

и т.п. Следовательно, в вязко-упругой жидкости возможно возникновение затухающих колебаний.

2. При $t \rightarrow \infty$ распределение давления и касательного напряжения будет таким же, как в вязкой жидкости, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W' = \lim_{t \rightarrow \infty} W = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_1^i = \lim_{t \rightarrow \infty} W_1 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л., 1951. 2. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей (настоящий сборник). 3. К о р н Г. и К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1970.

УДК 532.135

Б.И.ЛАПУШИНА

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ

Рассмотрим течение вязко-пластичной среды, описываемой реологическим уравнением

$$S = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) \dot{E}, \quad (1)$$

в тонком зазоре между круглыми параллельными дисками (рис. 1).

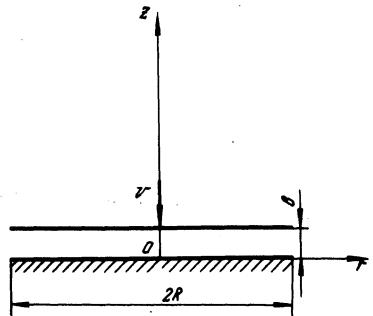


Рис. 1. Схема течения в зазоре.

Течение происходит за счет сообщения верхнему диску импульсного движения со скоростью v .

Уравнения движения запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \text{Div } S, \quad (2)$$

где S и E — девиаторы напряжений и скоростей деформации соответственно; η — пластическая вязкость; τ_0 — предельное напряжение сдвига; h — интенсивность скоростей деформации.

Конвективные члены не учитываем, массовыми силами пренебрегаем. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

$$\text{div } v = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что слой достаточно тонкий,

$$b \ll R. \quad (4)$$

Течение осесимметричное.

Граничными условиями для скоростей являются условия прилипания среды к поверхностям дисков:

$$\begin{aligned} v_r|_{z=0} = v_z|_{z=0} = v_r|_{z=b} = 0; \\ v_z|_{z=b} = -v \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия для напряжений с учетом (4) можно записать в интегральной форме:

$$\int_0^b \sigma_r|_{r=R} \cdot dz = 0; \quad \int_0^b \sigma_z|_{r=R} dz = 0. \quad (6)$$

Начальные условия нулевые (в начальный момент времени скорости и напряжения равны нулю).

В [1] при рассмотрении стационарных течений вязко-пластичных сред показано, что в условиях сложного деформированного состояния сдвиг распространяется на всю область.

В настоящей задаче также делается предположение, что вязко-пластичное течение имеет место во всей области в зазоре.

Как и в случае течения вязко-упругой среды [2] учитывая, что $b \ll R$, и условие прилипания, полагаем

$$v_z = v_z(z), \quad (7)$$

что дает возможность ввести функцию **тока в виде**:

$$\psi = r^2 f, \text{ где } f = f(z, t). \quad (8)$$

Тогда компоненты скорости

$$v_r = rf'; \quad v_z = -2f. \quad (9)$$

Уравнение неразрывности удовлетворяется **тождественно**.

Выражение для интенсивности скоростей деформации примет вид

$$h = \sqrt{12f'^2 + r^2 f''^2}. \quad (10)$$

Реологические соотношения (1) в цилиндрических координатах записуются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) f'; \\ \sigma_z &= \sigma - 4\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) f'; \\ \sigma_\varphi &= \sigma_r; \\ \sigma_{rz} &= \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) rf''. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение с функцией тока в виде (8) является для модели Шведова-Бингама приближенным.

Рассмотрим область среды, значительно удаленную от оси по сравнению с толщиной зазора между дисками (так как $b \ll R$, этим исключается из рассмотрения небольшая часть области течения). Тогда слагаемые с множителем τ_0 в уравнениях движения будут малы и их можно отбросить. Обоснованность линеаризации утрачивается на срединной плоскости. Однако и здесь, а также в области, близкой к оси симметрии, из физических соображений и с учетом малой толщины слоя и условий прилипания слагаемые с множителем τ_0 , нарушающие совместность уравнений, полученных в предположении, что осевые скорости не зависят от r , можно не учитывать.

В результате линеаризации получаем приближенные уравнения, которые после преобразований примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} &= r\left(\rho \frac{\partial f'}{\partial t} - \eta f'''\right); \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 2(\eta f''' - \rho \frac{\partial f}{\partial t}). \end{aligned} \quad (12)$$

Составив условие совместности уравнений (12), получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$f'''' - \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial f''}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Применяя к этому уравнению интегральное преобразование Лапласа по переменной t и учитывая начальные условия

$$f|_{t=0} = f'|_{t=0} = f''|_{t=0} = f'''|_{t=0} = f''''|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

получим для изображений дифференциальное уравнение

$$\bar{f}'''' - \frac{\rho s}{\eta} \bar{f}'' = 0 \quad (15)$$

с граничными условиями

$$\bar{f}'|_{z=0} = 0; \bar{f}'|_{z=b} = 0; \bar{f}|_{z=0} = 0; \bar{f}|_{z=b} = \frac{v}{2s}. \quad (16)$$

Решая и осуществляя обращение, получаем

$$f' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}' e^{st} ds.$$

Для вычисления интеграла определяем полюсы подынтегральной функции

$$\Phi(s) = \frac{vk}{4s} \frac{[\operatorname{ch} \frac{kb}{2} - \operatorname{ch} k(z - \frac{b}{2})]}{\frac{kb}{2} \operatorname{ch} \frac{kb}{2} - \operatorname{sh} \frac{kb}{2}} e^{st},$$

где $k = \sqrt{\frac{\rho s}{\eta}}$.

При $s = 0$ будем иметь полюс первого порядка; вычет, соответствующий этому полюсу

$$A_0 = \frac{3vz(b-z)}{b^3}. \quad (17)$$

Для определения остальных полюсов получаем уравнение

$$\frac{\rho s_m b^2}{4\eta} + \xi_m^2 = 0.$$

Вычеты, соответствующие полюсам s_m , окончательно запишутся в виде

$$A_m = \frac{2v \sin \frac{z}{b} \xi_m \sin \left[\left(1 - \frac{z}{b}\right) \xi_m \right] e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}}}{b \xi_m \sin \xi_m} \quad (18)$$

Здесь ξ_m — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \xi = \xi$; $f'(z, t)$ определяем как сумму вычетов, а затем, проинтегрировав f' от нуля до z , находим $f(z, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(z, t); \\ f(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z, t), \end{array} \right. \quad (19)$$

где

$$f'_0(z, t) = \frac{3v(b-z)}{b^3}; \quad f_0(z, t) = v \left[\frac{3}{2} \left(\frac{z}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{b}\right)^3 \right];$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_m(z, t) = \frac{2v \sin \frac{z}{b} \xi_m \sin \left(1 - \frac{z}{b}\right) \xi_m e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}}}{b \xi_m \sin \xi_m} \\ f_m(z, t) = \frac{v}{2\xi_m^2} \left[1 - \frac{2z}{b} - \frac{\sin \left(1 - \frac{2z}{b}\right) \xi_m}{\sin \xi_m} \right] e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}} \end{array} \right. \quad (20)$$

Формулы (19) справедливы при $t > 0$. При $t = 0$ с учетом начальных условий $f = 0$ и $f' = 0$.

Разрывность функции $f'(z, t)$ обусловлена импульсивной спецификой задачи. Подставляя найденные значения $f'(z, t)$ и $f(z, t)$ в (9), получаем формулы, определяющие поле скоростей.

Из решения следует, что интенсивность скоростей деформации найденного течения обращается в ноль только в двух точках: $r=0, z=0$ и $r=0, z=b$.

Среднее нормальное напряжение определим из уравнений (12), принимая во внимание близость нормальных компонент тензора напряжений к среднему нормальному напряжению.

Перепишем уравнения (12) в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = r \sum_{m=0}^{\infty} D'_m; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -2 \sum_{m=0}^{\infty} D_m,$$

где

$$D_m = \frac{\partial f_m}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} f_m'',$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем

$$\sigma = -\frac{\rho}{6} (3R^2 - 3r^2 - 6bz + 6z^2 + b^2) \cdot K(t),$$

где

$$K(t) = \sum_{m=0}^{\infty} D'_m.$$

С учетом условия (4) приближенно получаем

$$\sigma = -\frac{\rho}{2} (R^2 - r^2) K(t). \quad (21)$$

Касательное напряжение определяем из соотношения

$$\sigma_{rz} = \left(\eta + \frac{\tau_0}{h} \right) r f_m''.$$

Для этого вычисляем интенсивность скоростей деформации по формуле (10), учитывая, что

$$f' = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(z,t); \quad f'' = \sum_{m=0}^{\infty} f''_m(z,t);$$

f'_m определяется из (20), а

$$f''_m = \frac{2v \sin \left(1 - \frac{2z}{b} \right) \xi_m}{b^2 \sin \xi_m} e^{-\frac{4\eta \xi_m^2 t}{\rho b^2}}$$

Силу, действующую на подвижный диск, определяем по формуле

$$F = -2\pi \int_0^R r \sigma_{z|z=b} \cdot dr.$$

С учетом (21)

$$F = -\frac{1}{4} \pi \rho R^4 K(t). \quad (22)$$

Из полученного решения видно, что пластические свойства среды существенно влияют на касательные напряжения и в меньшей мере их влияние сказывается на распределении скоростей.

Если для вязко-упругих сред, рассмотренных в (2), предположение о независимости осевых скоростей от расстояния до оси совместно со всеми уравнениями задачи, то для вязко-пластичной среды это предположение выполняется приближенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. К и м А.Х. Некоторые вопросы реологии вязко-пластичных дисперсных систем. — Мн., 1960. 2. Л а м б и н а Е.Н., Л а п у ш и н а Б.И. Течение вязко-упругой среды наследственного типа между параллельными дисками при импульсном нагружении. — Вестн: АН БССР, сер. фізіка-энергетычных навук, 1978, № 1.

УДК 532.135:621.822

Ю.М.ПИКУС

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СМАЗОЧНОЙ СРЕДЫ В КАПИЛЛЯРЕ

В настоящей статье в приближениях теории смазки рассматривается неизотермическое течение нелинейно-вязко-пластичной жидкости Балкли-Гершеля в цилиндрическом капилляре со значительным отношением длины L_K к диаметру $2R_K$. Задача представляет интерес, в частности для расчета и исследования систем питания узлов трения с жидкостной смазкой, где используются дросселирующие элементы подобного типа.

Принятая реологическая модель

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma}^n \quad (1)$$

описывает поведение при сдвиге широкого круга смазочных сред (пластичные смазки, масла с полимерными присадками, промышленные и другие ньютоновские масла, водные эмульсии) и соответственно обобщает ряд частных реологических моделей Шведова-Бингама (при $n=1$), Оствальда-де Вилля (при $\tau_0 = 0$), Ньютона (при $\tau_0 = 0, n = 1, k = \mu$). В уравнении (1) τ_0 — предел текучести; k — аналог вязкости; n — показатель ньютоновского поведения.