3. N e m t s o v V.B. Statistical Hydrodynamics of cholesteric Liguid Crystals. —Physica, 86A, 1977. 4. L e e J.D. and E r i n g e n A.C. Relations of Two Continuum Theories of Liguid Crystals. In: Liguid Crystals and Ordered Fluids, vol. 2, Plenum Press, N.Y.1973. 5. L e e J.D. and E r i n g e n A.C. Wave Propagation in Nematic Liguid Crystals. — J.Chem.Phys. 54, N 12, 1971. 6. В а р ш а л о в и ч Д.А., М о с к а л е в А.Н., Х е р с о н с к и й В.К. Квантовая теория углового момента. —Л., 1975. 7. А э р о Э.Л., Б у л ы г и н А.Н. Кинематика нематических жидких криссталов. — Прикладная механика, 8, 1972, вып. 3. 8. Н е м ц о в В.Б. К статистическому обоснованию уравнений гидродинамики жидких кристаллов. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1977, вып. 4. 9. Н е м ц о в В.Б. Материальные уравнения для нематических и холестерических жидких кристаллов. — В сб.: Теоретическая и прикладная механика, Минск, 1978, вып. 5. 10. H e s s S. Irreversible Thermodynamics of Noneauilibruim Alianment Phenomena in Molecular Liguid and in Liguid Crystal Z. Naturforsch, 30a, 1975. 11. Н е м ц о в В.Б. К статистической теории параметров распространения звука в нематических жидких кристаллах. — Рефераты докладов VIII Всесоюзной акустической конференции. — М., 1973. 12. Л е в Б.И., Т о м ч у к П.М. О взаимосвязи феноменологического и микроскопического подходов в теории жидких кристаллов. — ТМФ, 32, 1977, № 1. 13. Л о х и н В.А., С е д о в Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. — ПММ, 27, 1963, вып. 3.

УДК 532.135

Е.Н.ЛАМБИНА

О ПРИНЦИПЕ СООТВЕТСТВИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО–УПРУГИХ ЛИНЕЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В теории линейной вязко-упругости широко применяются принципы соответствия, позволяющие использовать решения задач теории упругости для получения соответствующих решений вязко-упругости [1...4]. Было замечено, что если применить к квазистатическим уравнениям вязко-упругости интегральное преобразование, то полученные при этом уравнения по форме будут совпадать с уравнениями теории упругости, если в последних заменить упругие постоянные изображениями некоторых зависящих от времени величин. Отсюда следовало, что если к решению статической задачи теории упругости применить интегральное преобразование, а затем в решении для изображений заменить упругие постоянные изображениями соответствующих величин вязко-упругой задачи, то решение вязко-упругой задачи может быть получено путем обратного преобразования, примененного к трансформированному таким образом уравнению для изображений. В дальнейшем принцип соответствия был сформулирован также для динамических задач теории вязко-упругости.

Упомянутые принципы соответствия применимы для задач деформируемого твердого тела и не вполне удобны для задач течения вязко-упругих жидкостей, поскольку постановка задач гидродинамики отлична от постановки задач теории упругости. Поэтому представляет интерес такая формулировка принципа соответствия, которая позволяла бы использовать решения задач течения вязкой жидкости.

Сформулируем в терминах преобразования Лапласа принцип соответствия для медленных течений вязко-упругих несжимаемых жидкостей с нулевыми начальными условиями (медленность течений дозволяет линеаризировать задачи, пренебрегая квадратичными членами в выражениях для ускорений).

Уравнение состояния для вязко-упругой жидкости имеет вид

$$S = 2\int_0^t \mu(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)\,d\tau, \tag{1}$$

где S — девиатор напряжений; $\dot{\varepsilon}$ — девиатор скоростей деформации; μ (t) — функция релаксации.

Соответствующее уравнение для вязкой жидкости имеет вид

$$S = 2\mu\dot{\varepsilon}\ , \tag{2}$$

где μ — коэффициент вязкости.

Линеаризированные уравнения движения и уравнение неразрывности одинаковы в обеих задачах.

Применим к (1) и (2) преобразование Лапласа.

Получим

$$\bar{S} = 2\bar{\mu}(s)\cdot\bar{\dot{\varepsilon}} \tag{3}$$

для задачи течения вязко-упругой жидкости и

$$\bar{S} = 2\mu\bar{\dot{\varepsilon}} \tag{4}$$

для задачи течения вязкой жидкости. Преобразованные уравнения движения и неразрывности будут одинаковыми в обеих задачах.

Уравнение (3) отличается от уравнения (4) заменой μ на $\bar{\mu}$ s). Следовательно, решение для изображений вязко-упругой задачи будет отличаться от решения вязкой задачи также заменой μ на $\bar{\mu}$(s). Поэтому принцип соответствия может быть сформулирован следующим образом.

Пусть известно решение А некоторой задачи медленного течения вязкой несжимаемой жидкости с нулевыми начальными условиями. Тогда для получения решения A′, соответствующей задачи вязко-упругой жидкости, следует:

1) применить к А преобразование Лапласа. При этом получим решение $\bar{A}$ для изображений;

2) применить преобразование Лапласа к функции релаксации μ (t). При этом получим изображение функции релаксации $\bar{\mu}$ (s);

3) заменить в $\bar{A}$ μ на $\bar{\mu}$(s). При этом получим $\bar{A}'$;

4) применить к A′ обратное преобразование Лапласа.

Для примера рассмотрим задачу погружения тонкой пластины в вязко-упругую максвелловскую жидкость. Пусть в момент времени t=0 в жидкость начинает опускаться с постоянной скоростью U неограниченная пластина. Требуется определить силу, действующую на пластину. Для вязкой жидкости [5]

$$F = \frac{4b}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu \rho h U^3},$$

где b — ширина пластины; h — глубина погружения. Поскольку $h=Ut$, получим

$$F = \frac{4bU^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t}.$$

Используя таблицы обратных преобразований Лапласа [6], определяем:

$$\bar{F} = 2bU^2\sqrt{\rho\mu}\cdot s^{-\frac{3}{2}},$$

$$\mu(t) = Ge^{-\frac{G}{\eta}t}$$

$$\bar{\mu}(s) = \frac{G}{s+\frac{G}{\eta}}$$

$$\bar{F}' = 2bU^2\sqrt{\rho G}\cdot s^{-\frac{2}{2}}\left(s+\frac{G}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и окончательно

$$F' = 2bU^2\sqrt{\rho G}\cdot t\, e^{-\frac{G}{2\eta}t}\left[I_0\left(\frac{G}{2\eta}t\right) + I_1\left(\frac{G}{2\eta}t\right)\right].$$

Аналогично определяются и скорости.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотренным способом могут быть получены и немногие точные решения тех задач течения вязко-упругих жидкостей, где нелинейные члены в уравнениях движения тождественно равны нулю.

З а м е ч а н и е 2. Если начальные условия (скорости и напряжения при t=0) не равны нулю, то решение может быть получено суперпозицией двух течений: 1) установившегося течения с краевыми условиями, соответствующими краевым условиям исходной задачи в начальный момент времени; 2) неустановившегося течения с нулевыми начальными условиями. Значения скоростей или напряжений в краевых условиях для этого неустановившегося течения определятся из краевых условий исходной задачи вычетом их значений в начальный момент времени. Для неустановившегося течения в этом разложении может быть применен принцип соответствия.

З а м е ч а н и е 3. Если уравнение состояния задано в дифференциальной форме

$$P(D)\cdot S = Q(D)\cdot \varepsilon \quad ,$$

то

$$P(s)\cdot \bar{S} = Q(s)\cdot \bar{\varepsilon} \quad = \frac{Q(s)}{s}\cdot \dot{\bar{\varepsilon}}\,; \ \bar{S} = \frac{Q(s)}{s\,P(s)}\cdot \dot{\bar{\varepsilon}}$$

и можно положить

$$\bar{\mu}(s) \ = \frac{Q(s)}{s\cdot P(s)} \quad .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Теория линейной вязко-упругости. – М., 1965. 2. Кристенсен Р. Введение в вязко-упругость. – М., 1974. 3. Белоконь А.В. Некоторые принципы соответствия для динамических задач вязко-упругости. – Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6. 4. Ильюшин А.А., Победря В.Е. Основы математической теории теормо-вязкоупругости. – М., 1970. 5. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. – М.–Л., 1951. 6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1970.

УДК 532.135

Е.Н.ЛАМБИНА

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО–УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В [1] рассмотрено течение вязкой жидкости в смазочном слое между наклоненными друг к другу плоскостями (рис. 1). Верхняя пластина остается неподвижной, к нижней пластине в момент времени $t = 0$ прикладывается постоянная сила Q. Уравнение неподвижной границы задается выражением

$$h = h_o(1 + k\ \frac{x}{a}\ ).$$

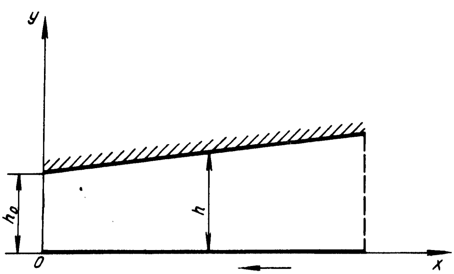

Рис. 1.

Задача решается в линейной постановке. Определяется давление P и касательное напряжение τ. Результаты (1) могут быть записаны в виде