиния $\varphi = V_{\max}$, являющаяся границей ядра сечения, то можно найти расход Q :

$$Q = V_{\max} F_d + \sum_{n=1}^m (F_{n-1} - F_n) \left(\frac{C_n + C_{n-1}}{2} \right),$$

где F_d — площадь ядра сечения; F_0 — площадь, ограниченная нулевой изолинией; $C_m = V_{\max}$ — скорость ядра сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. — Минск, 1960.
2. К и м А.Х. Стационарное течение вязко-пластичного торфа в различных устройствах торфяных машин. Автореф. докт.дис.—Минск, 1966.

УДК 532.135.552.577

А.Х.КИМ, Э.А.ОРЕШКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ У ТВЕРДЫХ СТЕНОК ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В данной работе дается теоретическое определение линии скольжения у твердых стенок при движении вязко-пластичной системы в консуподобных резервуарах. Движущаяся масса предполагается несжимаемой, т.е. удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Вводим функцию тока $\psi(x,y)$:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Линия $\psi(x,y)$ есть линия тока. При стационарном потоке абсолютная скорость в любой точке направлена по касательной к линии тока

$$\vec{V} \cdot \text{grad } \psi = 0.$$

Представим функцию тока в виде

$$\psi(x,y) = Cy[f(x,y)]^m, \quad (1)$$

где $f(x,y)$ — уравнение кривой (рис. 1); m — четный неизвестный коэффициент ($m = 2$).

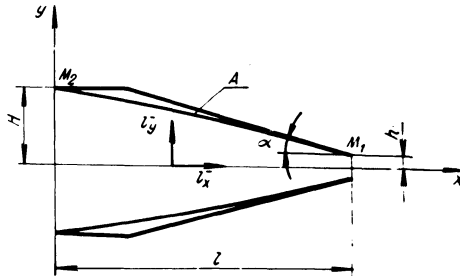


Рис. 1. Схема исследуемого насадка.

Представим $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y) = y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k.$$

Кривую

$$y = H - \sum_{k=2}^n D_k x^k \quad (2)$$

представим таким образом, чтобы она проходила через точки M_1 и M_2 по касательной к стенкам сосуда:

1) при $x = 0, y = H$;

2) при $x = l, y = h$;

$$h = H - \sum_{k=2}^n D_k l^k. \quad (3)$$

Из (2)

$$\frac{dy}{dx} = - \sum_{\kappa=2}^n D_{\kappa} k x^{\kappa-1};$$

3) при $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$;

4) при $x = l$, $y = h$;

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\sum_{\kappa=2}^n D_{\kappa} k l^{\kappa-1} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

При любых коэффициентах D_{κ} , если они удовлетворяют условиям (3), (4), кривая А должна пройти через точки M_1 и M_2 по касательной к твердым стенкам. Необходимо, чтобы функция тока $\psi(x, y)$ удовлетворяла граничным условиям

$$V_x = V_y = 0 \quad (\text{вдоль кривой А}) \quad (5)$$

$$V_y = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C [f(x, y)]^m + C_{\text{sym}} [f(x, y)]^{m-1} \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Так как вдоль кривой А $f(x, y) = 0$, то условие (5) по отношению к V_x выполняется

$$V_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = - C_{\text{sym}} [f(x, y)]^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Условие (5) по отношению к V_y и условие $V_y = 0$ при $y = 0$ также удовлетворяются. Таким образом функция тока (1) удовлетворяет условиям (5).

В данной задаче физически известно не распределение скоростей при входе и выходе, а распределение давлений, поэтому в дальнейшем примем, что давления при входе и выходе соответствуют известным заранее значениям. Зависимость между компонентами напряжения и скорости деформации

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial V_x}{\partial x} = -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \\ P_{yy} &= -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial V_y}{\partial y} = -P + 2 \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \\ P_{xy} &= \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) = \left(\frac{\tau_0}{h} + \eta \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти компоненты напряжения должны удовлетворять уравнениям Навье

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \rho_0 g &= 0; \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Силами инерции в данном случае пренебрегаем.

В уравнениях (6) $h = \sqrt{4\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2}$

или $h = \sqrt{4\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)^2}$. (8)

Однако точное решение уравнений (7) с учетом зависимостей (6) и (8) вообще невозможно. Для приближенного решения задачи воспользуемся следующими двумя, с точки зрения физических условий, достаточно обоснованными условиями:

1) в присековой области (вблизи оси Ox) преобладают линейные деформации, угловые деформации малы, т.е.

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \gg \left| \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right| \quad (\text{зона I})$$

2) в пристеночной области (вблизи кривой A), наоборот, преобладают угловые деформации, линейные деформации малы, т.е.

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \ll \left| \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right| \quad (\text{зона II})$$

В соответствии с этим имеем:

для зоны I $h = 2 \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|$

$$P_{xx} = -P + \tau_0 + 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y};$$

$$P_{yy} = -P - \tau_0 - 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}; \quad P_{xy} = 0.$$

Уравнения (7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \rho_0 g &= 0; \\ \frac{\partial P}{\partial y} + 2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Исключив из этих уравнений функцию $\psi(x, y)$, получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0.$$

Положим

$$P = \beta x; \quad \beta = \frac{P_{\text{ВХ}} - P_{\text{ВЫХ}}}{l},$$

где $P_{\text{ВХ}}$ — давление на входе; $P_{\text{ВЫХ}}$ — давление на выходе.

Полагаем $P_{\text{ВХ}} = \text{const}$, $P_{\text{ВЫХ}} = \text{const}$.

Из (9) для зоны I имеем

$$2\eta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} = \beta - \rho_0 g.$$

Или $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \epsilon x + D$, где $\epsilon = \frac{\beta - \rho_0 g}{2\eta}$,

принимая $D = 0$, получаем

$$\psi(x, y) = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x),$$

где $U_1(y)$, $U_2(x)$ — произвольные функции.

Тогда для зоны I имеем:

$$C_y [f(x, y)]^m = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x);$$

$$C_y [y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^{k^2}]^2 = \frac{\epsilon x^2 y}{2} + U_1(y) + U_2(x). \quad (10)$$

Для зоны II

$$P_{xx} \approx -P; P_{yy} \approx -P$$

$$P_{xy} = -\tau_0 + \eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).$$

Из (7) получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (P = xy).$$

Решение данного уравнения второго порядка представим широко применяемым в математической физике методом Фурье. Тогда получим

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k y (e_k \sin \lambda_k x + C_k \cos \lambda_k x);$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{H} \quad \text{при } x=0; y=H; P = P_{Bx}.$$

Положим $e_k = 0$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x; \quad (11)$$

$$P_{Bx} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y; \quad \int_0^H P_{Bx} \sin \frac{\pi k}{H} y dy = C_k \frac{H}{2};$$

$$C_k = \frac{2P_{Bx}}{H} \int_0^H \sin \frac{\pi k}{H} y dy; \quad C_k = \frac{2P_{Bx}}{\pi k} (1 - \cos \pi k). \quad (12)$$

Из (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \lambda_k \sin \lambda_k y \sin \lambda_k x + \eta \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \rho_0 g = 0.$$

Отсюда

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y + W(x).$$

Положим $W(x)$ произвольная функция, зависящая от x . Для первого приближения считаем $W(x) = 0$.

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \lambda_k y \cos \lambda_k x - \rho_0 g y. \quad (13)$$

Подставив в (13) выражения $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, получим уравнения относительно неизвестных коэффициентов D_k . Найдем вид функций $U_1(y)$ и $U_2(x)$ в (10).

Для зоны I имеем

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\varepsilon xy + U_2'(x).$$

Отсюда $U_2'(x) = 0$, так как $V_y = 0$ при $y = 0$;

$U_2(x) = \text{const}$ (будем считать $U_2(x) = 0$)

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\varepsilon x^2}{2} + U_1'(y).$$

При $y=0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \right).$$

или $U_1''(y) - \varepsilon y = 0$, $U_1''(y) = \varepsilon y$;

$$U_1'(y) = -\frac{\varepsilon y^2}{2} + D; \quad U_1(y) = \frac{\varepsilon y^3}{6} + D y + D_1.$$

Принимая D и D_1 равными нулю, уравнение (10) примет вид

$$C y (y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k)^2 = -\frac{\varepsilon x^2 y}{2} + \frac{\varepsilon y^3}{6};$$

$$C (y - H + \sum_{k=2}^n D_k x^k)^2 = \frac{\varepsilon}{6} (3x^2 + y^2). \quad (14)$$

Используя полученные зависимости (3), (4), (13), (14) и задаваясь необходимыми данными можно построить теоретически линию скольжения при движении вязко-пластичной системы в конусоподобных конструкциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. - Мн., 1960. 2. Р е й н е р М. Реология. - М., 1965.