

$$P(D) \cdot S = Q(D) \cdot \epsilon \quad ,$$

то

$$P(s) \cdot \bar{S} = Q(s) \cdot \bar{\epsilon} = \frac{Q(s)}{s} \cdot \dot{\bar{\epsilon}} ; \quad \bar{S} = \frac{Q(s)}{s P(s)} \cdot \dot{\bar{\epsilon}}$$

и можно положить

$$\bar{\mu}(s) = \frac{Q(s)}{s \cdot P(s)} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. — М., 1965.
2. Кристенсен Р. Введение в вязко-упругость. — М., 1974.
3. Белоконь А.В. Некоторые принципы соответствия для динамических задач вязко-упругости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6.
4. Ильюшин А.А., Победря В.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости. — М., 1970.
5. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л., 1951.
6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1970.

УДК 532.135

Е.Н.ЛАМБИНА

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В [1] рассмотрено течение вязкой жидкости в смазочном слое между наклонными друг к другу плоскостями (рис. 1). Верхняя пластина остается неподвижной, к нижней пластине в момент времени $t = 0$ прикладывается постоянная сила Q . Уравнение неподвижной границы задается выражением

$$h = h_0 \left(1 + k \frac{x}{a} \right).$$

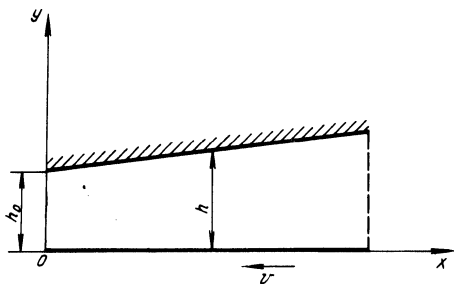


Рис. 1.

Задача решается в линейной постановке. Определяется давление P и касательное напряжение τ . Результаты (1) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 p - p_0 &= \frac{6ag}{k\alpha h_0} \left[\frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \left(1 - \frac{h_0^2}{h^2}\right) - 1 + \frac{h_0}{h} \right] W + \\
 &+ \frac{aq}{2k\alpha h_0} \left[b_2 n \frac{h}{h_0} - 6 \frac{b_2}{b_1} \left(1 - \frac{h_0^2}{h^2}\right) \right] W_1; \\
 \tau &= \frac{qh_0}{\alpha h} \left(4 - 3 \frac{b_2}{b_1} \frac{h_0}{h}\right) W + 3 \frac{b_2}{b_1} \frac{q}{\alpha} \frac{h_0^2}{h^2} W_1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 W &= 1 - \frac{\lambda + b - \alpha n}{2\lambda} e^{-\frac{(b-\lambda)\mu}{\rho h_0^2} t} - \frac{(b+\lambda)\mu}{2\lambda} e^{-\frac{(b+\lambda)\mu}{\rho h_0^2} t} \\
 W_1 &= \frac{(\lambda + b - n\alpha)(b-\lambda)}{2\lambda} \left(e^{-\frac{(b-\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} - e^{-\frac{b_1 \mu t}{\rho h_0^2}} \right) + \\
 &+ \frac{(\lambda - b + n\alpha)(b+\lambda)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} \left(e^{-\frac{(b+\lambda)\mu t}{\rho h_0^2}} - e^{-\frac{b_1 \mu t}{\rho h_0^2}} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

В формулах (2)

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{4}{k} \ln(1+k) - \frac{6}{2+k}; & \beta &= \frac{4}{k} \ln(1+k); \\
 b_1 &= \frac{6(2k+k^2)}{(1+k)^2 \ln(1+k)}; & b_2 &= \frac{12k}{(1+k) \ln(1+k)}; \\
 b &= \frac{b_1}{2} + \frac{\beta n}{2}; & \lambda &= \sqrt{b^2 - b_1 \alpha n};
 \end{aligned}$$

$$n = \frac{\rho h_0 a H}{M},$$

где H – ширина; M – масса пластины.

Перейдем к определению аналогичного течения вязко-упругой максвелловской жидкости с функцией релаксации

$$\mu(t) = G e^{-\frac{G}{\eta} t}$$

находим изображения по Лапласу \bar{W}' и \bar{W}'_1 функций W' и W'_1 :

$$\bar{W}' = \frac{1}{s} \frac{(\lambda + b - \alpha n)}{2\lambda} \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b-\lambda)G}{\rho h_0^2}} -$$

$$- \frac{(\lambda - b + n\lambda)}{2\lambda} \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b+\lambda)G}{\rho h_0^2}};$$

$$\bar{W}'_1 = \frac{(\lambda - b - \alpha n)(b - \lambda)}{2\lambda(b_1 - b + \lambda)} \cdot \left[\frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b-\lambda)G}{\rho h_0^2}} - \right.$$

$$- \left. \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{b_1 G}{\rho h_0^2}} \right] + \frac{(\lambda - b + n\alpha)(b + \alpha)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} \times$$

$$\times \left[\frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{(b+\lambda)G}{\rho h_0^2}} - \frac{s + \frac{G}{\eta}}{s^2 + s \frac{G}{\eta} + \frac{b_1 G}{\rho h_0^2}} \right].$$

(3)

К задаче применим принцип соответствия [2]. Отметим, что поскольку в формулах (2) коэффициенты при W и W_1 не зависят ни от t , ни от μ , определение $p = p_0$ и τ для вязко-упругой задачи сводится к определению функций W' и W'_1 вязко-упругого течения, соответствующих функциям W и W_1 . Применив к (2) преобразование Лапласа и подставив в полученные выражения изображение функции релаксации

$$\bar{\mu}(s) = \frac{G}{s + \frac{G}{\eta}}$$

Далее, используя таблицы обратных преобразований Лапласа для дробно-рациональных функций [3], определяем функции W' и W'_1 . Получим

$$W' = 1 - \frac{(\lambda + b - \alpha n)}{2\lambda} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \left(\operatorname{ch} \sqrt{d_{b-\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b-\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b-\lambda}} t \right) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\lambda - b + \alpha n}{2\lambda} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times \left(\operatorname{ch} \sqrt{d_{b+\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b+\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b+\lambda}} t \right); \\
W'_1 = & \frac{(\lambda + b - \alpha n)(b - \lambda)}{2\lambda(b_1 - b + \lambda)} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times \left[\operatorname{ch} \sqrt{d_{b-\lambda}} t + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{d_{b-\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b-\lambda}} t - \operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t - \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t \left. \right] + \\
& + \frac{(\lambda - b + \alpha n)(b + \lambda)}{2\lambda(b_1 - b - \lambda)} e^{-\frac{G}{2\eta} t} \times \left[\operatorname{ch} \sqrt{d_{b+\lambda}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b+\lambda}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b+\lambda}} t - \right. \\
& \left. - \operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t - \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t \right],
\end{aligned} \tag{4}$$

где
$$d_{b-\lambda} = 1 - \frac{4\eta^2(b-\lambda)}{\rho h_0^2 G};$$

$$d_{b+\lambda} = 1 - \frac{4\eta^2(b+\lambda)}{\rho h_0^2 G};$$

$$d_{b_1} = 1 - \frac{4\eta^2 b_1}{\rho h_0^2 G}.$$

Таким образом, давление p и касательное напряжение τ вычисляются по формулам (1): если в последних заменить W и W_1 на W' и W'_1 соответственно.

З а м е ч а н и я

1. Если величина $\frac{\rho h_0^2 G}{4\eta^2}$ больше какого-либо из чисел $b_1, b-\lambda, b+\lambda$,

то в формулах (4) соответствующие гиперболические функции заменяются тригонометрическими, например, при $d_{b_1} < 0$

$$\operatorname{ch} \sqrt{d_{b_1}} t + \frac{1}{\sqrt{d_{b_1}}} \operatorname{sh} \sqrt{d_{b_1}} t = \cos \sqrt{-d_{b_1}} t + \frac{1}{\sqrt{-d_{b_1}}} \sin \sqrt{-d_{b_1}} t$$

и т.п. Следовательно, в вязко-упругой жидкости возможно возникновение затухающих колебаний.

2. При $t \rightarrow \infty$ распределение давления и касательного напряжения будет таким же, как в вязкой жидкости, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W' = \lim_{t \rightarrow \infty} W = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_1^i = \lim_{t \rightarrow \infty} W_1 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р г С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. — М.—Л., 1951. 2. Л а м б и н а Е.Н. О принципе соответствия для медленных неустановившихся течений вязко-упругих линейных жидкостей (настоящий сборник). 3. К о р н Г. и К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М., 1970.

УДК 532.135

Б.И.ЛАПУШИНА

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ СБЛИЖАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ

Рассмотрим течение вязко-пластичной среды, описываемой реологическим уравнением

$$S = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) \dot{E}, \quad (1)$$

в тонком зазоре между круглыми параллельными дисками (рис. 1).

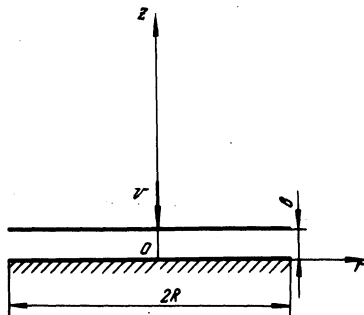


Рис. 1. Схема течения в зазоре.

Течение происходит за счет сообщения верхнему диску импульсного движения со скоростью v .