Распределение температуры $T = f(z)$ находится подстановкой (10) в уравнение (7).

Нагрев жидкости при движении в капилляре равен

$$\Delta T = T_{|z=L_K} - T_H = \frac{p_H - p_K}{c_p \rho m}. \qquad (12)$$

Полученные выражения обобщают случаи течения линейно-вязко-пластичных ($n=1$), нелинейно-вязких ($\tau_0=0$) и ньютоновских ($\tau_0=0$, $n=1$, $k=\mu$) сред. Подобная задача с аналогичными допущениями для ньютоновской жидкости рассмотрена в работе [2], но при этом выбрана другая форма пьезотемпературной зависимости вязкости. Найденная авторами формула для гидравлического сопротивления капилляров получила экспериментальное подтверждение в опытах с ньютоновскими маслами. Уравнения (5), (7) при $k=\mu$, $n=1, \tau_0=0$ и аналогичные выражения из [2] совпадают. Хотя прямое сопоставление окончательных результатов невозможно из-за различной принятой формы зависимости вязкости, указанное согласование свидетельствует о непрерывной экспериментальной приемлемости исходных приближений, введенных при постановке задачи.

Представленные выше соотношения могут быть использованы для расчета с учетом любой из частных зависимостей реологических свойств (при пренебрежимой малости другой) – температурной (при $b \to 0$) или от давления (при $m \to \infty$). Они также совпадают (при $m \to \infty$, $b \to 0$) с известными формулами для расчета течения жидкостей с постоянными физическими свойствами [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Смольский Б.М., Шульман З.И., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно вязко-пластичных материалов. –Мн., 1970. 2. Тодер И.А. Тарабаев Н.И. Крупногабаритные гидростатодинамические подшипники. – М.,1976.

УДК 532.135

А.Х.КИМ, Т.Ф.БОГИНСКАЯ

ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКО–ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ЦИЛИНДРАХ НЕКРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

В работах [1,2] было получено уравнение течения вязко-пластичной системы в цилиндрах некруглого сечения в виде

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{(\pm\tau_0 + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial n})}{\rho} + \eta\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = 0. \qquad (1)$$

Здесь τ_0 – предельное напряжение сдвига; η – пластическая вязкость; $\varphi(n) = V_z$ – скорость течения внутри цилиндра; n– внешняя нормаль к изолинии скорости φ=const.Было доказано, что если главная нормаль N и внешняя нормаль n по направлению совпадают, то $\rho > 0$. Если эти нормали направлены в противоположные стороны, то $\rho < 0$ (рис. 1); $\frac{\partial P}{\partial z}$ – градиент давления по длине трубы. Если начало координат OXYZ взять при входе в трубу, а ось OZ направить параллельно оси трубы в сторону движения системы, то

$$\frac{\partial P}{\partial z} < 0.$$

Кроме того, доказано, что P является линейной функцией только от z

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - i.$$

Знак перед τ_0 должен совпадать со знаком нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Если рассматривать течение в сплошном цилиндре, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$ и перед τ_0 нужно взять знак минус.

С помощью уравнения (1) А.Х.Кимом был разработан так называемый обратный метод решения задачи, сущность которого заключается в том, что задаются формой и размерами ядра сечения и находится соответствующий этому ядру контур поперечного сечения трубы. Неудобство этого метода заключается в том, что точность решения задачи зависит от первоначального выбора ядра сечения.

В нашей работе предлагается прямой метод решения задачи с помощью уравнения (1). Для этого направим нормаль n во внутрь изолинии скорости. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$i + \frac{(\tau_0 + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial n})}{\rho} + \eta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0. \qquad (2)$$

Взяв точку, лежащую на контуре поперечного сечения трубы, за начало отсчета, разложим функцию $\varphi(n)$ в ряд по степеням Δn, полагая, что вследствие прилипания системы к твердой стенке $\varphi|_{n=0} = 0$

$$\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \Delta n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 \Delta n^2 + \dots \qquad (3)$$

Обозначим для краткости $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = P_0$.

Величина P_0 является функцией от длины дуги нулевой изолинии S, т.е. в каждой точке контура имеется своя производная $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Из уравнения (2) найдем

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right)_{n=0} = -\frac{i}{\eta} - \frac{(\tau_0 + \eta P_0)}{\eta\rho} \ldots \tag{4}$$

Для определения P_0 исходим из того, что на контуре сечения трубы касательное напряжение достигает экстремально-максимального значения, т.е.

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_{n=0} = 0.$$

Так как $\tau = \tau_0 + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то $\left.\frac{\partial\tau}{\partial n}\right|_{n=0} = \eta\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right|_{n=0} = 0$. Подставляя это значение в (4), имеем

$$P_0 = -\frac{1}{\eta}(\tau_0 + i\rho). \tag{5}$$

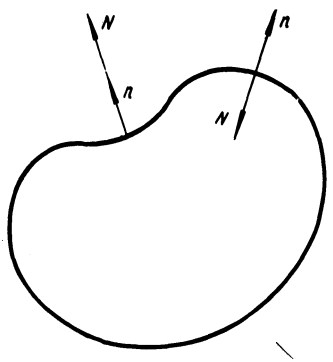

Рис. 1. Сечение некруглого цилиндра:
n — внешняя нормаль; N — главная.

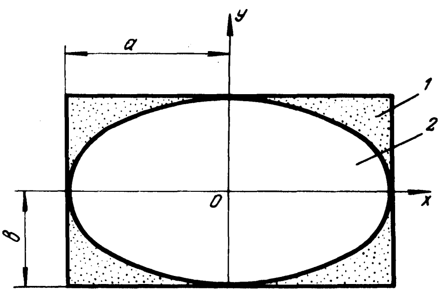

Рис. 2. Прямоугольное сечение цилиндра:
1 — застойная зона; 2 — зона вязкопластического течения.

Отсюда получаем минимальный радиус кривизны для участка, где $\rho < 0$

$$|\rho_{min}| = \frac{\tau_0}{i}.$$

Так как радиус кривизны является функцией от S, то и P_0 согласно (5) будет функцией от S. Теперь из (3) можно найти расстояние до первой изолинии скорости $\varphi = C_1$ (нулевой изолинией является контур поперечного сечения)

$$C_1 = P_0\Delta n \quad \text{и} \quad \Delta n = \frac{C_1}{P_0},$$

Δn является функцией от S.

Если $y = f(x)$ есть уравнение контура, то уравнение изолинии $\varphi = C_1$ будет

$$y_1 = y + \Delta n \sin (nx);$$

$$x_1 = x + \Delta n \cos (nx).$$

Пользуясь этими уравнениями, можно найти радиус кривизны в каждой точке изолинии $\varphi = C_1$:

$$\rho_1 = \frac{(1+y_1'^2)^{3/2}}{y_1''}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right)_1 = -\frac{i}{\eta}\frac{(\tau_0 + \eta P_0)}{\eta\rho_1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = P_0 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right)_1 \Delta n$$

и разложив функцию в окрестности точки, лежащей на изолинии C_1, получаем

$$C_2 = C_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 \Delta n_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\right)_1 \Delta n_1^2.$$

Определив отсюда Δn_1, найдем расстояние до второй изолинии и т.д. Этот процесс должен продолжаться до тех пор, пока $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s = 0$ или производная $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ станет меньше 0. В качестве примера рассмотрим течение в цилиндре прямоугольного сечения со сторонами 2a и 2b (рис. 2).

Допустим, что зона вязко-пластичного течения имеет вид эллипса $y = \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$, $\alpha < 0$. При $x = a$ $y = 0$; $\beta = -\alpha a^2$;

$$y = \sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}; \quad y' = \frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha(x^2 - a^2)}}; \quad y'(0) = 0;$$

$$y'' = \frac{\alpha\sqrt{\alpha(x^2-a^2)} - \dfrac{\alpha^2 x^2}{\sqrt{\alpha(x^2-a^2)}}}{\alpha(x^2-a^2)} = \frac{\alpha^2(x^2-a^2) - \alpha^2 x^2}{[\alpha(x^2-a^2)]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\alpha^2 a^2}{[\alpha(x^2-a^2)]^{3/2}};$$

$$\rho = \frac{[1+y'^2]^{3/2}}{y''} = \frac{[x^2(\alpha^2+\alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{-\alpha^2 a^2};$$

$$\rho_{min} = -\frac{\tau_o}{i} = \frac{[a^2(\alpha^2+\alpha) - \alpha a^2]^{3/2}}{\alpha^2 a^2} = \frac{a^3\alpha^3}{\alpha^2 a^2} = \alpha a < 0,$$

откуда $\alpha = -\frac{\tau_o}{i\,a}$; $y = \sqrt{\frac{\tau_o}{ia}(x^2 - a^2)}$; $y_1' = -\frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{\alpha(x^2-a^2)}}{\alpha x}$.

Зная y_1', можно найти уравнение нормали к эллипсу в каждой точке, радиус кривизны, а затем расстояние Δn до изолинии $\varphi = C_1$. Когда все изолинии построены и найдена изолиния $\varphi = V_{max}$, являющаяся границей ядра сечения, то можно найти расход Q:

$$Q = V_{max}F_d + \sum_{n=1}^{m} (F_{n-1} - F_n)\left(\frac{C_n + C_{n-1}}{2}\right),$$

где F_d – площадь ядра сечения; F_o – площадь, ограниченная нулевой изолинией; $C_m = V_{max}$ – скорость ядра сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. – Минск, 1960. 2. К и м А.Х. Стационарное течение вязко-пластичного торфа в различных устройствах торфяных машин. Автореф. докт.дис.–Минск, 1966.

УДК 532.135.552.577

А.Х.КИМ, Э.А.ОРЕШКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ У ТВЕРДЫХ СТЕНОК ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО–ПЛАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В данной работе дается теоретическое определение линии скольжения у твердых стенок при движении вязко-пластичной системы в консуподобных резервуарах. Движущаяся масса предполагается несжимаемой, т.е. удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$