

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ОДНОСВЯЗНОГО И МНОГОСВЯЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В конструировании машин важное место занимают расчеты их элементов на кручение. Методы теории упругости: вариационные [1,2], конечных разностей [2], конечных элементов [3], конформного отображения [4], интегральных уравнений [5,6,7,8] апробировались на задаче кручения. Несмотря на это, до последнего времени отсутствовало общее решение для многосвязных и односвязных стержней сложного поперечного сечения [9].

В статье сделана попытка восполнить этот пробел, представив решение задачи нестесненного кручения стержней с помощью метода интегральных уравнений. Достоинством метода является снижение размерности задачи, что позволяет при численном решении выполнять дискретизацию не всей области, а только ее границы.

Рассмотрим вывод интегрального уравнения Фредгольма второго рода задачи кручения, отличный от работы [6], особенности многосвязных сечений и предложим соответствующее решение. Возможности и область применения программы "СЕН-ВЕНАН", предназначенной для решения задачи кручения стержней односвязного и многосвязного поперечного сечений сложной конфигурации, иллюстрируются на примере расчета хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К.

1. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности в декартовых координатах

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2Gc, \quad (1)$$

где τ_x, τ_y – касательные напряжения, действующие в направлениях x и y в плоскости поперечного сечения; c – угол закрутки на единицу длины стержня; G – модуль сдвига материала стержня.

В комплексных переменных $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ два уравнения могут быть заменены одним

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\tau_y + i\tau_x) = Gc. \quad (2)$$

Из (2) легко найти общее решение

$$\tau_y + i\tau_x = Gc\bar{z} + \varphi(z), \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая функция.

По интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (4)$$

где Γ – граница области; $\varphi(t)$ – граничное значение функции $\varphi(z)$, $t = x + iy$ – координаты точек границы, $dt = dx + i dy = ie^{i\beta} ds$ (ds – элемент длины; β – угол наклона внешней нормали в точке t к оси x).

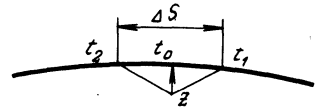
Из (3) выразим $\varphi(z)$ и подставим в (4):

$$\tau_y + i\tau_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t}-\bar{z})}{t-z} dt. \quad (5)$$

Формула (5) выражает напряжения в области Ω через напряжения на контуре Γ .

Выполним предельный переход от точки z , лежащей внутри области, к точке t_0 контура (рис. 1). Для этого выделим элемент Δs граничной кривой достаточно малый, чтобы его можно было считать прямым, а напряжение τ_s вдоль него – постоянным. Вычислим

Рис. 1. Предельный переход от точки z , лежащей внутри контура, к точке t_0 контура.



$$\lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta s} \frac{\omega dt}{t-z} = \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Delta s} \frac{dt}{t-z} = \omega_0 \lim_{z \rightarrow t_0} \ln \frac{t_2-z}{t_1-z} = \pi i \omega_0. \quad (6)$$

Здесь $\omega = \omega(t)$ – функция, заданная на границе контура; $\omega_0 = \omega(t_0)$. Участок Δs симметричен относительно точки t_0 .

После выполнения предельного перехода интеграл понимается в смысле главного значения

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t-z} = \pi i \omega_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega dt}{t-t_0}. \quad (7)$$

Применяя выражение (7) к интегралу (5), получим

$$\frac{1}{2} (\tau_y + i\tau_x) \Big|_{z=t_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_y + i\tau_x - Gc(\bar{t}-\bar{t}_0)}{t-t_0} dt. \quad (8)$$

Напряжения на контуре

$$\tau_y + i\tau_x = (\tau_s + i\tau_n) e^{-i\beta}, \quad \tau_n = 0, \quad (9)$$

где β — угол наклона внешней нормали в точке t к оси x ; τ_s, τ_n — составляющие касательного напряжения вдоль и поперек внешней нормали к контуру.

Подставляя (9) в (8), получим

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\tau_s e^{-i(\beta-\beta_0)}}{t-t_0} dt = -Gc \frac{e^{i\beta_0}}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} dt, \quad (10)$$

где τ_{s0} — значение напряжения τ_s в точке t_0 ; β_0 — угол наклона внешней нормали в точке t_0 к оси x (рис. 2).

С учетом $t-t_0 = \rho e^{i(\beta_0 + \gamma)}$, $dt = i e^{i\beta} ds$,

а также $\beta_0 + \gamma = \beta + \alpha$ преобразуем (10) к виду

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\gamma}}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} e^{-i(\gamma+\alpha)} ds, \quad (11)$$

где ρ — радиус (исчисляется от точки t_0 к текущей точке t); γ — угол между внешней нормалью в точке t_0 и радиусом ρ ; α — угол между внешней нормалью в текущей точке t и радиусом ρ (рис. 2).

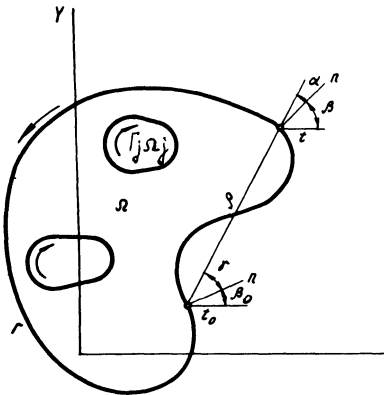


Рис. 2. Область Ω , контур границы Γ , геометрические параметры, входящие в интегральное уравнение.

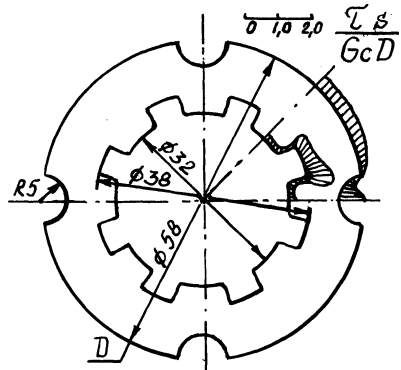


Рис. 3. Эпюра касательных напряжений при кручении хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К.

Действительная часть последнего равенства и есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода для решения задачи кручения:

$$\tau_{s0} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds = -\frac{Gc}{\pi} \int_{\Gamma} \cos(\gamma+\alpha) ds. \quad (12)$$

Введем величину крутящего момента [6]:

$$M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} r^2 \tau_s ds - GcI_p,$$

где I_p — полярный момент инерции, $r^2 = x^2 + y^2$.

2. В стержнях многосвязного сечения при обходе внутренних контуров вводят условия однозначности осевых смещений по теореме Бредта о циркуляции касательного напряжения.

$$\int_{\Gamma_j} \tau_s ds = -2Gc \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где Ω_j — площадь области, ограниченная контуром Γ_j ; n — количество контуров.

Для дальнейших выкладок вернемся к уравнению (12) и проанализируем его.

Будем множить интегральное уравнение (12) на ds_0 и интегрировать по контуру. Воспользуемся вспомогательной формулой (15), которая получается путем геометрической интерпретации $ds_0 \cos \gamma = \pm \rho d\alpha$, где α — полярный угол при точке t . Точка t в (12) является переменной, а при интегрировании по s_0 считается неподвижной

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma}{\rho} (t, s_0) ds_0 = \pm \frac{\pi}{2\pi}. \quad (15)$$

Нулевой результат соответствует положению точки t вне области, охваченной контуром; $\pm \pi$ — если точка t принадлежит контуру интегрирования, причем $+\pi$ — для внутреннего контура, а $-\pi$ — для наружного; -2π — если точка t находится внутри наружного контура интегрирования.

В случае односвязного сечения интегрирование (12) по наружному контуру приводит к (14), т.е. условие однозначности смещений вдоль оси стержня выполняется автоматически при решении интегрального уравнения.

В многосвязном случае интегрирование (12) по внутреннему контуру приводит к нулевому тождеству, что свидетельствует о наличии у интегрального уравнения (12) собственный функций.

Предложим следующее: при нулевой точке t_0 на наружном контуре оставим интегральное уравнение в прежней форме (12), а при t_0 на внутреннем контуре применим линейную комбинацию интегрального уравнения (12) и равенства (14):

$$-\pi \tau_{s_0 j} + \int_{\Gamma_j} \frac{\cos \gamma}{\rho} \tau_s ds + \frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} \int_{\Gamma_j} \tau_s ds = 2Gc \int_{\Gamma_j} \cos \gamma \cos \alpha - 2Gc \sqrt{\Omega_j}. \quad (16)$$

Повторяя приведенные выкладки с использованием формулы (15), можно убедиться, что в случае многосвязного сечения интегральное уравнение (16) обеспечивает выполнение условий однозначности смещений вдоль оси стержня при обходе каждого контура и тем самым решает задачу. Коэффициент $1/\sqrt{\Omega_j}$ при дополнительных членах в (16) может быть заменен произвольной константой или функцией t_0 . Возможность варьирования коэффициента была проверена и подтверждена численно.

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (16) в целом представляет собой бесконечную систему равенств с каждой точкой границы Γ в качестве нулевой. При численном решении интегралы заменяются суммами, например по квадратурной формуле Гаусса, а бесконечная система становится конечной. Дело сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений τ_s в узловых точках.

3. На основе метода интегральных уравнений разработана программа "СЕН-ВЕНАН", предназначенная для решения задачи несесненного кручения стержней многосвязного и односвязного поперечного сечения сложной конфигурации. Программа составлена на алгоритмическом языке "ФОРТРАН IV" ДОС ЕС ЭВМ. Объем памяти, занимаемой программой, позволяет использовать простую однофазную структуру программы. Время счета зависит от количества узловых точек на контуре и для приведенного в заключение примера составляет 2 мин на ЭВМ ЕС 1030. Большое внимание уделено вопросам эффективной численной реализации и удобства программы "СЕН-ВЕНАН" для пользователя. Геометрическая подготовка задачи — построение системы узловых точек на контуре в значительной степени автоматизирована. Участки окружностей и прямых представляются координатами крайних точек отрезков и кривизной. Специальные кривые вводят с помощью подпрограммы — функции вычисления координат.

Интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений с помощью квадратурной формулы Гаусса. Порядок квадратурной формулы — целое число от 1 до 15. Решение системы линейных алгебраических уравнений выполняется методом исключения неизвестных (методом Гаусса) с экономией памяти ЭВМ. При несимметричной матрице системы используется массив оперативной памяти размерностью не $N \times N$, а примерно вдвое меньший (N — число уравнений в системе).

4. Для оценки точности численного метода решения и проверки правильности работы алгоритма был выбран ряд тестовых задач: задача Вебера (кручение круглого стержня с полукруглой выточкой), задачи Сен-Венана (кручение стержня с поперечным сечением в форме равностороннего треугольника, кручение прямоугольного стержня). Сделано сравнение некоторых имеющихся численных решений задачи кручения стержней двухсвязного поперечного сечения с решениями, выполненными по программе "СЕН-ВЕНАН". Полученные результаты позволили сделать вывод о высокой точности предла-

гаемого метода. Так, погрешность распределений безразмерного касательного напряжения τ_x по сечению стержня квадратного сечения не превышает сотых долей процента при числе точек на контуре, равном 48.

Программа на протяжении ряда лет использовалась для расчета на кручение шлицевых валов с зубьями эвольвентного и прямобочного профиля, для определения коэффициентов концентрации валов со шпоночными канавками, а также кручение многосвязных профилей сложной конфигурации (валы с несимметрично расположенными отверстиями разных диаметров, кручение стержня прокатного профиля с поперечным сечением в виде "креста", ослабленного отверстием и другие).

Типичное применение программы показано на примере расчета хвостовика вала отбора мощности трактора МТЗ-82К (рис. 3). Результаты расчета подтверждают предположение работы [8] о том, что коэффициент концентрации в наиболее опасной точке контура Вебера (окружность с полукруглой выточкой) не зависит от формы контура поперечного сечения, ослабляемого выточкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н.Х., А б р а м я н Б.Л. Кручение упругих тел. — М., 1963.
2. Б е з у х о в Н.И., Л у ж и н О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. — М., 1974.
3. Д а н к е р т Ю., К о ч и к З. Решение задачи кручения с помощью метода конечных элементов. — В сб.: Динамика и прочность машин. Харьков, 1977, № 25.
4. У г о д ч и к о в А.Г., Д л у г а ч М.И., С т е п а н о в А.Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. — М., 1970.
5. Ш е р м а н Д.И. Об одной задаче кручения. — ДАН СССР, 1948, 63, № 5.
6. Т а т у р Г.К., Р у б е н ч и к В.Я. Расчет напряжений при кручении упругих призматических стержней. — Изв. АН БССР, сер. физ.-техн. наук, 1973, № 2.
7. М е н д е л ь с о н А., А л б е р с Л. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения упруго-пластических задач. — В сб.: Метод граничных интегральных уравнений. М., 1978, № 15.
8. М е л ь н и к о в Ю.А. Кручение упругих цилиндрических тел поперечного сечения сложной формы. — В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1976, № 21.
9. С у с л о в В.П., К о ч а н о в Ю.П., С п и х т а р е н к о В.Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. — Л., 1972.

УДК 539.311

Ю.А.КАШИН, Л.Г.КРАВЧЕНКО

РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЯ С ОСВОБОЖДАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА)

Упругие стержни являются одними из основных элементов конструкций, применяемых в современной технике. В задачах устойчивости тонких стержней и при исследовании их движения обычно рассматриваются свободные стержни. Этому посвящены работы Е.Л.Николаи, Е.П.Попова и др. [1,2]. По-